Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Государственного комитета РФ по высшему образованию

П р е п р и н т № 365

КОММУТАТИВНОСТЬ СВЕРТКИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ

В.И.Есипенко
О.Б.Щ у к о
С.Д.Щ у к о

Нижний Новгород, 1993

Есипенко В.И., Щуко О.Б., Щуко С.Д.

КОММУТАТИВНОСТЬ СВЕРТКИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ//Препринт № 365. – – Нижний Новгород: НИРФИ, 1993. – 13 с.

УДК 519.213: 517.31

Доказано свойство коммутативности операций свертки и функционального (в том числе нелинейного) преобразования переменных n -мерной плотности распределения вероятности. Рассмотрены примеры.

Преобразования типа свертки и функциональные преобразования переменных являются одними из основных операций математического анализа. Известные преобразования Лапласа, Стильтьеса и др. являются частными случаями преобразования свертки /I/. В многочисленных приложениях математического анализа указанные операции часто соседствуют друг с другом в различных комбинациях, как это имеет место, например, в различных приложениях статистической радиотехники /2, 3/, в частности, при статистическом анализе типового радиотехнического звена /4, 5/.

В литературе практически не освещен вопрос об изменениях тех или иных характеристик выходной функции при изменении порядка выполнения указанных операций. Этот вопрос преобретает особую остроту, когда функциональное преобразование переменных является нелинейным.

Данная работа имеет целью частично восполнить имеющийся в этой области пробел.

Пусть множество $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в общем случае зависимых случайных величин x_k характеризуется совместной плотностью распределения вероятности $\omega_n(x_1, \ldots, x_n)$. Для определенности полагаем, что случайные величины $x_1, \ldots, x_n$ могут принимать любые действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Рассмотрим два последовательно выполняемых функциональных преобразования.

Первое из них имеет вид

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= x_1, \\
\eta_2 &= x_1 + x_2 = \eta_1 + x_2, \\
\eta_3 &= x_1 + x_2 + x_3 = \eta_2 + x_3, \\
&\text{-----------------------------} \\
\eta_n &= x_1 + \ldots + x_n = \eta_{n-1} + x_n,
\end{aligned}
\tag{I}
$$

где $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ - множество новых переменных. Для наглядности и упрощения выкладок весовые коэффициенты суммирования случайных величин приняты равными единице, что не нарушает общности.

В соответствии с /6/ одномерная плотность распределения вероятности случайной величины η_n имеет вид

$$
\omega_1^*(\eta_n) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-1)\ \text{раз}} \omega_n(x_1, x_2, \ldots, \eta_n - x_1 - \ldots - x_{n-1})\, dx_1 \ldots dx_{n-1}. \tag{2}
$$

Следующее функциональное преобразование (в общем случае - нелинейное) запишем в форме

$$
y_n = f(\eta_n), \tag{3}
$$

где $f(\cdot)$ - кусочно-непрерывная функция. Полагаем, что существует однозначная обратная функция .

$$
\eta_n = g(y_n). \tag{4}
$$

Якобиан преобразования от случайной величины η_n к случайной величине y_n

$$
D = \frac{\partial \eta_n}{\partial y_n} = \frac{\partial g}{\partial y_n}. \tag{5}
$$

Тогда в соответствии с общим правилом функционального преобразования переменных /2/ одномерная плотность распределения вероятности случайной величины y_n с учетом (5)

$$
\omega_1(y_n) = \omega_1^*[g(y_n)] \cdot |D| = \omega_1^*[g(y_n)] \cdot \left| \frac{\partial g}{\partial y_n} \right|. \tag{6}
$$

Докажем следующее утверждение:

свертка и функциональное преобразование переменных (в общем случае нелинейное) коммутативны.

Выполним функциональное преобразование случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta_n$, входящих в (2), в общем случае

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta_n),\\
y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta_n),\\
&\text{-----------------------}\\
y_{n-1} &= f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta_n),\\
y_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \eta_n),
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

где $f(\cdot)$ – кусочно-непрерывные функции.

