Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт

Государственного комитета РФ по высшему образованию

Препринт № 364

ОДНОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СУММЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СО СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.И.Есипенко

О.Б.Щуко

Нижний Новгород, 1993

Е с и п е н к о В. И., Щ у к о О. Б.

ОДНОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ С У М М Ы ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СО СЛУЧАЙНО И З М Е Н Я Ю Щ И М И С Я КОЭФФИЦИЕНТАМИ//Препринт № 364. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1993. - - 9 с.

УДК 519.213

Развит прямой метод отыскания одномерной плотности распределения вероятности суммы произвольного числа зависимых случайных величин со случайно изменяющимися коэффициентами. Показана связь полученных результатов с известными для случая суммирования случайных величин с постоянными коэффициентами.

Во многих областях науки и техники (теориях связи, вероятности, автоматического регулирования и др.) часто приходится иметь дело с отысканием статистических характеристик суммы

$$z = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \tag{I}$$

множества $\{z_1, \ldots, z_n\}$ в общем случае зависимых случайных величин z_k, характеризующихся совместной плотностью распределения вероятности $W_{nz}(z_1, \ldots, z_n)$. Входящие в (I) величины $(a_1, \ldots, a_n)$ есть коэффициенты суммирования.

При постоянных коэффициентах $(a_1, \ldots, a_n)$ эта задача в принципе разрешима, например, с помощью кумулянтного анализа /I/ или "прямого" метода /2/.

В данной работе "прямой" метод отыскания одномерной плотности распределения вероятности суммы (I) обобщается на случай суммирования со случайно изменяющимися коэффициентами. На наш взгляд данный метод нагляден и достаточно прост в реализации с помощью современных средств вычислительной техники.

Исследования выполнены применительно к наиболее важному и широко распространенному случаю независимых множеств $\{z_1, \ldots, z_n\}$ и $\{a_1, \ldots, a_n\}$, совместная плотность распределения вероятности которых записывается в форме

$$W_{2n}(a_1, z_1; \ldots; a_n, z_n) = W_{2n}(a_1, \ldots, a_n; z_1, \ldots, z_n) = \\ = \omega_{na}(a_1, \ldots, a_n)\, W_{nz}(z_1, \ldots, z_n). \tag{2}$$

Для большей наглядности сумму (I) запишем в несколько и н о м виде:

$$z_n = \sum_{\kappa=1}^{n} a_{n\kappa} z_{n\kappa} , \qquad (3)$$

где индекс "n" указывает на число слагаемых в сумме, а индекс "к" - на номер слагаемого в сумме.

С учетом (3) выражение (2) принимает вид

$$W_{2n}(a_{n1}, z_{n1}; \ldots ; a_{nn}, z_{nn}) = W_{2n}(a_{n1}, \ldots, a_{nn}; z_{n1}, \ldots, z_{nn}) =$$

$$= \omega_{na}(a_{n1}, \ldots, a_{nn}) \, W_{nz}(z_{n1}, \ldots, z_{nn}). \qquad (4)$$

Рассмотрим сначала тривиальный случай n = I. При этом $z_1 = a_{11} \cdot z_{11}$. Согласно общему правилу функционального преобразования случайных величин с учетом (4) имеем /3/

$$W_1(z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_{1a}(a_{11}) W_{1z}\left(\frac{z_1}{a_{11}}\right) \frac{da_{11}}{|a_{11}|} .$$

Пусть теперь n = 2. Тогда

$$z_2 = a_{21} z_{21} + a_{22} z_{22} = x_{21} + x_{22} . \qquad (5)$$

Полагаем предварительно a_{21} и a_{22} постоянными. Из (5) следует, что имеют место однозначные обратные функции

$$z_{21} = g_1(x_{21}, x_{22}) = \frac{x_{21}}{a_{21}} ,$$

$$z_{22} = g_2(x_{21}, x_{22}) = \frac{x_{22}}{a_{22}} . \qquad (6)$$

Якобиан преобразования от переменных z_{21} и z_{22} к перемен н ы м и x_{21} и x_{22}

$$D_2 = \frac{\partial(z_{21}, z_{22})}{\partial(x_{21}, x_{22})} = \frac{1}{a_{21} a_{22}} . \qquad (7)$$

С учетом (5)-(7), а также сделанного допущения, совместная плотность распределения вероятности случайных величин x_{21} и x_{22} принимает вид

$$\omega_2^*(x_{21},x_{22}) = W_{2z}\left[g_1(x_{21},x_{22}),\, g_2(x_{21},x_{22})\right]|D_2| =$$

$$= W_{2z}\left(\frac{x_{21}}{a_{21}},\, \frac{x_{22}}{a_{22}}\right)\left|\frac{1}{a_{21}\, a_{22}}\right|. \qquad (8)$$

