

**Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Государственного комитета РФ по высшему образованию**

П р е в р и т № 375

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАДАНЫХ ТОКОВ
В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ
ПРИ НАЛИЧИИ
ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПЛАЗМЕННОГО КАНАЛА**

**Т.М. Заборонкова
И.Г. Кондратьев
А.В. Кудрин**

Нижний Новгород. 1993

Забороноква Т.М., Кондратьев И.Г., Кудрин А.В.

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАДАНЫХ ТОКОВ В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ ПРИ НАЛИЧИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПЛАЗМЕННОГО КАНАЛА//Препринт № 375. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1993. - 68 с.

УДК 533.951

Исследуется влияние плазменно-волноводных каналов на излучение заданных источников в магнитоактивной плазме. Получено строгое решение задачи об излучении кольцевых электрических и магнитных токов при наличии цилиндрического плазменного столба, окруженного однородной фоновой плазмой и ориентированного вдоль внешнего магнитного поля. Рассмотрены как дискретная, так и непрерывная части пространственного спектра возбуждаемых волн. Из непрерывной части особо выделены квазилокализованные слабовытекающие моды. Исследована диаграмма направленности излучения. Установлено, что в свистовом диапазоне частот наличие канала с повышенной плотностью плазмы приводит к заметному увеличению сопротивления излучения кольцевых источников. Выполнены конкретные расчеты применительно к условиям земной ионосферы.

T.M. Zaboronkova, I.G. Kondrat'ev, A.V. Kudrin

RADIATION OF GIVEN CURRENTS IN THE PRESENCE OF A CYLINDRICAL PLASMA COLUMN IMMERSIED IN A MAGNETOPLASMA//Preprint N 375.- Nizhny Novgorod: NIRFI, 1993.- 68 p.

We investigate the influence of plasma channels on radiation of given sources in a magnetoplasma. We obtain the rigorous solution to the problem of radiation of annular electric and magnetic currents in the presence of a cylindrical plasma column surrounded by a uniform background plasma and oriented along an external magnetic field. Both the discrete and continuous parts of the spatial spectrum of excited waves are considered. The quasi-localized leaky modes are separately distinguished in the continuous part of the spectrum. The radiation pattern is also investigated. It is established that the presence of a channel with enhanced plasma density causes the considerable increase of radiation resistance values of annular currents in the whistler frequency range. We have carried out the concrete estimations for the Earth's ionosphere conditions.

І. В В Е Д Е Н И Е

Вопросы возбуждения и распространения электромагнитных волн при наличии естественных и искусственных плазменно-волноводных каналов (дактов плотности) в магнитоактивной плазменной среде вызывают в последнее время повышенный интерес (см., например, /1, 2/). Этот интерес обусловлен, в частности, постановкой ряда лабораторных и натуральных (ионосферных) экспериментов /3-7/, в которых плазменные неоднородности, вытянутые вдоль внешнего магнитного поля, формируются в фоновой плазме полем самого электромагнитного излучателя. Так, плазменно-волноводные каналы с повышенной плотностью наблюдались в лабораторных экспериментах по ионизационному самоканалированию квазиэлектростатических (плазменных) волн /3/ и свистовых волн (вистлеров) /4/. Искусственные дакты с концентрацией, во много раз превышающей фоновые значения, могут быть сформированы, как следует из /5/, и в естественных условиях нижней ионосферы при инжекции достаточно интенсивного электромагнитного пучка, способного привести к дополнительной ионизации окружающей среды. Каналы с пониженной плотностью могут возникнуть вблизи излучателей в магнитоактивной плазме при преобладающем воздействии тепловых и стрикционных нелинейных эффектов /6-8/.

В определенных условиях соответствующие плазменные образования приводят к заметному изменению характеристик излучения заданных источников по сравнению со случаем однородной (фоновой) плазмы. Например, в присутствии канала с повышенной плотностью, согласно результатам модельных экспериментов /9, 10/, имеет место существенное увеличение мощности излучения кольцевых электрических и магнитных токов.

Настоящая работа посвящена теоретическому изучению излучения таких токов при наличии цилиндрического плазменного столба, окруженного однородной фоновой плазмой и ориентированного вдоль внешнего магнитного поля. Главное внимание сосредоточено на представляющем значительный практический интерес свистовом диапазоне частот ω

$$\Omega_H \ll \omega < \omega_H \ll \omega_p \quad (I)$$

(Ω_H - гирочастота ионов, ω_H и ω_p - гирочастота и плазменная я

частота электронов соответственно). В частотном интервале (I) плазменный столб может являться направляющей системой для собственных (невытекающих) волн, поле которых локализовано вблизи канала, и несобственных (слабовытекающих) волн, преобразующихся при удалении от канала в поле излучения /7, II-13/. При этом, естественно, представляет интерес распределение излучаемой источником мощности как между волнами, поддерживаемыми столбом, так и непосредственно излучаемыми в окружающую среду, а также между отдельными пространственными компонентами собственно поля излучения (вистлерами, волнами конической рефракции, квазиэлектростатическими волнами - см./14/).

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ ПО ПРОДОЛЬНОМУ ВОЛНОВОМУ ЧИСЛУ

Итак, рассмотрим излучение заданных гармонических во времени ($\sim e^{i\omega t}$) кольцевых электрических или магнитных токов с плотностями

$$\vec{j}^e(\vec{r}) = \vec{\varphi}_0 I_0^e \delta(\rho - b) \delta(z) \quad (2)$$

и

$$\vec{j}^m(\vec{r}) = \vec{\varphi}_0 I_0^m \delta(\rho - b) [U(z + d) - U(z - d)] (2d)^{-1} \quad (3)$$

соответственно при наличии цилиндрического плазменного столба, окруженного однородной фоновой плазмой и ориентированного вдоль внешнего магнитного поля $\vec{H}_0 = H_0 \vec{z}_0$ (ρ, φ, z - цилиндрические координаты, δ - дельта-функция Дирака, U - единичная функция Хевисайда). Необходимость "размытия" магнитного тока (3) обусловлена тем, что на частотах $\omega > \omega_{LH}$ (ω_{LH} - нижняя гибридная частота, $\Omega_n \ll \omega_{LH} \ll \omega_n$) полная мощность излучения этого тока при $d \rightarrow 0$, т.е. при переходе в (3) к δ -функции по z , расходится так же, как и в случае однородной безграничной плазмы (см. /14/). Возьмем в качестве исходного простейшее однородное распределение концентрации плазмы N_e в столбе

$$N_e(\rho) = N + (\tilde{N} - N)[1 - U(\rho - a)], \quad (4)$$

где a - радиус столба, \tilde{N} и N - константы.

Напомним, что тензор диэлектрической проницаемости холодной замагниченной плазмы записывается следующим образом:

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & -ig & 0 \\ ig & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Величины ϵ , g , η определяются параметрами среды и приведены, например, в [15, с. 142]. Компоненты тензора ϵ_{ij} вне и внутри столба будем обозначать ϵ , g , η и $\tilde{\epsilon}$, \tilde{g} , $\tilde{\eta}$ соответственно.

Поле, возбуждаемое токами (2), (3), представим в виде разложения по продольному волновому числу

$$\begin{aligned} \vec{E}(\rho, z) &= \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}(\rho, \rho) e^{-i\kappa_0 \rho z} d\rho, \\ \vec{H}(\rho, z) &= \frac{\kappa_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{H}(\rho, \rho) e^{-i\kappa_0 \rho z} d\rho, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\kappa_0 = \omega/c$ - волновое число в свободном пространстве. Электромагнитное поле $\vec{E}(\rho, \rho)$, $\vec{H}(\rho, \rho)$ может быть описано с помощью двух скалярных функций $\Psi(\rho, \rho)$, $\Phi(\rho, \rho)$:

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, \rho) &= \epsilon^{-1}(\Phi - g\Psi), \\ E_\varphi(\rho, \rho) &= i\Psi, \end{aligned}$$

$$E_z(\rho, \rho) = -\frac{i}{\kappa_0 \rho \eta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \Phi),$$

$$H_\rho(\rho, \rho) = -\rho E_\varphi(\rho, \rho),$$

$$H_\varphi(\rho, \rho) = \rho^{-1} \Phi,$$

$$H_z(\rho, \rho) = -\frac{1}{\kappa_0 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \Psi) \quad (7)$$

($\rho > a$), причем сами функции Ψ , Φ должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{L} \Psi &= -\frac{\kappa_0^2}{\varepsilon} \left\{ [\varepsilon(\varepsilon - \rho^2) - g^2] \Psi + g \Phi \right\} + \frac{4\pi}{c} \kappa_0 I_0^e \delta(\rho - b), \\ \hat{L} \Phi &= -\kappa_0^2 \frac{\eta}{\varepsilon} \left[\rho^2 g \Psi + (\varepsilon - \rho^2) \Phi \right] + \\ &+ i \frac{4\pi}{c} \kappa_0 \rho \eta I_0^m \delta(\rho - b) \frac{\sin \kappa_0 \rho d}{\kappa_0 \rho d}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}.$$

Внутри волновода ($\rho < a$) выражения для компонент поля получаются из (7), (8) заменой функций Ψ , Φ и величин ε , g , η на $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\varepsilon}$, \tilde{g} , $\tilde{\eta}$ соответственно. Поле $\vec{E}(\rho, \rho)$, $\vec{H}(\rho, \rho)$ должно быть регулярным на оси ($\rho = 0$), удовлетворять граничным условиям на поверхности цилиндра ($\rho = a$) и условиям излучения на бесконечности ($\rho \rightarrow \infty$).

Опуская промежуточные выкладки, приведем результирующие выражения для функций $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Phi}$, Ψ , Φ , отвечающие всем указанным выше требованиям:

$$b < a,$$

$$\tilde{\Psi}(\rho, \rho) = \sum_{m=1}^2 \left[B_m J_1 \left(\tilde{Q}_m \frac{\rho}{a} \right) - \tilde{g}_m \tilde{G}_m^{(1)}(\rho) U(\rho - b) \right],$$

$$\tilde{\Phi}(\rho, \rho) = -\rho \sum_{m=1}^2 \tilde{n}_m \left[B_m J_1 \left(\tilde{Q}_m \frac{\rho}{a} \right) - \tilde{g}_m \tilde{G}_m^{(1)}(\rho) U(\rho - b) \right], \quad (9)$$

$$\Psi(\rho, \rho) = \sum_{m=1}^2 C_m K_1 \left(S_m \frac{\rho}{a} \right),$$

$$\Phi(\rho, \rho) = -\rho \sum_{m=1}^2 n_m C_m K_1 \left(S_m \frac{\rho}{a} \right);$$

$$b > a,$$

$$\tilde{\Psi}(\rho, \rho) = \sum_{m=1}^2 B_m J_1 \left(\tilde{Q}_m \frac{\rho}{a} \right),$$

$$\tilde{\Phi}(\rho, \rho) = -\rho \sum_{m=1}^2 \tilde{n}_m B_m J_1 \left(\tilde{Q}_m \frac{\rho}{a} \right),$$

(10)

$$\Psi(\rho, \rho) = \sum_{m=1}^2 \left\{ C_m K_1 \left(S_m \frac{\rho}{a} \right) + g_m G_m^{(1)}(\rho) [1 - U(\rho - b)] \right\},$$

$$\Phi(\rho, \rho) = -\rho \sum_{m=1}^2 n_m \left\{ C_m K_1 \left(S_m \frac{\rho}{a} \right) + g_m G_m^{(1)}(\rho) [1 - U(\rho - b)] \right\}.$$