Полагаем, что существуют однозначные обратные функции $g_i(\dots)$:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g_1(y_1, \dots, y_n),\\
x_2 &= g_2(y_1, \dots, y_n),\\
&\text{---------------}\\
x_{n-1} &= g_{n-1}(y_1, \dots, y_n),\\
\eta_n &= g_n(y_1, \dots, y_n).
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Искомая совместная плотность распределения вероятности $W_n(y_1, \dots, y_n)$ случайных величин $y_1, \dots, y_n$ определится формулой

$$
W_n(y_1, \dots, y_n) = \omega_n\left[g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, g_{n-1}(y_1, \dots, y_n), g_n(y_1, \dots, y_n) -\right.
$$

$$
\left. - g_1(y_1, \dots, y_n) - \dots - g_{n-1}(y_1, \dots, y_n)\right] \cdot |D_n|, \qquad (9)
$$

где D_n – якобиан преобразования от случайных величин $x_1, \ldots, x_{n-1}$, η_n к случайными величинам $y_1, \ldots, y_n$:

$$D_n = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_{n-1},\eta_n)}{\partial(y_1,\ldots,y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ - & - & - & - \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \tag{10}$$

В соответствии с условием согласованности /2, 3/

$$\omega_1^*(y_n) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-1)\ \text{раз}} W_n(y_1,\ldots,y_n)dy_1\ldots dy_{n-1}\,. \tag{11}$$

Исходя из (3) и (4), наложим условия

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f\,, \tag{12}$$

$$g_1 = g_2 = \ldots = g_n = g \tag{13}$$

и покажем, что имеет место равенство

$$\omega_1(y_n) = \omega_1^*(y_n)\,. \tag{14}$$

С учетом условий (12) и (13) выражения (7)-(10) принимают соответственно вид

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1), \\ y_2 &= f(x_2), \\ &\text{- - - - - - - - -} \\ y_{n-1} &= f(x_{n-1}), \\ y_n &= f(\eta_n); \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= g(y_1), \\ x_2 &= g(y_2), \\ &\text{- - - - - - - - -} \\ x_{n-1} &= g(y_{n-1}), \\ \eta_n &= g(y_n); \end{aligned} \tag{16}$$

$$W_n(y_1, \dots, y_n) = \omega_n \Big[g(y_1), \dots, g(y_{n-1}), g(y_n) - g(y_1) - \\ - g(y_2) - \dots - g(y_{n-1}) \Big] \cdot |D_n| ; \tag{17}$$

$$D_n = \frac{\partial(x_1, \dots, x_{n-1}, \eta_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial y_2} & \dots & 0 \\ \text{- - -} & \text{- - -} & \text{- - -} & \text{- - -} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial g}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{\partial g}{\partial y_2} \dots \frac{\partial g}{\partial y_n} . \tag{18}$$

Подставляя (I7) и (I8) в (II), находим

$$\omega_1^*(y_n)=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-1)\text{ раз}}\omega_n\left[g(y_1),\dots,g(y_{n-1}),g(y_n)-g(y_1)-g(y_2)-\right.$$

$$\left.-\dots-g(y_{n-1})\right]\left|\frac{\partial g}{\partial y_1}\,\frac{\partial g}{\partial y_2}\dots\frac{\partial g}{\partial y_n}\right|dy_1\,dy_2\dots dy_{n-1}\,. \qquad (19)$$

Поскольку справедливы равенства

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y_1}\,\frac{\partial g}{\partial y_2}\dots\frac{\partial g}{\partial y_n}\right|=\left|\frac{\partial g}{\partial y_1}\right|\left|\frac{\partial g}{\partial y_2}\right|\dots\left|\frac{\partial g}{\partial y_{n-1}}\right|\,, \qquad (20)$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y_1}\right|dy_1=d\left[g(y_1)\right],\qquad\left|\frac{\partial g}{\partial y_2}\right|dy_2=d\left[g(y_2)\right],\dots,$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial y_{n-1}}\right|dy_{n-1}=d\left[g(y_{n-1})\right] \qquad (21)$$