Усредняя (8) по a_{21} и a_{22}, получим окончательно

$$\omega_2(x_{21},x_{22}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_{2z}\left(\frac{x_{21}}{a_{21}},\frac{x_{22}}{a_{22}}\right)\left|\frac{1}{a_{21}\, a_{22}}\right|\omega_{2a}(a_{21},a_{22})\,da_{21}\,da_{22}. \qquad (9)$$

Можно предварительно зафиксировать величины z_{21} и z_{22}, выполнить необходимые функциональные преобразования, а затем полученный результат усреднить по z_{21} и z_{22}:

$$\omega_2(x_{21},x_{22}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_{2a}\left(\frac{x_{21}}{z_{21}},\, \frac{x_{22}}{z_{22}}\right)\left|\frac{1}{z_{21}\, z_{22}}\right| W_{2z}(z_{21},z_{22})\,dz_{21}\,dz_{22}. \qquad (10)$$

С точки зрения получения окончательных результатов множества случайных величин $\{a_{21}, a_{22}\}$ и $\{z_{21}, z_{22}\}$ эквивалентны. Следовательно, выражения (9) и (10) совпадают и справедливо равенство

$$\omega_2(x_{21},x_{22}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_{2z}\left(\frac{x_{21}}{a_{21}},\frac{x_{22}}{a_{22}}\right)\left|\frac{1}{a_{21}\, a_{22}}\right|\omega_{2a}(a_{21},a_{22})\,da_{21}\,da_{22} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_{2a}\left(\frac{x_{21}}{z_{21}},\, \frac{x_{22}}{z_{22}}\right)\left|\frac{1}{z_{21}\, z_{22}}\right| W_{2z}(z_{21},z_{22})\,dz_{21}\,dz_{22}. \qquad (11)$$

В соответствии с известным правилом отыскания одномерной плотности распределения вероятности суммы (5) из (II) будем иметь /3/

$$W_1(z_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega_2(x_{21},z_2-x_{21})\,dx_{21}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_{2z}\left(\frac{x_{21}}{a_{21}},\frac{z_2-x_{21}}{a_{22}}\right)\left|\frac{1}{a_{21}a_{22}}\right|\omega_{2a}(a_{21},a_{22})\,da_{21}\,da_{22}\right]dx_{21}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega_{2a}\left(\frac{x_{21}}{z_{21}},\frac{z_2-x_{21}}{z_{22}}\right)\left|\frac{1}{z_{21}\,z_{22}}\right|W_{2z}(z_{21},z_{22})\,dz_{21}\,dz_{22}\right]dx_{21}. \quad (I2)$$

Выполняя аналогичные функциональные преобразования случайных величин для $n = 3$:

$$z_3=a_{31}z_{31}+a_{32}z_{32}+a_{33}z_{33}=x_{31}+x_{32}+x_{33} \quad (I3)$$

и опуская промежуточные вычисления, выражение для совместной плотности распределения вероятности случайных величин x_{31}, x_{32} и x_{33} запишем в форме

$$\omega_3(x_{31},x_{32},x_{33})=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_{3z}\left(\frac{x_{31}}{a_{31}},\frac{x_{32}}{a_{32}}\ \frac{x_{33}}{a_{33}}\right)\left|\frac{1}{a_{31}\,a_{32}a_{33}}\right|\times$$

$$\times\,\omega_{3a}(a_{31},a_{32},a_{33})\,da_{31}\,da_{32}\,da_{33}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega_{3a}\left(\frac{x_{31}}{z_{31}},\frac{x_{32}}{z_{32}},\frac{x_{33}}{z_{33}}\right)\left|\frac{1}{z_{31}\ z_{32}\ z_{33}}\right|\times \quad (I4)$$

$$\times\,W_{3z}(z_{31},z_{32},z_{33})\,dz_{31}\,dz_{32}\,dz_{33}.$$

Выражение же для одномерной плотности распределения вероятности суммы (I3) принимает вид

$$W_1(z_3) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_{31} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_{3z} \left(\frac{x_{31}}{a_{31}}, \frac{x_{32}}{a_{32}}, \frac{z_3 - x_{31} - x_{32}}{a_{33}} \right) \times$$

$$\times \left| \frac{1}{a_{31}\ a_{32}\ a_{33}} \right| \omega_{3a}(a_{31}, a_{32}, a_{33}) da_{31} da_{32} da_{33} \Big] dx_{32} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_{31} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega_a \left(\frac{x_{31}}{z_{31}}, \frac{x_{32}}{z_{32}}, \frac{z_3 - x_{31} - x_{32}}{z_{33}} \right) \times$$

$$\times \left| \frac{1}{z_{31}\ z_{32}\ z_{33}} \right| W_{3z}(z_{31}, z_{32}, z_{33}) dz_{31} dz_{32} dz_{33} \Big] dx_{32}. \qquad (I5)$$