Здесь

$$\tilde{g}_{1,2} = b \frac{\tilde{n}_{2,1} A_1 - \tilde{\eta}_b A_2}{\tilde{n}_{2,1} - \tilde{n}_{1,2}}, \quad g_{1,2} = b \frac{n_{2,1} A_1 - \eta_b A_2}{n_{2,1} - n_{1,2}},$$

$$A_1 = \frac{4\pi}{c} \kappa_0 I_0^e, \quad A_2 = -i \frac{4\pi}{c} \kappa_0 I_0^m \frac{\sin \kappa_0 \rho d}{\kappa_0 \rho d}, \quad (\text{II}')$$

$$\tilde{G}_m^{(e)}(\rho) = \frac{\pi}{2} Q_m^{1-\ell} \left[J_\ell \left(\tilde{Q}_m \frac{\rho}{a} \right) Y_1 \left(\tilde{Q}_m \frac{b}{a} \right) - J_1 \left(\tilde{Q}_m \frac{b}{a} \right) Y_\ell \left(\tilde{Q}_m \frac{\rho}{a} \right) \right],$$

$$G_m^{(e)}(\rho) = S_m^{1-\ell} \left[K_\ell \left(S_m \frac{\rho}{a} \right) I_1 \left(S_m \frac{b}{a} \right) + (-1)^\ell K_1 \left(S_m \frac{b}{a} \right) I_\ell \left(S_m \frac{\rho}{a} \right) \right],$$

$$\tilde{Q}_m = \kappa_0 a \tilde{q}_{\nu m}, \quad S_m = \kappa_0 a s_m, \quad \tilde{q}_{\nu m}^2 = q_{\nu m}^2(\rho, \tilde{N}), \quad s_m^2 = -q_{\nu m}^2(\rho, N),$$

$$\tilde{n}_m = n_m(\rho, \tilde{N}), \quad n_m = n_m(\rho, N), \quad m = 1, 2,$$

$$n_m(\rho, N_e) = - \frac{\varepsilon [\rho^2 + q_{\nu m}^2(\rho, N_e) + (q^2 - \varepsilon^2)/\varepsilon]}{\rho q};$$

$$q_{\nu m}^2(\rho, N_e) = \frac{\varepsilon^2 - q^2 + \varepsilon \eta - (\eta + \varepsilon) \rho^2 + (-1)^m R(\rho, N_e)}{2\varepsilon},$$

(I2)

$$R(\rho, N_e) = \left\{ (\eta - \varepsilon)^2 \rho^4 + 2 \left[q^2 (\eta + \varepsilon) - \varepsilon (\eta - \varepsilon)^2 \right] \rho^2 + (\varepsilon^2 - q^2 - \varepsilon \eta)^2 \right\}^{1/2},$$

J_n, Y_n, I_n, K_n - функции Бесселя, Неймана, модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда соответственно. Ветви многозначных функций $q_{\nu m}(\rho, N)$ выбираются в (9)-(II) так, чтобы выполнялись условия $\text{Re } S_m > 0$ (по крайней мере, при наличии потерь в среде) и $\text{Re } R > 0$ ($R = R(\rho, N)$). В отсутствие потерь величины $\text{Re } S_m$ при некоторых значениях ρ могут обращаться в нуль. В этом случае следует ввести малое поглощение и, выбрав

знаки $\text{Im } S_m$, согласно условиям $\text{Re } S_m > 0$, $\text{Re } R > 0$, перейти к среде без потерь. В некоторых случаях, в частности, при анализе поля излучения более удобно использовать в качестве аргументов соответствующих цилиндрических функций вместо S_m величины $q_m = -i S_m$. При этом выполняются соотношения

$$K_1 \left(S_m \frac{\rho}{a} \right) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(2)} \left(Q_m \frac{\rho}{a} \right), \quad (13)$$

$$K_0 \left(S_m \frac{\rho}{a} \right) = -\frac{\pi i}{2} H_0^{(2)} \left(Q_m \frac{\rho}{a} \right),$$

где $\rho \geq a$, $Q_m = K_0 a q_m$, $q_m = q_m(\rho, N)$, $H_n^{(2)}$ - функции Ханкеля второго рода, а условиям $\text{Re } S_m > 0$ ($m = 1, 2$) отвечают неравенства $\text{Im } q_m < 0$.

Коэффициенты B_m , C_m в выражениях (9), (10) записываются следующим образом:

$$b < a,$$

$$B_{1,2} = \left\{ \tilde{g}_{1,2} \left[\left(\tilde{D}_{2,1} J(\tilde{Q}_{2,1}) + K(S_1) K(S_2) \right) \tilde{G}_{1,2}^{(0)}(a) + \left(\frac{\tilde{\eta}}{\eta} J(\tilde{Q}_{2,1}) + \tilde{D}_{1,2} \right) \tilde{G}_{1,2}^{(1)}(a) - \tilde{g}_{2,1} \tilde{F}_{2,1} \frac{J_1(\tilde{Q}_{2,1} \frac{b}{a})}{\tilde{Q}_{2,1} J_0(\tilde{Q}_{2,1})} \right] \left[\tilde{Q}_{1,2} J_0(\tilde{Q}_{1,2}) \Delta(\rho) \right]^{-1} \right\}$$

$$C_{1,2} = \left\{ \tilde{g}_1 \left[L_{21,11} J(\tilde{Q}_2) - \frac{M_{1,2}}{M_0} K(S_{2,1}) \right] \frac{J_1(\tilde{Q}_1 \frac{b}{a})}{\tilde{Q}_1 J_0(\tilde{Q}_1)} + \right. \quad (14)$$

$$\left. \tilde{g}_2 \left[L_{22,12} J(\tilde{Q}_1) - \frac{M_{4,3}}{M_0} K(S_{2,1}) \right] \frac{J_1(\tilde{Q}_2 \frac{b}{a})}{\tilde{Q}_2 J_0(\tilde{Q}_2)} \right\} \left[(n_{1,2} - n_{2,1}) S_{1,2} K_0(S_{1,2}) \Delta(\rho) \right]^{-1}$$

$$b > a,$$

$$\begin{aligned}
 B_{1,2} = & \left\{ g_1 \left[\frac{\tilde{\eta} M_{3,2}}{\tilde{\eta} M_0} J(\tilde{Q}_{2,1}) - L_{12,11} K(S_2) \right] \frac{K_1(S_1 b/a)}{S_1 K_0(S_1)} + \right. \\
 & + g_2 \left[\frac{\tilde{\eta} M_{4,1}}{\tilde{\eta} M_0} J(\tilde{Q}_{2,1}) - L_{22,21} K(S_1) \right] \frac{K_1(S_2 b/a)}{S_2 K_0(S_2)} \left. \right\} \left[(\tilde{n}_{1,2} - \tilde{n}_{2,1}) \tilde{Q}_{1,2} J_0(\tilde{Q}_{1,2}) \Delta(\rho) \right]^{-1} \\
 C_{1,2} = & - \left\{ g_{1,2} \left[(D_{2,1} K(S_{2,1}) + \frac{\tilde{\eta}}{\eta} J(\tilde{Q}_1) J(\tilde{Q}_2)) G_{1,2}^{(0)}(a) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (K(S_{2,1}) + D_{1,2}) G_{1,2}^{(1)}(a) + g_{2,1} F_{2,1} \frac{K_1(S_{2,1} b/a)}{S_{2,1} K_0(S_{2,1})} \right\} \left[S_{1,2} K_0(S_{1,2}) \Delta(\rho) \right]^{-1};
 \end{aligned} \tag{I5}$$

где

$$\Delta(\rho) = \tilde{D}_1 J(\tilde{Q}_1) + \tilde{D}_2 J(\tilde{Q}_2) + \frac{\tilde{\eta}}{\eta} J(\tilde{Q}_1) J(\tilde{Q}_2) + K(S_1) K(S_2),$$

$$\tilde{D}_1 = M_1 L_{12} K(S_2) - M_2 L_{22} K(S_1),$$

$$\tilde{D}_2 = M_3 L_{21} K(S_1) - M_4 L_{11} K(S_2),$$

$$D_1 = M_3 L_{21} J(\tilde{Q}_2) - M_2 L_{22} J(\tilde{Q}_1),$$

$$D_2 = M_1 L_{12} J(\tilde{Q}_1) - M_4 L_{11} J(\tilde{Q}_2),$$

(I6)

$$\tilde{F}_1 = M_1 L_{11} K(S_2) - M_3 L_{21} K(S_1),$$

$$\tilde{F}_2 = M_3 L_{22} K(S_1) - M_4 L_{12} K(S_2),$$

$$F_1 = M_3 L_{11} J(\tilde{Q}_2) - M_2 L_{12} J(\tilde{Q}_1),$$

$$F_2 = M_1 L_{22} J(\tilde{Q}_1) - M_4 L_{21} J(\tilde{Q}_2),$$

$$L_{ij} = \left(n_i \frac{\tilde{\eta}_j}{\eta_j} - \tilde{n}_j \right); \quad M_0 = (n_1 - n_2)^{-1} (\tilde{n}_1 - \tilde{n}_2)^{-1},$$

$$M_1 = M_0 (\tilde{n}_1 - n_2), \quad M_2 = M_0 (\tilde{n}_1 - n_1),$$

$$M_3 = M_0 (\tilde{n}_2 - n_1), \quad M_4 = M_0 (\tilde{n}_2 - n_2),$$

$$J(\tilde{Q}_m) = \frac{J_1(\tilde{Q}_m)}{\tilde{Q}_m J_0(\tilde{Q}_m)},$$

$$K(S_m) = \frac{K_1(S_m)}{S_m K_0(S_m)}.$$

Заметим, что в частном случае $b = a$ выражения (9) и (10) существенно упрощаются и принимают вид

$$\tilde{\Psi}(\rho, \rho) = \sum_{m=1}^2 B_m J_1\left(\tilde{Q}_m \frac{\rho}{a}\right), \quad \tilde{\Phi}(\rho, \rho) = -\rho \sum_{m=1}^2 \tilde{n}_m B_m J_1\left(\tilde{Q}_m \frac{\rho}{a}\right),$$

(I7)

$$\Psi(\rho, \rho) = \sum_{m=1}^2 C_m K_1\left(S_m \frac{\rho}{a}\right), \quad \Phi(\rho, \rho) = -\rho \sum_{m=1}^2 n_m C_m K_1\left(S_m \frac{\rho}{a}\right).$$

Формулы (6), (7), (9)–(16) дают строгое решение задачи об излучении кольцевых токов (2), (3) в присутствии цилиндрического столба как с повышенной, так и с пониженной концентрацией и справедливы для магнитоактивной плазмы с тензором диэлектрической проницаемости общего вида (5), и ни в коей мере не ограничиваются рамками частотного диапазона (I).

Выражение $\Delta(\rho)$, стоящее в формулах (14), (15), и имеет четкий физический смысл. Как нетрудно убедиться (см., например, /7, 13/), соотношение

$$\Delta(\rho) = 0 \quad (18)$$

является дисперсионным уравнением для локализованных и квазилокализованных мод, направляемых цилиндрическим плазменным столбом. При наличии канала с повышенной плотностью плазмы уравнение (18) имеет вещественные корни $\rho = \rho_n$ ($n = 1, 2, \dots$), отвечающие локализованным (собственным) модам, лишь в следующей ограниченной области частот $\Omega_n < \omega < \omega_{Ln}$, принадлежащей интервалу (I). При этом выполняются соотношения $\tilde{\Phi} < \rho_n < \tilde{\Phi}$, где Φ и $\tilde{\Phi}$ – постоянные распространения свистовой волны вдоль внешнего магнитного поля \vec{H}_0 в однородной плазме со значениями концентрации $N_e = N$ и $N_e = \tilde{N}$ соответственно. В каналах с пониженной плотностью собственные моды с вещественными постоянными распространения ρ_n могут существовать в области частот $\omega_{Ln} < \omega < \omega_n$ /II/. В случае $\omega_{Ln} < \omega < \omega_n/2$ постоянные распространения соответствующих собственных мод лежат в интервале $\tilde{\Phi}_c < \rho_n < \Phi_c$, а при $\omega_n/2 < \omega < \omega_n$ – в интервале $\tilde{\Phi} < \rho_n < \Phi$ (здесь Φ_c и $\tilde{\Phi}_c$ – постоянные распространения волн конической рефракции вдоль \vec{H}_0 в однородной плазме со значениями плотности N и \tilde{N} соответственно).