то (19) после подстановки в него (20) и (21) принимает вид

$$\omega_1^*(y_n)=\left\{\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{(n-1)\text{ раз}}\omega_n\left[g(y_1),\dots,g(y_{n-1}),g(y_n)-g(y_1)-g(y_2)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\dots-g(y_{n-1})\right]d\left[g(y_1)\right]d\left[g(y_2)\right]\dots d\left[g(y_{n-1})\right]\right\}\left|\frac{\partial g}{\partial y_n}\right|. \qquad (22)$$

Выражение, стоящее в (22) в фигурных скобках, точно совпадает с (2), следовательно, с учетом (4)

$$\omega_1^*(y_n) = \omega_1^*\left[g(y_n)\right] \left|\frac{\partial g}{\partial y_n}\right| . \qquad (23)$$

Сравнивая (23) с (6), убеждаемся, что справедливо равенство (I4).

Утверждение доказано.

Рассмотрим два примера, ограничиваясь для наглядности двумерными совместными плотностями распределения вероятности.

А. Задана совместная плотность распределения вероятности $\omega_2(x_1, x_2)$ двух независимых гауссовских случайных величин x_1 и x_2 с равными нулю математическими ожиданиями и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно:

$$\omega_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}\right) \times \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}\right).$$

Здесь и ниже случайные величины приняты независимыми с целью упрощения выкладок.

I. Рассмотрим первое функциональное преобразование, состоящее в суммировании этих случайных величин (см.(I)):

$$\eta_1 = x_1, \qquad (24)$$

$$\eta_2 = x_1 + x_2 = \eta_1 + x_2 .$$

Тогда входящая в (2) подынтегральная функция для рассматриваемого случая запишется в форме

$$\omega_2(x_1, \eta_2 - x_1) = \varphi_1(x_1)\,\varphi_2(\eta_2 - x_1) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}\right) \times \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\eta_2 - x_1)^2}{2\sigma_2^2}\right]. \qquad (25)$$

Известно, что

$$\omega_1^*(\eta_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_2(x_1,\eta_2-x_1)dx_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\left[\frac{\eta_2^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]$$

т.е. $\omega_1^*(\eta_2)$ есть свертка функций $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_1, \eta_2)$.

2. В качестве второго функционального преобразования рассмотрим квадратичное преобразование случайной величины η_2

$$y_2 = \eta_2^2 \tag{26}$$

с однозначной обратной функцией

$$\eta_2 = \sqrt{y_2}\,. \tag{27}$$

Якобиан преобразования от случайной величины η_2 к случайной величине y_2 имеет вид

$$D_1 = \frac{\partial\eta_2}{\partial y_2} = \frac{1}{2\sqrt{y_2}}\,. \tag{28}$$

В соответствии с общим правилом функционального преобразования переменных для одномерной плотности распределения вероятности случайной величины y_2 получим выражение

$$\omega_1(y_2)=\omega_1^*\left[\sqrt{y_2}\right]|D_1|=\frac{1}{2\sqrt{2\pi y_2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left[-\frac{y_2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right] \tag{29}$$

3. Теперь, в соответствии с изложенной выше методикой (см.доказательство утверждения), выполним с учетом (26)-(28) квадратичное преобразование случайных величин x_1 и η_2, входящих в (25):

$$y_1 = x_1^2, \qquad y_2 = \eta_2^2. \tag{30}$$

Обратные функции, по-прежнему, полагаем однозначными:

$$x_1 = \sqrt{y_1}, \qquad \eta_2 = \sqrt{y_2}. \tag{31}$$

Якобиан преобразования от случайных величин x_1 и η_2 к случайным величинам y_1 и y_2 имеет вид

$$D_2 = \frac{\partial(x_1, \eta_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \frac{1}{4\sqrt{y_1\, y_2}} . \tag{32}$$

В соответствии с (I7) совместная плотность распределения вероятности случайных величин y_1 и y_2 запишется в форме

$$W_2(y_1, y_2) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1}{2\sigma_1^2}} \times \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\sqrt{y_2}-\sqrt{y_1})^2}{2\sigma_2^2}\right] \left|\frac{1}{4\sqrt{y_1 y_2}}\right| . \tag{33}$$

Подставляя (33) в (II), делая замену переменных $y_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) = z^2$ и выделяя полный квадрат в показателе экспоненты (см., например, /3/), получим

$$\omega_1^*(y_2) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\, y_2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\left[-\frac{y_2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right] . \tag{34}$$

Выражение (34) точно совпадает с (29).