В соответствии с методом математической индукции для произвольного числа n слагаемых в сумме (3) их совместная плотность распределения вероятности и одномерная плотность распределения вероятности их суммы имеют следующий вид соответственно:

$$\omega_n(x_{n1}, \ldots, x_{nn}) =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n\ \text{раз}} W_{nz} \left(\frac{x_{n1}}{a_{n1}}, \ldots, \frac{x_{nn}}{a_{nn}} \right) \left| \frac{1}{a_{n1} \cdot a_{n2} \ldots a_{n3}} \right| \omega_{na}(a_{n1}, \ldots, a_{nn}) da_{n1} \ldots da_{nn} = \qquad (I6)$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{n\ \text{раз}}\omega_{na}\left(\frac{x_{n1}}{z_{n1}},\ldots,\frac{x_{nn}}{z_{nn}}\right)\left|\frac{1}{z_{n1}\cdot z_{n2}\ldots z_{nn}}\right|W_{nz}(z_{n1},\ldots,z_{nn})dz_{n1}\ldots dz_{nn};$$

$$W_1(z_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx_{n1}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_{n2}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{n\ \text{раз}}W_{nz}\left(\frac{x_{n1}}{a_{n1}},\ldots,\frac{z_n-x_{n1}-\ldots-x_{n,n-1}}{a_{nn}}\right)\times$$

$$\times\left|\frac{1}{a_{n1}\cdot a_{n2}\ldots a_{nn}}\right|\omega_{na}(a_{n1},\ldots,a_{nn})da_{n1}\ldots da_{nn}\Bigg]dx_{n,n-1}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}dx_{n1}\int_{-\infty}^{+\infty}dx_{n2}\ldots\int_{-\infty}^{+\infty}\Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{n\ \text{раз}}\omega_{na}\left(\frac{x_{n1}}{z_{n1}},\ldots,\frac{z_n-x_{n1}-\ldots-x_{n,n-1}}{z_{nn}}\right)\times \tag{I7}$$

$$\times\left|\frac{1}{z_{n1}\cdot z_{n2}\ldots z_{nn}}\right|W_{nz}(z_{n1},\ldots,z_{nn})dz_{n1}\ldots dz_{nn}\Bigg]dx_{n,n-1}.$$

Тождества (I2), (I4)-(I7) дают возможность выбирать наименее сложный путь интегрирования, исходя из вида входящих в подынтегральные выражения n-мерных плотностей распределения вероятности $W_{nz}(z_{n1},\ldots,z_{nn})$ и $\omega_{na}(a_{n1},\ldots,a_{nn})$.

Так, полагая в (I7) величины $a_{n1},\ldots,a_{nn}$ постоянными и равными единице, для их совместной плотности распределения вероятности будем иметь /2/

$$\omega_{na}(a_{n1},\ldots,a_{nn})=\prod_{k=1}^{n}\delta(a_{nk}-1). \tag{I8}$$

Подставляя (I8) в (I7) и интегрируя, получим выражение, приведенное в /2/:

$$W_1(z_n)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_{n1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_{n2}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_{nz}(x_{n1},x_{n2},\dots,z_n-x_{n1}-\dots-x_{n,n-1})\,dx_{n,n-1}\,.$$

Полученные выражения (I6) и (I7) справедливы не только для произвольного числа n входящих в суммы (I) и (3) слагаемых, но также и для любых видов входящих в них и удовлетворяющих условию (4) совместных плотностей распределения вероятности $W_{nz}(z_{n1},\dots,z_{nn})$ и $\omega_{na}(a_{n1},\dots,a_{nn})$ множеств $\{z_{n1},\dots,z_{nn}\}$ и $\{a_{n1},\dots,a_{nn}\}$ соответственно.

Выполненные исследования дают возможность "прямым" методом найти одномерную плотность распределения вероятности суммы произвольного числа заданных случайных величин с произвольными статистическими характеристиками коэффициентов суммирования.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных процессов и их преобразований. - М.: Сов.радио, I978. - 376 с.

2. Есипенко В.И., Щуко О.Б. Одномерная плотность распределения вероятности суммы случайных величин//Препринт № 345. - Н.Новгород: НИРФИ, I992. - I4 с.

3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Сов.радио, I966. - 678 с.

Дата поступления статьи
26 апреля I993 г.