Наряду с невытекающими (собственными) модами в плазменном волноводе могут существовать также слабовытекающие (несобственные) моды. Так, например, в каналах с повышенной плотностью плазмы при условиях $\omega_{Ln} < \omega < \omega_n/2$ возможно волноводное распространение несобственных свистовых мод, слабо вытекающих в фоновую плазму вследствие линейной трансформации вистлеров в мелко-масштабные квазиэлектростатические волны, не удерживающиеся в таких дуктах /12/. Из-за утечки энергии постоянные распространения

Этих мод являются комплексными - $\rho_{\nu} = \rho'_{\nu} - i\rho''_{\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots$), причем действительные части ρ'_{ν} лежат в интервале $\max(\Phi, \tilde{\Phi}_c) < \rho'_{\nu} < \tilde{\Phi}$, а мнимые (постоянные затухания) ρ''_{ν} при условиях $\omega \ll \omega_n$ или $N \ll \tilde{N}$ весьма малы: $\rho''_{\nu} \ll \rho'_{\nu}$ /7, 13/. В случае $\omega_{\text{ЛН}} < \omega < \omega_n$ и $N \ll \tilde{N}$ в плазменном волноводе с резкой границей $\rho = a$ могут также распространяться несобственные моды ($\rho'_{\nu} > \tilde{\Phi}$, $\rho'_{\nu} \gg \rho''_{\nu}$), канализование которых обусловлено отражением мелкомасштабных квазиэлектростатических волн от границы столба /13/. Следует отметить, что дисперсионное уравнение (18) при наличии корня $\rho = \rho_{\nu}$ имеет и корень $\rho = \tilde{\rho}_{\nu}$, где $\tilde{\rho}_{\nu} = -\rho_{\nu}^*$ (в отсутствие потерь). Правда, при этом вытекающим модам отвечают лишь корни $\rho = \rho_{\nu}$, для которых выполняется соотношение $\text{Re } \rho_{\nu} \cdot \text{Im } \rho_{\nu} < 0$.

Выражения для полей собственных мод совпадают по форме с выражениями (17), если в последних коэффициенты B_m, C_m заменить на $B_m^{(n)}, C_m^{(n)}$ соответственно, где

$$B_{1,2}^{(n)} = \tilde{Q}_{2,1} J_0(\tilde{Q}_{2,1}) S_1 K_0(S_1) S_2 K_0(S_2) \times \left\{ J(\tilde{Q}_{2,1}) [(\tilde{n}_{2,1} - n_{1,2}) K(S_{1,2}) + (n_{2,1} - \tilde{n}_{2,1}) K(S_{2,1})] + (n_{2,1} - n_{1,2}) K(S_1) K(S_2) \right\} \Big|_{\rho = \rho_n} \quad (19)$$

$$C_{1,2}^{(n)} = \tilde{Q}_1 J_0(\tilde{Q}_1) \tilde{Q}_2 J_0(\tilde{Q}_2) S_{2,1} K_0(S_{2,1}) \times \left\{ K(S_{2,1}) [(n_{2,1} - \tilde{n}_{1,2}) J(\tilde{Q}_{1,2}) + (\tilde{n}_{2,1} - n_{2,1}) J(\tilde{Q}_{2,1})] + (\tilde{n}_{2,1} - \tilde{n}_{1,2}) J(\tilde{Q}_1) J(\tilde{Q}_2) \right\} \Big|_{\rho = \rho_n}$$

Эти же выражения могут быть использованы и для описания указанных выше несобственных мод, которые мы (чтобы отличать их от соб

ственных) будем отмечать значком δ (ρ_δ , $V_m^{(\delta)}$, $c_m^{(\delta)}$).

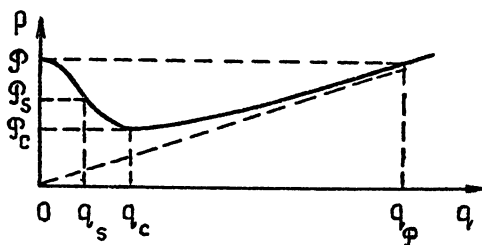
3. КОЭФФИЦИЕНТЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ МОД

Перейдем к вычислению коэффициентов возбуждения собственных и несобственных мод, направляемых плазменным каналом. Глав н о е внимание мы сосредоточим на чаством случае

$$\omega_{\text{ЛН}} < \omega \ll \omega_{\text{Н}} \ll \omega_{\text{Р}}, \quad (20)$$

вызывающем в последнее время повышенный интерес в связи с ряд о м интересных новых приложений (см./4, 9, 10/),

Напомним, что в замагниченной плазме в диапазоне частот (20) распространяется только "необыкновенная" волна, поверхность показателя преломления которой описывается выражениями (12) (точ н е е, функцией $q = q_1(\rho)$ при $0 \leq q \leq q_c$ и функцией $q = q_2(\rho)$ при $q_c \leq q < \infty$) и представлена на рис.1. Здесь значения Φ_s , q_s



Р и с.1

условия $q_\Phi = q_2(\Phi)$ ($q_1(\Phi) = 0$).

Поскольку функции $q_m(\rho, N_e)$ являются многозначными (см. выражения (12) и рис.1), для однозначного определения на комплексной плоскости ρ подынтегральных выражений в представлении (6) для поля необходимо исследовать аналитические свойства этих функций.

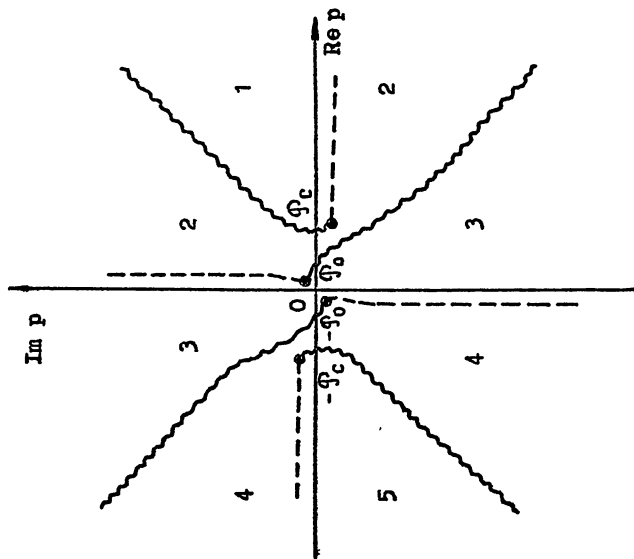
Начнем с анализа функции $R(\rho) = R(\rho, N)$, которая входит в выражения для $q_m(\rho, N)$ (см.(12)) и имеет четыре точки ветвления $\rho = \pm \Phi_0$, $\rho = \pm \Phi_c$, отвечающие соотношению $R = 0$ и лежащие при отсутствии потерь на действительной оси. Учет малых

отвечают углу Стори и находятся из условия $q_1''(\Phi_s) = 0$ ($q_s = q_1(\Phi_s)$), значения Φ_c , q_c отвечают ко- нической рефракции и на- ходятся из усло в и я $q_1(\Phi_c) = q_2(\Phi_c)$ ($q_c = q_{1,2}(\Phi_c)$); от- мечено также значе н и е q_Φ , соответствую щ е е

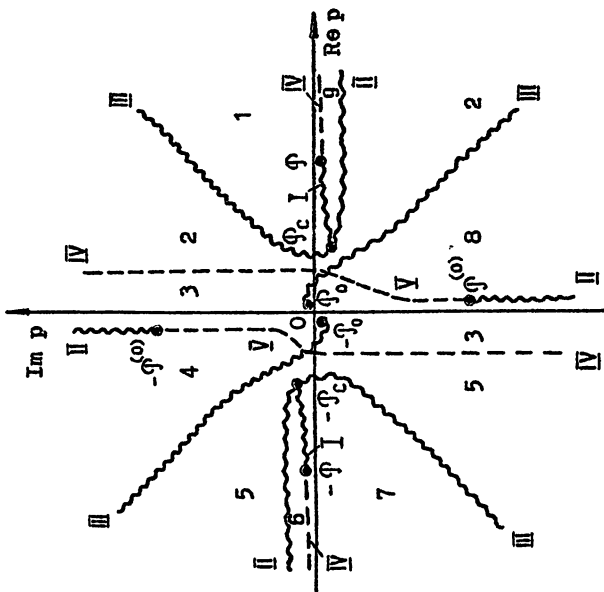
потерь в среде приводит к тому, что точки ветвления смещаются с этой оси. Разрезы на комплексной плоскости, идущие от точек ветвления, проведем по линиям $\text{Re} R = 0$. На рис.2а изображен лист двулистной римановой поверхности комплексной переменной ρ , отвечающей условию $\text{Re} R > 0$. Как видно из (12) и рис.2а, при $\rho \rightarrow \infty$ линии разрезов $\text{Re} R = 0$ стремятся к асимптотам $\text{Im} \rho = \pm \text{Re} R$. Штриховые линии на рис.2а отвечают условию $\text{Im} R = 0$. Отметим, что в областях 1, 3, 5 на рис.2а выполняется неравенство $\text{Im} R > 0$, а в областях 2, 4 - неравенство $\text{Im} R < 0$.

Функции $q_m(\rho)$ наряду с точками ветвления $\pm \rho_0, \pm \rho_c$ имеют точки ветвления $\rho = \pm \rho^{(e)}$, $\rho = \pm \rho^{(o)}$, отвечающие условиям $q_1(\rho^{(e)}) = 0$ и $q_2(\rho^{(o)}) = 0$ соответственно; при этом $\rho \equiv \pm \rho^{(e)} = (|q_1| + \varepsilon)^{1/2}$, $\rho^{(o)} = -i(|q_1| - \varepsilon)^{1/2}$. Разрезы в комплексной плоскости, идущие от этих точек, проведем по линиям $\text{Im} q_m = 0$, $m = 1, 2$. Как уже было отмечено выше, при вычислении интегралов (6) нам необходимо выбрать такие ветви функций q_m , для которых $\text{Im} q_m < 0$. Лист римановой поверхности, отвечающий условиям $\text{Im} q_m < 0$, $\text{Re} R > 0$ и изображенный на рис.2б, будем называть далее "верхним" листом. Заметим, что на рис.2б разрезы I и II отвечают условиям $\text{Im} q_1 = 0$ и $\text{Im} q_2 = 0$ соответственно, а разрезы III - соотношению $\text{Re} R = 0$; штриховые линии IV и V отвечают условиям $\text{Re} q_1 = 0$ и $\text{Re} q_2 = 0$ соответственно. Разрезы I-III и линии IV, V разбивают верхний лист на отдельные области I-9, в каждой из которых величины $\text{Re} q_m$ имеют определенные знаки: в области 1, 4, 7, 8 - $\text{Re} q_1 > 0$, $\text{Re} q_2 < 0$, в областях 2, 5 - $\text{Re} q_1 < 0$, $\text{Re} q_2 > 0$, в области 3 - $\text{Re} q_{1,2} > 0$, в областях 6, 9 - $\text{Re} q_{1,2} < 0$.

На различных берегах каждого из разрезов $\text{Re} R = 0$ функция q_1 (либо q_2) принимает неодинаковые значения. Можно, однако, показать, что значение q_i на одном берегу разреза $\text{Re} R = 0$ совпадает со значением q_j ($j \neq i$; $i, j = 1, 2$) на другом берегу того же разреза. При этом величины q_m входят в подынтегральные выражения (6) таким образом, что последние принимают одинаковые значения на обоих берегах каждого из разрезов $\text{Re} R = 0$. Поэтому, согласно принципу непрерывного аналитического продолжения [16, с.93], подынтегральные выражения в (6) могут быть аналитически продолжены через линии $\text{Re} R = 0$ по верхнему листу. Это означает, что при деформациях контура интегрирования на верхнем листе разрезы $\text{Re} R = 0$



a)



б)

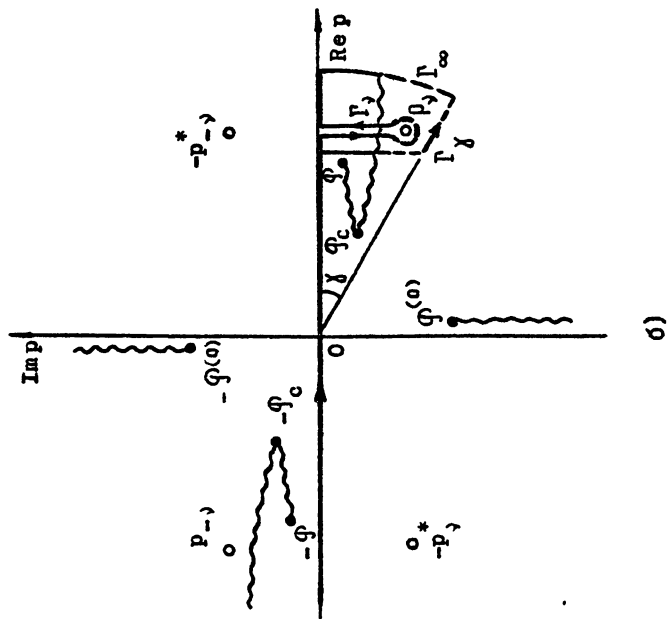
можно не учитывать.