Б. Задана совместная плотность распределения вероятности $\omega_2(x_1, x_2)$ двух независимых экспоненциально распределенных случайных величин x_1 и x_2 :

$$\omega_2(x_1, x_2) = a_1 e^{-a_1 x_1} a_2 e^{-a_2 x_2}, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

где a_1 и a_2 - параметры одномерных распределений.

I. В качестве первого функционального преобразования случайных величин x_1 и x_2 , по-прежнему, рассмотрим преобразование (24).

Соответствующая совместная плотность распределения вероятности случайных величин x_1 и η_2 имеет вид

$$\omega_2(x_1, \eta_2 - x_1) = \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(\eta_2 - x_1) = a_1 e^{-a_1 x_1} \times a_2 e^{-a_2(\eta_2 - x_1)} . \tag{35}$$

Подставляя (35) в (2), получим

$$\omega_1^*(\eta_2)=\int\limits_0^{\eta_2}\omega_2(x_1,\eta_2-x_1)dx_1=\frac{a_1 a_2}{a_1-a_2}\,e^{-a_2\eta_2}\left[1-e^{-(a_1-a_2)\eta_2}\right].$$

2. Пусть функциональное преобразование случайной величины η_2 совпадает с (26)-(28). Одномерная плотность распределения вероятности случайной величины y_2 (на выходе квадратора) в данном случае имеет вид

$$\omega_1(y_2)=\frac{a_1 a_2}{2(a_1-a_2)\sqrt{y_2}}\,e^{-a_2\sqrt{y_2}}\left\{1-\exp\left[-(a_1-a_2)\sqrt{y_2}\right]\right\}. \qquad (36)$$

3. В соответствии с изложенной выше методикой выполним с учетом (26)-(28) квадратичное преобразование случайных величин x_1 и η_2, входящих в (35) (соответствующие выражения (30)-(32) приведены выше).

В рассматриваемом случае совместная плотность распределения вероятности случайных величин y_1 и y_2 имеет вид

$$W_2(y_1,y_2)=a_1 e^{-a_1\sqrt{y_1}}\times a_2 e^{-a_2(\sqrt{y_2}-\sqrt{y_1})}\times\left|\frac{1}{4\sqrt{y_1\,y_2}}\right|, \qquad (37)$$

$$y_1\geq 0, \qquad y_2\geq 0.$$

Подставляя (37) в (II), делая замену переменной $\sqrt{y_1}=z$ и выполняя интегрирование, получим

$$\omega_1^*(y_2)=\frac{a_1 a_2}{2(a_1-a_2)\sqrt{y_2}}\,e^{-a_2\sqrt{y_2}}\left\{1-\exp\left[-(a_1-a_2)\sqrt{y_2}\right]\right\}. \qquad (38)$$

Выражение (38) точно совпадает с (36).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. Выполненные исследования и рассмотренные примеры свидетельствуют о том, что выполнение свертки, а затем функционального преобразования полученной случайной величины с математической точки зрения проще. Однако теоретические и практические соображения часто побуждают выполнить операцию свертки лишь на последнем этапе. Доказанное в данной работе свойство коммутативность свертки и функционального преобразования переменных позволяют это сделать.

ЛИТЕРАТУРА

I. Хиршман И.И., Уиддер Д.В. Преобразования типа свертки. -- М.: ИЛ, 1958. - 312 с.

2. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Сов.радио, 1966. - 678 с.

3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники.- - М.: Сов.радио, 1969, Т.I. - 751 с.

4. Kac M., Siegert A.J.F. On the theory of noise in radio receivers with square low detectors // J. Applied Physics. - 1947. - V.18, N.4. - P.383-397.

5. Meyer M.A., Middleton D. On the distribution of signals and noise after rectification and filtering//J. Applied Physics. - 1954. - V.25, N.8. - P.1037-1052.

5. Есипенко В.И., Щуко О.Б. Одномерная плотность распределения вероятности суммы случайных величин//Препринт № 345. - Н.Новгород: НИРФИ, 1992. - 14 с.

Дата поступления статьи
26 апреля 1993 г.