Наряду с функциями q_m в подынтегральные выражения (6) входят функции $\tilde{q}_m(\rho) = q_m(\rho, \tilde{N})$ с аналогичными свойствами. Ветви этих функций можно выбрать, исходя только из соображений удобства работы с получающимися выражениями. В данной статье используется выбор ветвей $q_m(\rho, \tilde{N})$, соответствующий выполнению условий $\text{Re } \tilde{q}_m > 0$, $\text{Re } \tilde{E} > 0$ ($\tilde{E}(\rho) = R(\rho, \tilde{N})$) при действительных значениях ρ , лежащих в интервале $\Phi_c < \rho < \Phi$. Аналитическое продолжение функций $\tilde{q}_m(\rho)$ из этой области на всю комплексную плоскость выполняется стандартным образом [16].

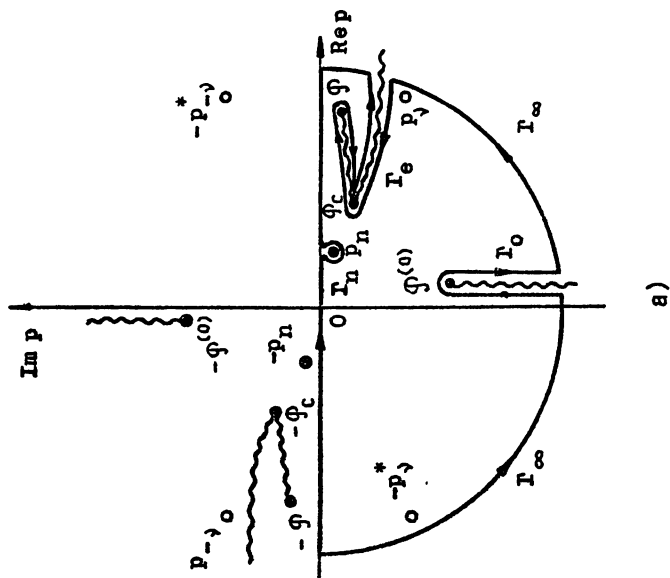
Необходимо также иметь в виду, что в диапазоне частот (20) при наличии столба с пониженной плотностью плазмы на верхнем листе комплексной плоскости ρ лежат полюсы $\rho = \rho_{\pm n}$ подынтегральных выражений (6), отвечающие собственным модам, направляемым каналом. Расположение полюсов $\rho_{\pm n}$ на плоскости ρ показано на рис. За. Здесь используется обозначение $\rho_{-n} = -\rho_n$ и предполагается, что для положительных n при учете потерь в среде выполняется с условием $\text{Im } \rho_n < 0$. Полюсы $\rho = \rho_{\pm n}$, а также разрезы, отвечающие соотношениям $\text{Im } q_m = 0$ ($m = 1, 2$), следует учитывать при деформировании контура интегрирования на верхнем листе.

Выделим теперь из общего интегрального представления (6) собственные волны в явном виде. Рассмотрим вначале поле при положительных значениях z (точнее, при $z > d$, если $d \neq 0$). Представим коэффициенты B_m , C_m (см. формулы (14)–(16)) в виде $B_m = B_m^{(\Delta)}(\rho)/\Delta(\rho)$, $C_m = C_m^{(\Delta)}(\rho)/\Delta(\rho)$ и деформируем контур интегрирования в комплексной плоскости ρ так, чтобы он прошел в нижней полуплоскости под некоторым полюсом $\rho = \rho_n$ подынтегрального выражения (рис. За, путь Γ_n). В результате из-под знака интеграла выделится вычет, отвечающий этому полюсу, так что мы получим

$$\begin{aligned}
 & \rho < a, \\
 E_\varphi(\rho, z) = & K_0 \left(\frac{d\Delta}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_n} \right)^{-1} \sum_{m=1}^2 B_m^{(\Delta)}(\rho_n) J_1 \left(\tilde{q}_m(\rho_n) \frac{\rho}{a} \right) e^{-ik_0 \rho_n z} + \\
 & + \frac{ik_0}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \tilde{\Psi}(\rho, \rho_n) e^{-ik_0 \rho z} d\rho; \quad (21)
 \end{aligned}$$



б)



а)

$$\rho > a,$$

$$E_{\varphi}(\rho, z) = \kappa_0 \left(\frac{d\Delta}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_n} \right)^{-1} \sum_{m=1}^2 C_m^{(\Delta)}(\rho_n) K_1(S_m(\rho_n) \frac{\rho}{a}) e^{-i\kappa_0 \rho_n z} +$$

$$+ \frac{i\kappa_0}{2\pi} \int_{\Gamma_n} \Psi(\rho, \rho) e^{-i\kappa_0 \rho z} d\rho.$$

Соответствующие выражения для остальных компонент поля записываются аналогично.

Отметим, что формулы для $B_m^{(\Delta)}(\rho) = \Delta(\rho) B_m(\rho)$ в случае $a < b$ при подстановке $\rho = \rho_n$ заметно упрощаются и становятся с аналогичными соответствующим выражениям для $C_m^{(\Delta)}$ (см. (14)):

$$B_{1,2}^{(\Delta)}(\rho_n) = \frac{1}{\tilde{q}_{1,2} J_0(\tilde{q}_{1,2})} \left\{ \tilde{q}_{1,2} \left[\tilde{D}_{1,2} + \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{\eta}} J(\tilde{q}_{2,1}) \right] \frac{J_1(\tilde{q}_{1,2} \frac{b}{a})}{\tilde{q}_{1,2} J_0(\tilde{q}_{1,2})} - \right.$$

$$\left. - \tilde{q}_{2,1} \tilde{F}_{2,1} \frac{J_1(\tilde{q}_{2,1} \frac{b}{a})}{\tilde{q}_{2,1} J_0(\tilde{q}_{2,1})} \right\} \Big|_{\rho=\rho_n}. \quad (22)$$

Сходная ситуация имеет место и для величин $C_m^{(\Delta)}(\rho) = \Delta(\rho) C_m(\rho)$ (при $\rho = \rho_n$) в случае $b > a$:

$$C_{1,2}^{(\Delta)}(\rho_n) = \frac{1}{S_{1,2} K_0(S_{1,2})} \left\{ q_{1,2} [D_{1,2} + K(S_{2,1})] \frac{K_1(S_{1,2} \frac{b}{a})}{S_{1,2} K_0(S_{1,2})} - \right.$$

$$\left. - q_{2,1} F_{2,1} \frac{K_1(S_{2,1} \frac{b}{a})}{S_{2,1} K_0(S_{2,1})} \right\} \Big|_{\rho=\rho_n} \quad (23)$$

(сравнить формулу (23) с выражением (15) для $V_m^{(\Delta)}$).

Члены, отвечающие вычету в точке $\rho = \rho_n$ (см. (21)), да в т поле \vec{E}_n, \vec{H}_n собственной моды с постоянной распространения $\rho = \rho_n$ (см. (19)). Стоящие перед ними коэффициенты могут быть выражены через величину

$$\begin{aligned} a_n &= -i k_0 B_m^{(\Delta)}(\rho_n) \left(B_m^{(n)} \frac{d\Delta}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_n} \right)^{-1} = \\ &= -i k_0 C_m^{(\Delta)}(\rho_n) \left(C_m^{(n)} \frac{d\Delta}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_n} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (24)$$

имеющую, очевидно, смысл коэффициента возбуждения соответствующей моды.

Деформируем теперь контур интегрирования таким образом, чтобы из-под интегралов выделились все собственные моды (контур $\Gamma_\infty + \Gamma_e + \Gamma_o$ - см. рис. 3а). Поскольку интегралы (6) по полуокружности бесконечного радиуса при $\text{Im } q_m < 0$ равны нулю, в выражении и для поля останутся только вычеты в полюсах $\rho = \rho_n$ и интегралы по берегам разрезов, т.е. по контурам Γ_e и Γ_o . В результате получим соотношения

$$\vec{E}(\rho, z) = \sum_n a_n \vec{E}_n + \frac{K_0}{2\pi} \int_{\Gamma_e} \vec{E}(\rho, \rho) e^{-ik_0 \rho z} d\rho + \frac{K_0}{2\pi} \int_{\Gamma_o} \vec{E}(\rho, \rho) e^{-ik_0 \rho z} d\rho, \quad (25)$$

$$\vec{H}(\rho, z) = \sum_n a_n \vec{H}_n + \frac{K_0}{2\pi} \int_{\Gamma_e} \vec{H}(\rho, \rho) e^{-ik_0 \rho z} d\rho + \frac{K_0}{2\pi} \int_{\Gamma_o} \vec{H}(\rho, \rho) e^{-ik_0 \rho z} d\rho,$$

где под знаками суммы стоят поля \vec{E}_n, \vec{H}_n отдельных собственных мод. В области отрицательных значений z выражения для поля получаются из (25) заменой $\eta \rightarrow -\eta$ и соответствующим изменением контура интегрирования. Последние должны обходить разрез $\text{Im } q_m = 0$ в верхней полуплоскости $\text{Im } \rho > 0$.

Вычисление коэффициентов возбуждения несобственных волн мы проведем на примере квазилокализованных мод, направляемых каналами с повышенной плотностью плазмы в диапазоне частот (20). Указанным несобственным волнам соответствует полюсы подынтегральных выражений $\rho = \rho_3$, $\rho = -\rho_3^*$, лежащие на листе римановой поверхности, отвечающем условиям $\text{Re} E > 0$, $\text{Im} q_1 < 0$, $\text{Im} q_2 > 0$ (далее этот лист мы будем условно называть "нижним"). Деформируем контур интегрирования так, чтобы он пересек разрез $\text{Im} q_2 = 0$, прошел под некоторым полюсом $\rho = \rho_3$ на нижнем листе и вышел (после вторичного пересечения того же разреза) вновь на верхний лист (путь Γ_3 , рис.3б). Тогда из-под знака интеграла выделится вычет, отвечающий несобственной волне с комплексной постоянной распространения ρ_3 . Конкретные выражения для поля этой волны получаются из соотношений (21)–(24) заменой $n \rightarrow \nu$, $\rho_n \rightarrow \rho_3$, $Q_n \rightarrow Q_3$ и соответствующим изменением контура интегрирования $\Gamma_n \rightarrow \Gamma_3$. При выполнении указанных преобразований следует иметь в виду, что верхний берег разреза, пересекемого контуром Γ_3 , совпадает с разрезом, идущим на плоскости q_2 от точки ветвления $q_2 = 0$ соответствующей функции Ханкеля. Пересекая этот разрез, мы выходим из области $-\pi < \text{arg} q_2 < \pi$ в область $-3\pi < \text{arg} q_2 < -\pi$, в которой для функций Ханкеля $H_n^{(2)}(Q_2 \frac{\rho}{a})$ справедливо соотношение

$$H_n^{(2)}(Q_2(\rho_3)\frac{\rho}{a}) = (-1)^{n-1} H_n^{(1)}(e^{i\pi} Q_2(\rho_3)\frac{\rho}{a}), \quad n = 0, 1. \quad (\text{см./I7/}).$$

Обратим внимание на то, что поле несобственной волны не является локализованным. В этом легко убедиться, если в выражениях (9), (10) перейти (при $\rho > a$) от функций Макдональда к функциям Ханкеля, согласно формулам (13), и учесть, что $H_n^{(2)}(Q_2(\rho_3)\frac{\rho}{a})$ при $\rho \rightarrow \infty$ в силу условия $\text{Im} q_2(\rho_3) > 0$ обращается в бесконечность (заметим, что функции $H_n^{(2)}(Q_1(\rho_3)\frac{\rho}{a})$ при $\rho \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, так как $\text{Im} q_1(\rho_3) < 0$). Поэтому выделение несобственных мод из-под знака интеграла имеет смысл в некоторой ограниченной области пространства, а именно внутри волновода и в определенной его окрестности.

Для выделения всех несобственных мод в области положительных значений z контур интегрирования следует деформировать так, чтобы он проходил на нижнем листе под некоторым углом χ к действительной оси (путь Γ_χ , рис.3б). Угол χ должен удовлетворять

$$\gamma > \gamma_{\max} = \max_{\gamma} \left\{ \arctg \left[-\operatorname{Im} q_2(\rho_{\gamma}) / \operatorname{Re} q_2(\rho_{\gamma}) \right] \right\}. \quad (26)$$

Напомним, что в свистовом диапазоне частот при условиях $\omega \ll \omega_H$ или $N \ll \tilde{N}$ и профиле плотности плазмы (4) справедливо неравенство $\gamma_{\max} \ll \pi / \sqrt{3}$. Можно показать, что в областях пространства, определяемых соотношениями

$$b < a,$$

$$z > d \quad (\rho < a), \quad z > d + (\rho - a) |\eta|^{1/2} \varepsilon \quad (\rho > a)$$

и

(27)

$$b > a,$$

$$z > d + (b - a) |\eta|^{1/2} \varepsilon \quad (\rho < b), \quad z > d + (\rho - a) |\eta|^{1/2} \varepsilon \quad (\rho > b),$$

интеграл по части дуги Γ_{∞} , лежащей на нижнем листе (рис.3б), при стремлении радиуса дуги к бесконечности обращается в нуль. Интеграл по части дуги Γ_{∞} , идущей по верхнему листу, обращается в нуль и вне области (27) в силу условия $\operatorname{Im} q_{\nu m} < 0$. Так как при преобразовании к новому контуру интегрирования Γ_{γ} затрагиваются только полюсы $\rho = \rho_{\gamma}$, получаем в итоге

$$\vec{E}(\rho, z) = \sum_{\gamma} a_{\gamma} \vec{E}_{\gamma} + \frac{k_0}{2\pi} \int_{\Gamma_{\gamma}} \vec{E}(\rho, \rho) e^{-ik_0 \rho z} d\rho,$$

$$\vec{H}(\rho, z) = \sum_{\gamma} a_{\gamma} \vec{H}_{\gamma} + \frac{k_0}{2\pi} \int_{\Gamma_{\gamma}} \vec{H}(\rho, \rho) e^{-ik_0 \rho z} d\rho. \quad (28)$$

Под знаками суммы здесь стоят поля \vec{E}_{γ} , \vec{H}_{γ} несобственных мод. При отрицательных значениях z , точнее, в областях пространства

$$b < a,$$

$$z < -d \quad (\rho < a), \quad z < -d - (\rho - a) |\eta|^{1/2} \varepsilon \quad (\rho > a)$$

и

$$b > a,$$

$$z < -d - (b-a)|\eta|^{1/2 - 1/2} \varepsilon \quad (\rho < b), \quad z < -d - (\rho-a)|\eta|^{1/2 - 1/2} \varepsilon \quad (\rho > b) \quad (29)$$

(сравнить с (27)) соответствующие моды могут быть выделены аналогичным преобразованием контура интегрирования в верхней полуплоскости $\text{Im } \rho > 0$.

Существенно, что выражения для коэффициентов возбужденных и не собственных мод совпадают с соответствующими выражениями для собственных мод. Такое совпадение позволяет работать с не собственными модами (после выделения их из-под интеграла), в известном смысле, как с собственными. Это тем более целесообразно, что в ряде случаев, как будет показано ниже, именно не собственные моды вносят главный вклад в полное поле, возбуждаемое в канале заданными источниками (2), (3).

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОЛЯ ПО ПОПЕРЕЧНОМУ ВОЛНОВОМУ ЧИСЛУ

Как известно (см., например, /19/), при решении задач о возбуждении открытых направляющих систем наряду с представлением поля в виде разложения по продольному волновому числу широко используется представление поля в виде разложения по поперечному волновому числу. Несомненно, что оба представления приводят в конечном счете к одинаковым результатам. Однако при конкретных реализациях и для конкретных целей одному из них может быть отдано методическое предпочтение.

В частном случае кольцевых источников (2) и (3) переход от использовавшегося ранее разложения (6) по продольному волновому числу ρ к разложению по поперечному волновому числу q вида

$$\begin{aligned} \bar{E}(\rho, z) = & \sum_n a_{\pm n} \bar{E}_{\pm n} + \int_0^{\infty} a_{\pm}^{(e)}(q) \bar{E}_{\pm}^{(e)}(\rho, q) e^{\mp i k_0 \rho^{(e)}(q) z} dq + \\ & + \int_0^{\infty} a_{\pm}^{(o)}(q) \bar{E}_{\pm}^{(o)}(\rho, q) e^{\mp i k_0 \rho^{(o)}(q) z} dq, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}(\rho, z) = & \sum_n a_{\pm n} \bar{H}_{\pm n} + \int_0^{\infty} a_{\pm}^{(e)}(q) \bar{H}_{\pm}^{(e)}(\rho, q) e^{\mp i k_0 \rho^{(e)}(q) z} dq + \\ & + \int_0^{\infty} a_{\pm}^{(o)}(q) \bar{H}_{\pm}^{(o)}(\rho, q) e^{\mp i k_0 \rho^{(o)}(q) z} dq \end{aligned} \quad (30)$$

(верхний знак отвечает области положительных значений z , нижний — отрицательных) осуществляется фактически с помощью формул (25). Используя замены переменных $q_1 = q$ (на разрезе $\text{Im } q_1 = 0$) и $q_2 = q$ (на разрезе $\text{Im } q_2 = 0$) в интеграле по контуру Γ_e , а также $q_2 = q$ в интеграле по контуру Γ_o , переходим от формул (25) непосредственно к разложению по поперечному волновому числу с контуром интегрирования, идущим по вещественной оси q . Далее, от интегрирования по всей вещественной оси q можно перейти к интегрированию по положительной полуоси, что и приводит к выражению (30). Очевидно, что величины, стоящие в разложении (30) под знаками сумм и интегралов, должны удовлетворять уравнениям Максвелла и граничным условиям (при $\rho = a$), а полное поле $\vec{E}(\rho, z)$, $\bar{H}(\rho, z)$ — условию излучения на бесконечности ($\rho \rightarrow \infty$). Зависимости $\rho^{(o)}(q)$ и $\rho^{(e)}(q)$ даются соотношениями

$$\begin{aligned} \rho^{(o,e)}(q) &= \left[\varepsilon - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\eta} \right) q^2 \mp R_p(q) \right]^{\frac{1}{2}}, \\ R_p(q) &= \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\eta} \right)^2 q^4 - \frac{g^2}{\eta} q^2 + g^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (31)$$

и описывают в магнитоактивной плазме тензором диэлектрической проницаемости (5) и концентрацией $N_e = N$ поверхности показателя преломления "обыкновенной" (верхний знак, $\rho^{(o)}$) и "необыкновенной" (нижний знак, $\rho^{(e)}$) волн соответственно. При этом подразумевается следующий выбор ветвей многозначных функций $\rho^{(o,e)}(q), R_p(q)$: $\text{Im } \rho^{(o,e)} < 0, \text{Re } R_p > 0$.

Оказывается (и это весьма существенно), что входящие в (30)

коэффициенты возбуждения $a_{\pm n}$, $a_{\pm}^{(0,e)}(q)$ соответствующих мод и поля могут быть получены непосредственно для произвольного ограниченного в пространстве распределения электрических и магнитных токов, причем более простым, на наш взгляд, методом, аналитическим известному методу теории возбуждения экранированных (закрытых) волноводов, опирающемуся на лемму Лоренца /18, С.303/. Обобщение этого метода на случай открытых направляющих систем с изотропным заполнением выполнено в /19, 20/. Вместе с тем предлагаемый подход не только упрощает процедуру вычисления коэффициентов возбуждения, но и в значительной степени проясняет многие физические аспекты проблемы. В процессе представленного ниже вывода для формул для $a_{\pm n}$, $a_{\pm}^{(0,e)}(q)$ устанавливается целый ряд важных соотношений (обычная ортогональность, энергетическая ортогональность и др.) между различными составляющими общего возбуждаемого поля.

Следует подчеркнуть, что в представлении (30) в отличие от использовавшегося ранее представления (6) собственные моды изначально выделены и описываются членами, стоящими под знаком суммы, а уже оставшаяся часть поля описывается интегралами. Далее (только для простоты вывода соответствующих формул) мы будем предполагать, что источники являются азимутально симметричными и сосредоточены в следующей ограниченной области пространства $\rho \leq b$, $|z| \leq d$. Сами же результирующие выражения, вывод которых дается ниже, могут быть легко обобщены на случай произвольного распределения источников.

Итак, в интересующей нас области вне источников поле $\vec{E}(\rho, z)$, $H(\rho, z)$ выражается через собственные функции $\tilde{\Psi}_{\pm}^{(0,e)}(\rho, q)$, $\tilde{\Phi}_{\pm}^{(0,e)}$, q при $\rho < a$ и $\Psi_{\pm}^{(0,e)}(\rho, q)$, $\Phi_{\pm}^{(0,e)}(\rho, q)$ при $\rho > a$, которые являются решениями уравнений (8), если в последних положить $\Gamma_0^{e,m} = 0$ и заменить величины ρ на функции $\pm \rho^{(0,e)}(q)$, определяемые соотношениями (31). Необходимо, чтобы соответствующие решения на бесконечности ($\rho \rightarrow \infty$) удовлетворяли условиям

$$\rho^{1/2} |\Psi^{(0,e)}(\rho, q)| < C_{\Psi}^{(0,e)}, \quad \rho^{1/2} |\Phi^{(0,e)}(\rho, q)| < C_{\Phi}^{(0,e)}, \quad (32)$$

где $C_{\Psi}^{(0,e)}$, $C_{\Phi}^{(0,e)}$ — некоторые константы. Можно показать (сравнить с /19, С.156/), что при выполнении соотношений (32) интегралы по

q в (30) дают поле, удовлетворяющее на бесконечности обычному условию излучения.

Решение исходных дифференциальных уравнений без источников, обеспечивающее выполнение граничных условий для полей $\vec{E}_{\pm}^{(0,\theta)}$ (ρ, q), $\vec{H}_{\pm}^{(0,\theta)}$ (ρ, q) при $\rho = a$, будет иметь следующий вид:

$$\tilde{\Psi}_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, q) = \sum_{m=1}^2 B_m(q) J_1\left(\tilde{Q}_m \frac{\rho}{a}\right) \Big|_{\rho=\pm\rho^{(\alpha)}(q)},$$

$$\tilde{\Phi}_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, q) = -\rho \sum_{m=1}^2 \tilde{n}_m B_m(q) J_1\left(\tilde{Q}_m \frac{\rho}{a}\right) \Big|_{\rho=\pm\rho^{(\alpha)}(q)},$$

(33)

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, q) = & C_1(q) H_1^{(1)}\left(Q_0 \frac{\rho}{a}\right) + C_2(q) H_1^{(2)}\left(Q_0 \frac{\rho}{a}\right) + \\ & + C(q) H_1^{(2)}\left(Q_a^{(\alpha)} \frac{\rho}{a}\right) \Big|_{\rho=\pm\rho^{(\alpha)}(q)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, q) = & -\rho \left[n_0 C_1(q) H_1^{(1)}\left(Q_0 \frac{\rho}{a}\right) + n_0 C_2(q) H_1^{(2)}\left(Q_0 \frac{\rho}{a}\right) + \right. \\ & \left. + n_a C(q) H_1^{(2)}\left(Q_a^{(\alpha)} \frac{\rho}{a}\right) \right] \Big|_{\rho=\pm\rho^{(\alpha)}(q)}, \end{aligned}$$

где

$$n_0 = - \frac{\varepsilon [\rho^2 + q^2 + (q^2 - \varepsilon^2)/\varepsilon]}{\rho q},$$

$$n_a = - \frac{\varepsilon [\rho^2 + q_a^{(\alpha)2} + (q^2 - \varepsilon^2)/\varepsilon]}{\rho q},$$

$$B_{1,2}(q) = 4i \left[\frac{\tilde{\eta} \mu_{3,2}}{\eta \mu_0} J(\tilde{Q}_{2,1}) + \alpha_{12,11} H^{(2)}(Q_a^{(\alpha)}) \right] Q_a^{(\alpha)} H_0^{(2)}(Q_a^{(\alpha)}) / \pi \tilde{Q}_{1,2} J(\tilde{Q}_{1,2}),$$

$$C_{1,2}(q) = \left\{ \left[\mu_1 \alpha_{12} H^{(2)}(Q_a^{(\alpha)}) - \mu_2 \alpha_{22} H^{(2,1)}(Q_0) \right] J(\tilde{Q}_1) + \right. \\ \left. + \left[\mu_3 \alpha_{21} H^{(2,1)}(Q_0) - \mu_4 \alpha_{11} H^{(2)}(Q_a^{(\alpha)}) \right] J(\tilde{Q}_2) - \tilde{\eta} \eta^{-1} J(\tilde{Q}_1) J(\tilde{Q}_2) - \right. \\ \left. - H^{(2,1)}(Q_0) H^{(2)}(Q_a^{(\alpha)}) \right\} \chi_{1,2} Q_0 H_0^{(2,1)}(Q_0) Q_a^{(\alpha)} H_0^{(2)}(Q_a^{(\alpha)}),$$

$$C(q) = 4i \pi^{-1} \left[\mu_3 \alpha_{11} J(\tilde{Q}_2) - \mu_2 \alpha_{12} J(\tilde{Q}_1) \right],$$

$$H^{(k)}(\xi) = \frac{H_1^{(k)}(\xi)}{\xi H_0^{(k)}(\xi)}, \quad \chi_1 = -1, \quad \chi_2 = 1, \quad Q_0 = k_0 a q,$$

$$Q_a^{(\alpha)} = k_0 a q_a^{(\alpha)}(q), \quad q_a^{(\alpha)}(q) = q_\ell(\rho^{(\alpha)}(q), N).$$

Символ " α " отмечает здесь соответствующую функцию $\rho^{(\alpha)}(q)$ ($\rho^{(\alpha)}(q) = \rho^{(0)}(q)$ или $\rho^{(\alpha)}(q) = \rho^{(e)}(q)$); величины μ_i , α_{ij} описываются формулами (I6) для M_i , L_{ij} , если в них выполнить замены $n_{1,2} \rightarrow n_{0,\alpha}$; остальные обозначения — те же, что и в (I2), (I6). Выбор индекса ℓ ($\ell = 1$ или $\ell = 2$) при вычислении функций $q_a^{(\alpha)} = q_\ell(\rho^{(\alpha)}(q), N)$ определяется неравенством $q_\ell(\rho^{(\alpha)}(q), N) \neq \pm q$. Величина $q_a^{(\alpha)}(q)$ имеет смысл "дополнительного" поперечного волнового числа, которое дает то же значение $\rho^{(\alpha)}(q_a^{(\alpha)})$, что и "обычное" вещественное поперечное волновое число q : $\rho^{(\alpha)}(q) = \rho^{(\alpha)}(q_a^{(\alpha)})$. Наличие членов, содержащих функции $H_n^{(2)}(Q_a^{(\alpha)} \frac{\rho}{a})$, в выражениях (33) связано с анизотропными свойствами замагничен —

ной плазменной среды и кардинально отличает решения (33) от соответствующих решений в случае открытого волновода с изотропным заполнением /19/. Ветви функций $q_a^{(\alpha)}$ используемые в (33), определяются условиями $\text{Im } q_a^{(\alpha)} < 0, \text{Re } R(\rho^{(\alpha)}, N) > 0$. Первое из этих соотношений позволяет исключить из рассмотрения решение $H_n^{(1)}(q_a^{(\alpha)} \frac{\rho}{a})$ исходных дифференциальных уравнений как заведомо не удовлетворяющее неравенствам (32). Случай $\text{Im } q_a^{(\alpha)} \rightarrow 0$, возможный при некоторых значениях q в среде без потерь, следует рассматривать как предельный, отвечающий стремлению потерь к нулю. Вычисление компонент поля $\vec{E}_\pm^{(\alpha)}(\rho, q), \vec{H}_\pm^{(\alpha)}(\rho, q)$ выполняется по формулам (7), если в них подставить соответствующие функции $\Psi_\pm^{(\alpha)}(\rho, q), \tilde{\Phi}_\pm^{(\alpha)}(\rho, q), \Psi_\pm^{(\alpha)}(\rho, q), \Phi_\pm^{(\alpha)}(\rho, q)$.

Для того, чтобы удовлетворить условиям (32), проанализируем более подробно поведение функций (33) вне волновода ($\rho > a$). Соотношения (32) ограничивают спектр возможных значений q . Вполне понятно, что условиям (32) удовлетворяют все действительные значения q , составляющие непрерывный спектр. Можно показать, однако, что отрицательные значения q не дают новых решений, по сравнению с функциями (33), отвечающими интервалу $0 < q < \infty$. Для этого преобразуем выражение для $\Psi_\pm^{(\alpha)}(\rho, e^{\mp i\pi} q)$ к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Psi_\pm^{(\alpha)}(\rho, e^{\mp i\pi} q) = & 2C_1(e^{\mp i\pi} q)J_1(k_0 e^{\mp i\pi} q, \rho) + \\ & + \Delta C(e^{\mp i\pi} q)H_1^{(2)}(k_0 e^{\mp i\pi} q, \rho) + \\ & + C(e^{\mp i\pi} q)H_1^{(2)}(k_0 q_a^{(\alpha)}(e^{\mp i\pi} q), \rho) \Big|_{\rho = \pm \rho^{(\alpha)}(q)} \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta C(q) = & C_2(q) - C_1(q) = 2Q_0 J_0(Q_0) Q_a^{(\alpha)} H_0^{(2)}(Q_a^{(\alpha)}) * \\ * \{ & [\mu_1 J(\tilde{Q}_1) - \mu_4 J(\tilde{Q}_2)] H^{(2)}(Q_a^{(\alpha)}) + [\mu_3 J(\tilde{Q}_2) - \mu_2 J(\tilde{Q}_1)] J(Q_0) - \\ & - \tilde{\eta} \eta^{-1} J(\tilde{Q}_1) J(\tilde{Q}_2) - H^{(2)}(Q_a^{(\alpha)}) \}, \end{aligned} \quad (35)$$

в обозначения $e^{-i\pi} q$ и $e^{i\pi} q$ указывают на принадлежность поперечного волнового числа соответственно к нижнему или верхнему берегу разреза, идущего вдоль отрицательной действительной полуоси от точки ветвления $q = 0$ функций Ханкеля $H_n^{(2)}(k_0 q, \rho)$. С учетом соотношений

$$\begin{aligned} H_n^{(2)}(k_0 e^{-i\pi} q, \rho) &= -e^{i\pi n} H_n^{(1)}(k_0 q, \rho), \\ H_n^{(1)}(k_0 e^{i\pi} q, \rho) &= -e^{-i\pi n} H_n^{(2)}(k_0 q, \rho), \end{aligned} \quad (36)$$

$J_1(k_0 e^{\mp i\pi} q, \rho) = -J_1(k_0 q, \rho) / i7$, $C_1(e^{-i\pi} q) = -C_2(q)$, $\Delta C(e^{\mp i\pi} q) = -\Delta C(q)$, а также четности функций $\rho^{(\alpha)}(q)$, $q_a^{(\alpha)}(q)$, $\tilde{Q}_m(q)$, $C(q)$ получаем, что $\Psi_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, e^{-i\pi} q) = \Psi_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, q)$. Повторяя аналогичные рассуждения для остальных функций (33), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, e^{\mp i\pi} q) &= \tilde{\Psi}_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, q), & \tilde{\Phi}_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, e^{\mp i\pi} q) &= \tilde{\Phi}_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, q), \\ \Psi_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, e^{\mp i\pi} q) &= \Psi_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, q), & \Phi_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, e^{\mp i\pi} q) &= \Phi_{\pm}^{(\alpha)}(\rho, q), \end{aligned} \quad (37)$$

позволяющим рассматривать только положительные значения q .

Далее, наряду с действительными q условиями (32) могут удовлетворять также некоторые комплексные значения $q = q_n$ ($n = 1, 2, \dots$), образующие дискретный спектр. В частности, значения $q = q_n$, являющиеся корнями уравнения

$$C_1(q) = 0 \Big|_{\rho = \rho^{(e)}(q)} \quad (38)$$

и имеющие отрицательную мнимую часть $\text{Im } q_n < 0$, дают решения

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm}^{(e)}(\rho, q_n) &= \Psi_{\pm n}(\rho) = C_2(q_n) H_1^{(2)}(k_0 q_n, \rho) + \\ &+ C(q_n) H_1^{(2)}(k_0 q_n^{(e)}(q_n), \rho) \Big|_{\rho = \pm \rho^{(e)}(q_n)}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\Phi_{\pm}^{(e)}(\rho, q_{\nu n}) = \Phi_{\pm n}(\rho) =$$

$$= -\rho \left[n_o C_2(q_{\nu n}) H_1^{(2)}(k_o q_{\nu n} \rho) + n_a C(q_{\nu n}) H_1^{(2)}(k_o q_{\nu a}^{(e)}(q_{\nu n}) \rho) \right] \Big|_{\rho = \pm \rho^{(e)}(q_{\nu n})},$$

удовлетворяющие условиям (32). При этом выполняются соотношения $\rho_n = \rho^{(e)}(q_{\nu n})$, $q_{\nu n} = q_{\nu m}(\rho_n, N)$, где $m = 1$ или $m = 2$ ($m \neq l$). В справедливости этих утверждений нетрудно убедиться, если принять во внимание, что выражение для $C_1(q)$ с точностью до множителя $Q_o H_o^{(2)}(Q_o) Q_a^{(e)} H_o^{(2)}(Q_a^{(e)})$ совпадает с выражением $\Delta(\rho)$, стоящим в левой части дисперсионного уравнения (18). Поэтому корням $q = q_{\nu n}$ уравнения (38) отвечают корни $\rho = \rho_n$ уравнения (18), а функциям $\Psi_{\pm}^{(e)}(\rho, q_{\nu n})$, $\tilde{\Phi}_{\pm}^{(e)}(\rho, q_{\nu n})$, $\Psi_{\pm}^{(e)}(\rho, q_{\nu n})$, $\Phi_{\pm}^{(e)}(\rho, q_{\nu n})$ — поля собственных мод с постоянными распространения $\rho_{\pm n}$.

Кроме собственных значений $q = q_{\nu n}$ условиям (32) удовлетворяют также значения $q = \tilde{q}_{\nu n}$, являющиеся корнями уравнения

$$C_2(q) = 0 \Big|_{\rho = \rho^{(e)}(q)} \quad (40)$$

и имеющие положительную мнимую часть $\text{Im} \tilde{q}_{\nu n} > 0$. Значения $\tilde{q}_{\nu n}$ можно представить в виде $\tilde{q}_{\nu n} = e^{i\pi} q_{\nu n}$, поскольку $C_2(q) = -C_1(e^{-i\pi} q)$. Вместо выражений (39) при $q = \tilde{q}_{\nu n}$ имеем

$$\Psi_{\pm}^{(e)}(\rho, \tilde{q}_{\nu n}) = C_1(\tilde{q}_{\nu n}) H_1^{(1)}(k_o \tilde{q}_{\nu n} \rho) + C(\tilde{q}_{\nu n}) H_1^{(2)}(k_o q_{\nu a}^{(e)}(\tilde{q}_{\nu n}) \rho) \Big|_{\rho = \pm \rho^{(e)}(\tilde{q}_{\nu n})},$$

$$\Phi_{\pm}^{(e)}(\rho, \tilde{q}_{\nu n}) = -\rho \left[n_o C_1(\tilde{q}_{\nu n}) H_1^{(1)}(k_o \tilde{q}_{\nu n} \rho) + n_a C(\tilde{q}_{\nu n}) H_1^{(2)}(k_o q_{\nu a}^{(e)}(\tilde{q}_{\nu n}) \rho) \right] \Big|_{\rho = \pm \rho^{(e)}(\tilde{q}_{\nu n})}. \quad (41)$$

Можно показать, что функции (4I) не дают новых решений. Действительно, принимая во внимание соотношения (36) и использовавшие ся выше свойства функций $\rho^{(\alpha)}$, $q_{\alpha}^{(\alpha)}$, \tilde{q}_m , C , ΔC , получаем, что о выражения (4I) сводятся к решению (39). Аналогично устанавливается, что $\tilde{\Psi}_{\pm}^{(e)}(\rho, \tilde{q}_n) = \tilde{\Psi}_{\pm}^{(e)}(\rho, q_n)$, $\tilde{\Phi}_{\pm}^{(e)}(\rho, \tilde{q}_n) = \tilde{\Phi}_{\pm}^{(e)}(\rho, q_n)$. Поэтому в дальнейшем все собственные функции в области $\rho > q_n$, отвечающие дискретной части спектра, мы будем записывать в виде (39).

Таким образом, можно утверждать, что в случае замагниченного плазменного волновода спектр собственных чисел q состоит из дискретной части $q = q_n$ ($n = 1, 2, \dots$) и непрерывной части, для которой q изменяется в пределах от 0 до ∞ . При этом поле, возбуждаемое заданными источниками, представляется в виде разложения (30) по системе собственных функций (33), соответствующей краевой задаче с условием (32) на бесконечности. Отметим, что система собственных функций (33) является обобщением на случай открыт ы х направляющих систем с гиротропным заполнением аналогичной системы собственных функций, полученной ранее в /I9/ для открытых диэлектрических волноводов с изотропным заполнением.

Для волн дискретной и непрерывной частей спектра, стоящих в разложении (30), справедливы следующие соотношения ортогональности, доказательства которых вынесены в Приложение I:

$$\begin{aligned}
 J_{n,m} &= 2\pi \int_0^{\infty} \{ [\vec{E}_n, \vec{H}_m^{(\tau)}] - [\vec{E}_m, \vec{H}_n^{(\tau)}] \} \vec{z}_0 \rho d\rho = \frac{4\pi}{c} N_n \delta_{n,-m}, \\
 J_{\pm, m}^{(\alpha)} &= 2\pi \int_0^{\infty} \{ [\vec{E}_{\pm, \alpha}, \vec{H}_m^{(\tau)}] - [\vec{E}_m, \vec{H}_{\pm, \alpha}^{(\tau)}] \} \vec{z}_0 \rho d\rho = 0, \\
 J_{\pm, \mp}^{(\alpha, \tilde{\alpha})} &= 2\pi \int_0^{\infty} \{ [\vec{E}_{\pm, \alpha}(\rho, z, q), \vec{H}_{\mp, \tilde{\alpha}}^{(\tau)}(\rho, z, \tilde{q})] - \\
 &\quad - [\vec{E}_{\mp, \tilde{\alpha}}^{(\tau)}(\rho, z, \tilde{q}), \vec{H}_{\pm, \alpha}(\rho, z, q)] \} \vec{z}_0 \rho d\rho = \pm \frac{4\pi}{c} N(q) \delta(q - \tilde{q}) \delta_{\alpha, \tilde{\alpha}},
 \end{aligned} \tag{42}$$

где

$$N^{(\alpha)}(q) = -\frac{4c}{\kappa_0^2} \left(\frac{dp^{(\alpha)}}{dq} \right)^{-1} (1 + \eta_0^{-1} n_0^2) C_1(q) C_2(q) \Big|_{p=p^{(\alpha)}(q)}, \quad (43)$$

$$N_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{dN^{(\alpha)}}{dq} \Big|_{q=q_n},$$

$$\vec{E}_{\pm, \alpha} = \vec{E}_{\pm}^{(\alpha)}(p, q) \exp \left[\mp i \kappa_0 p^{(\alpha)}(q) z \right],$$

$$\vec{H}_{\pm, \alpha} = \vec{H}_{\pm}^{(\alpha)}(p, q) \exp \left[\mp i \kappa_0 p^{(\alpha)}(q) z \right].$$

Здесь N_n - норма n -ой собственной моды, $N^{(\alpha)}$ - нормировочные величины для волн непрерывной части спектра, δ_{ij} - символ Кронекера; значок "T" указывает на то, что соответствующая величина относится к среде с обратным направлением внешнего магнитного поля ($\vec{H}_0 \rightarrow -\vec{H}_0$), т.е. к среде с транспонированным тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}^T$.

Соотношения ортогональности (42) позволяют вычислить коэффициенты возбуждения $a_{\pm n}$, $a_{\pm}^{(\alpha)}(q)$ волн дискретной и непрерывной частей спектра путем использования леммы Лоренца, обобщенной на случай гиротропной среды [21]. Соответствующие расчеты, полностью аналогичные вычислениям [19], отвечающим открытому изотропному волноводу, дают для коэффициентов $a_{\pm n}$, $a_{\pm}^{(\alpha)}(q)$ выражения

$$a_{\pm n} = \frac{2\pi}{N_n} \int_{-d}^d dz \int_0^b \left(\vec{j}^e \vec{E}_{\mp n}^{-T} - \vec{j}^m \vec{H}_{\mp n}^{-T} \right) p dp, \quad (44)$$

$$a_{\pm}^{(\alpha)}(q) = \frac{2\pi}{N^{(\alpha)}(q)} \int_{-d}^d dz \int_0^b \left(\vec{j}^e \vec{E}_{\mp, \alpha}^{-T} - \vec{j}^m \vec{H}_{\mp, \alpha}^{-T} \right) p dp,$$

идентичные, по существу, известным формулам для коэффициентов возбуждения закрытых волноводов (см. [18, С.303]).

Ниже в качестве конкретного примера приведем некоторые результаты, относящиеся к кольцевым токам (2) и (3). Прежде всего, отметим, что полученные ранее выражения (24) для коэффициентов возбуждения a_n собственных мод могут быть преобразованы к виду (44), если значения производных $\frac{d\Delta}{d\rho}$ при $\rho = \rho_n$ в (24) выразить через нормы N_n собственных мод в соответствии с формулой (П8) Приложения I. Не останавливаясь на этих преобразованиях, запишем выражения для азимутальной компоненты электрического поля в случае $b < a, z > d$:

$$\rho < a,$$

$$E_\varphi(\rho, z) = \sum_n i a_n \tilde{\Psi}_+^{(e)}(\rho, q_n) \exp(-i k_0 \rho_n z) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} J^{(\alpha)}(q) \frac{(-i) k_0^2 [B_1(q) J_1(\tilde{Q}_1 \frac{\rho}{a}) + B_2(q) J_1(\tilde{Q}_2 \frac{\rho}{a})]}{4c(1+\eta^{-1}n_0^2)C_1(q)\Delta C(q)} \Big|_{\rho=\rho^{(\alpha)}(q)} \times \frac{d\rho^{(\alpha)}}{dq} e^{-i k_0 \rho^{(\alpha)}(q) z} dq;$$

(45)

$$\rho > a,$$

$$E_\varphi(\rho, z) = \sum_n i a_n \Psi_+^{(e)}(\rho, q_n) \exp(-i k_0 \rho_n z) + \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} J^{(\alpha)}(q) \frac{(-i) k_0^2 [\Delta C(q) H_1^{(2)}(\tilde{Q}_0 \frac{\rho}{a}) + C(q) H_1^{(2)}(\tilde{Q}_a \frac{\rho}{a})]}{4c(1+\eta^{-1}n_0^2)C_1(q)\Delta C(q)} \Big|_{\rho=\rho^{(\alpha)}(q)} \times \frac{d\rho^{(\alpha)}}{dq} e^{-i k_0 \rho^{(\alpha)}(q) z} dq.$$

Здесь

$$J^{(d)}(q) = 2\pi b \sum_{m=1}^2 \left[i I_0^e + \tilde{h}_m I_0^m \frac{\sin(\kappa_0 \rho^{(d)} d)}{\kappa_0 \rho^{(d)} d} \right] \times$$

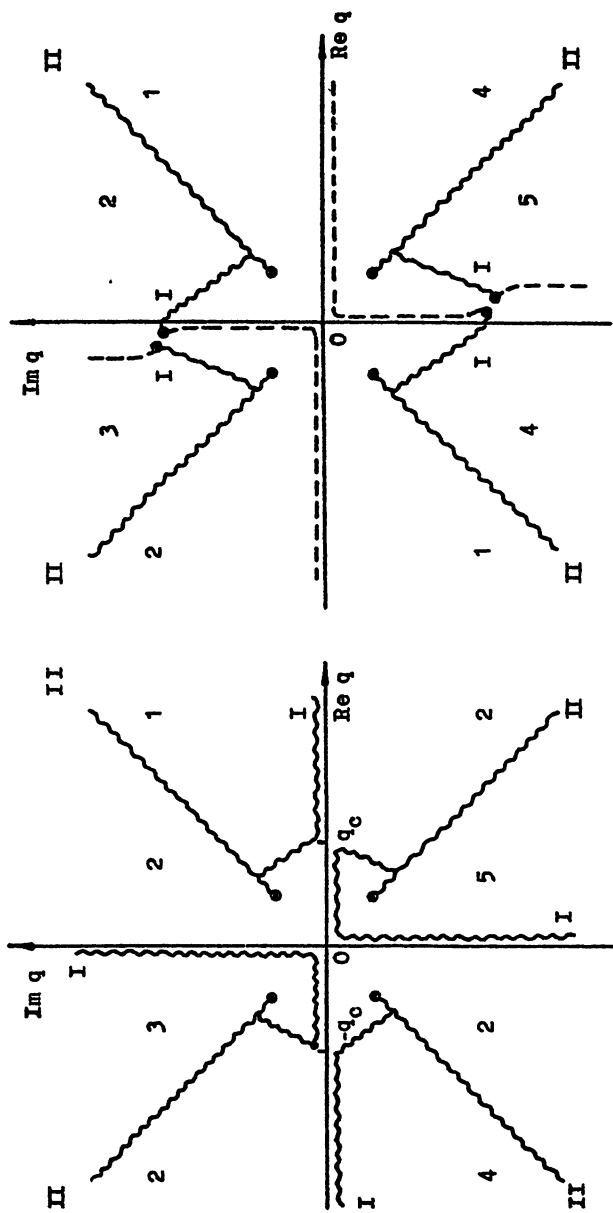
$$\times B_m(q) J_1 \left(\tilde{Q}_m \frac{b}{a} \right) \Big|_{\rho = \rho^{(d)}(q)},$$

$$a_n = \frac{J^{(e)}(q_n)}{N_n}. \quad (46)$$

В выражениях (45) мы перешли от интегрирования по положительной полуоси q (см. (30)) к интегрированию по всей действительной оси. При этом предполагалось, что области отрицательных значений путь интегрирования проходит по нижнему берегу разреза $\text{Im } q = 0$

($\text{Re } q < 0$), отвечающего точке ветвления функций Хэнкеля $H_n^{(2)}(\kappa_0 q \rho)$.

Остановимся более подробно на весьма важном и непростом случае несобственных мод, направляемых плазменным столбом с повышенной плотностью в области частот ($2C$). Прежде чем перейти к непосредственному вычислению коэффициентов возбуждения a_n , этот мод (в рамках представления (30)), проанализируем свойства функций $\rho^{(d)}(q)$, $q_a^{(d)}(q)$, входящих в подынтегральные выражения (30). Начнем с функций $\rho^{(d)}(q)$, для которых на рис. 4 изображены листы римановой поверхности, отвечающие выбранным выше ветвям этих функций - $\text{Im } \rho^{(e)} < 0$, $\text{Re } R_p > 0$ (рис. 4а) и $\text{Im } \rho^{(o)} < 0$, $\text{Re } R_p > 0$ (рис. 4б). На рис. 4а разрезы I проведены по линиям $\text{Im } \rho^{(e)} = 0$, разрезы II - по линиям $\text{Re } R_p = 0$ от точек ветвления функции $R_p(q)$, в которых $R_p = 0$ (точки ветвления функции $\rho^{(e)}(q)$ лежат на листе $\text{Re } R_p < 0$ и поэтому на рис. 4а не показаны). При этом в областях I, 3-5 выполняется неравенство $\text{Re } \rho^{(e)} < 0$, а в области 2 - неравенство $\text{Re } \rho^{(e)} > 0$. На рис. 4б разрезы I и штриховые линии, отвечающие условиям $\text{Im } \rho^{(o)} = 0$ и $\text{Re } \rho^{(o)} = 0$, соответственно, идут от точек ветвления функций $\rho^{(o)}(q)$, в которых



б)

а)

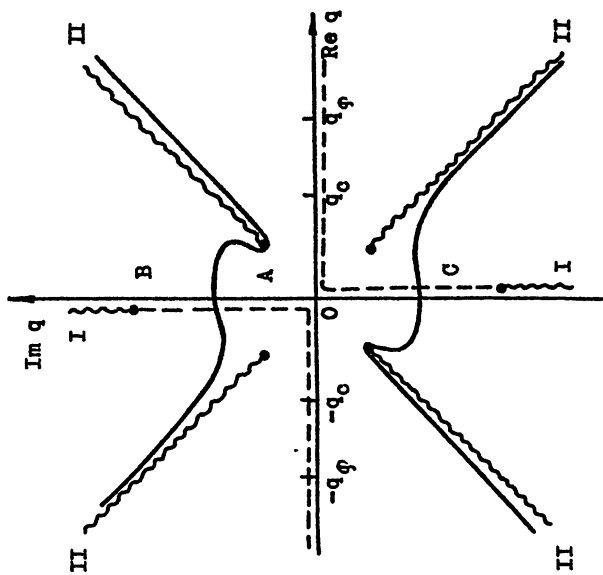
$\rho^{(0)} = 0$; разрезы Π проходят, по-прежнему, вдоль линий $\operatorname{Re} R_p = 0$. В областях 1, 3, 5 на рис. 4б выполняется неравенство $\operatorname{Re} \rho^{(0)} > 0$, а в областях 2, 4 - неравенство $\operatorname{Re} \rho^{(0)} < 0$.

Листы комплексной плоскости q , соответствующие ветвям функций $q_a^{(\alpha)}(q)$, для которых $\operatorname{Im} q_a^{(\alpha)}(q) < 0$, $\operatorname{Re} R_p > 0$, показаны отдельно на рис. 5 (рис. 5а - $\operatorname{Im} q_a^{(e)} < 0$, $\operatorname{Re} R_p > 0$, рис. 5 б - $\operatorname{Im} q_a^{(o)} < 0$, $\operatorname{Re} R_p > 0$). Разрезы I и штриховые линии на рис. 5а, б проведены вдоль линий $\operatorname{Im} q_a^{(\alpha)} = 0$ и $\operatorname{Re} q_a^{(\alpha)} = 0$ соответственно от точек ветвления, в которых $q_a^{(\alpha)} = 0$; разрезы II так же, как на рис. 4, идут по линиям $\operatorname{Re} R_p = 0$. В первом и третьем квадрантах рис. 5а, б справедливо неравенство $\operatorname{Re} q_a^{(\alpha)} > 0$, а во втором и четвертом квадрантах - неравенство $\operatorname{Re} q_a^{(\alpha)} < 0$. Там же изображены сплошные линии, отвечающие соотношению $\operatorname{Re} R(\rho^{(\alpha)}(q), N) = 0$ и разделяющие каждый из двух листов на рис. 5 (а и б) на области А, В, С (напомним, что при вычислении функций $q_a^{(\alpha)}(q)$ предполагается, что $\operatorname{Re} R(\rho^{(\alpha)}(q), N) > 0$). На рис. 5а в области А выполняется соотношение $q_a^{(e)}(q) = q_1(\rho^{(e)}(q), N)$, а в областях В и С - соотношение $q_a^{(e)}(q) = q_2(\rho^{(e)}(q), N)$. На рис. 5б в области А имеем $q_a^{(o)}(q) = q_2(\rho^{(o)}(q), N)$, а в остальных областях (В и С) - $q_a^{(o)}(q) = q_1(\rho^{(o)}(q), N)$. Очевидно, что используем у здесь определение функций $q_a^{(\alpha)}(q)$ отвечает непрерывное аналитическое продолжение через линии $\operatorname{Re} R(\rho^{(\alpha)}(q), N) = 0$.

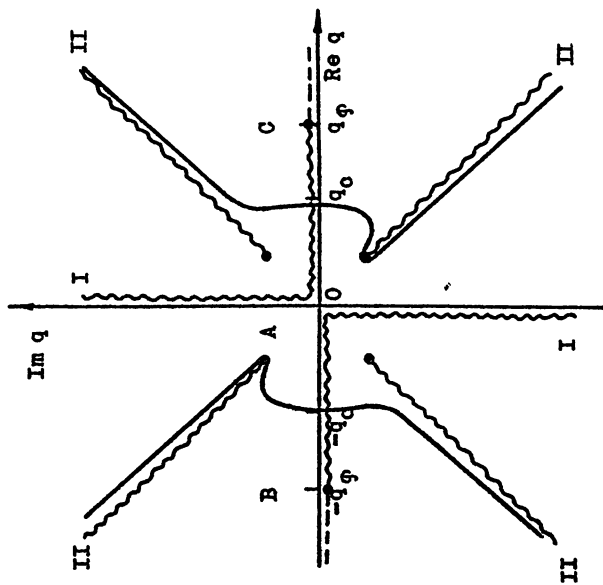
Разрезы, соответствующие всем перечисленным выше особенностям функций $H_n^{(R)}(k_0 q, \rho)$, $\rho^{(\alpha)}(q)$, $q_a^{(\alpha)}(q)$, изображены на рис. 6 а, б. Там же показан контур интегрирования Γ , отвечающий выражениям (45).

Несобственные моды принадлежат непрерывной части спектра. В диапазоне частот (20) несобственным модам с положительной радиальной составляющей вектора Пойнтинга соответствуют корни $q = q_{\nu}$ уравнения (38), имеющие положительную мнимую часть ($\operatorname{Im} q_{\nu} > 0$) и лежащие на листе $-3\pi < \arg q < -\pi$, $\operatorname{Im} \rho^{(e)} < 0$ (см. рис. 6а). Решениями уравнения (34) будут также значения $q = -q_{\nu}^*$, лежащие на листе $-\pi < \arg q < \pi$, $\operatorname{Im} \rho^{(e)} < 0$ и отвечающие модам с отрицательной радиальной компонентой вектора Пойнтинга (собственные волны в этом случае отсутствуют). Далее мы будем рассматривать только корни $q = q_{\nu}$.

Если в выражении (45) контур интегрирования деформировать так, чтобы он прошел в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} q > 0$) по лис-



а)



б)

Р и с. 5

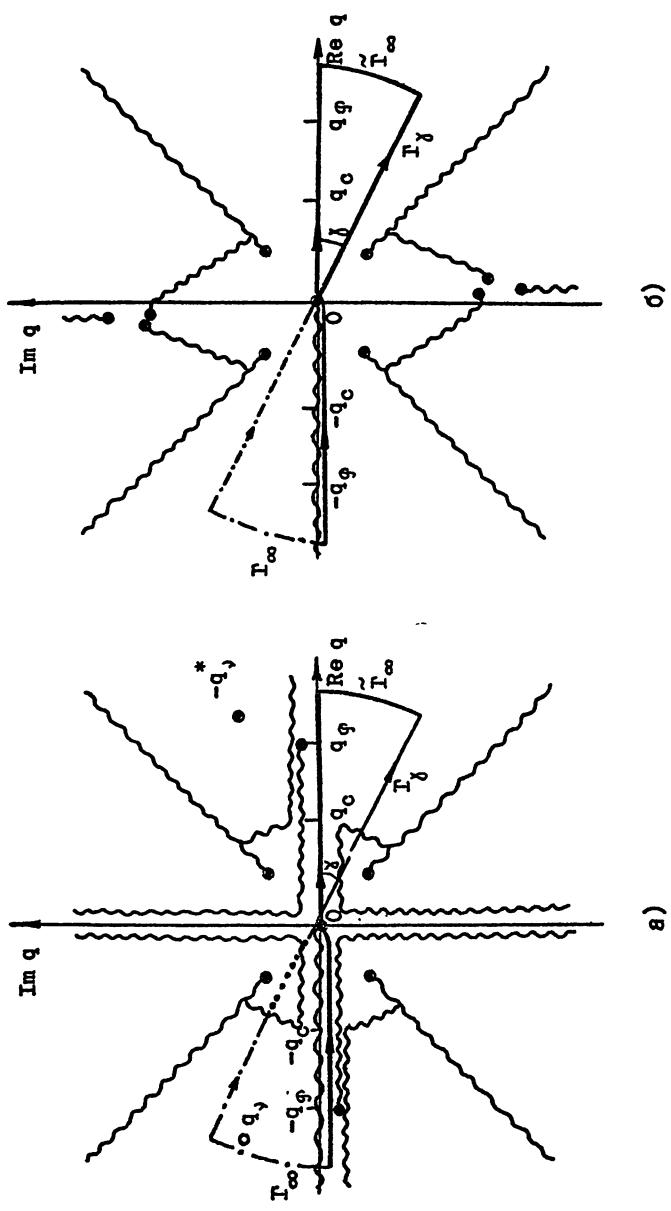


Рис. 6

ту $-3\pi < \arg q < -\pi$, $\text{Im } \rho^{(e)} < 0$ над некоторым полюсом $q = q_j$, то из-под знака интеграла, отвечающего функции $\rho = \rho^{(e)}(q)$, выделится вычет, соответствующий этому полюсу и описывающий поле не-собственной моды с комплексной постоянной распространения $\rho_j = \rho^{(e)}(q_j)$ и коэффициентом возбуждения

$$a_j = \frac{J^{(e)}(q_j)}{N_j}, \quad (47)$$

где

$$N_j = \frac{1}{2\pi i} \left. \frac{dN^{(e)}}{dq} \right|_{q = q_j}.$$

Для того, чтобы выделить все несобственные моды, деформируем контур интегрирования Γ так, чтобы он прошел под углом χ к действительной оси (путь Γ_χ , рис.6а, б). Заметим, что на рис.6а, б штрихпунктирная линия обозначает часть контура Γ_χ , проходящего по листу $-3\pi < \arg q < -\pi$, $\text{Im } \rho^{(e)} < 0$; пунктирная линия на рис.6а отвечает части контура Γ_χ , лежащей на листе $-3\pi < \arg q < -\pi$, $\text{Im } \rho^{(e)} > 0$, а штриховая линия - части Γ_χ , лежащей на листе $-\pi < \arg q < \pi$, $\text{Im } \rho^{(e)} > 0$. Предполагается, что угол χ удовлетворяет условиям (26) и $\chi < \pi/4$. В областях пространства (27), (29) интеграл по бесконечно удаленной дуге Γ_∞ , отвечающий в разложении (45) "необыкновенной" волне, равен нулю. Аналогичное утверждение справедливо при условиях

$$b < a,$$

$$|z| > d(p < a), \quad |z| > d + (p-a)\text{tg } \chi \quad (p > a), \quad (48)$$

$$b > a,$$

$$|z| > d + (b-a)\text{tg } \chi \quad (p < b), \quad |z| > d + (p-a)\text{tg } \chi \quad (p > b)$$

и для интеграла, отвечающего в разложении (45) "обыкновенной" волне. Очевидно, что неравенства (27), (29) являются более жесткими, чем соответствующие условия (48), так как $|\eta|^{1/2} \bar{\epsilon}^{-1/2} \gg 1$, $\text{tg } \chi < 1$. Что касается бесконечно удаленной дуги Γ_∞ , то она не дает вклада

в интегралы (45), поскольку на ней выполняется соотношение $\text{Im } q < 0$.

В результате перехода к новому контуру интегрирования выражения для поля принимают вид, аналогичный формулам (30), с той лишь разницей, что интегрирование теперь проводится по контуру Γ_{γ} , а под знаком суммы стоят поля несобственных мод. С учетом соотношений (37), справедливых и в случае комплексных значений q ($-\pi < \arg q < \pi$), выражения для поля могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}(\rho, z) = & \sum_{\nu} a_{\pm\nu} \vec{E}_{\pm\nu} + \int_{\Gamma_{\gamma}^{(+)}} a_{\pm}^{(+)}(q) \vec{E}_{\pm}^{(+)}(\rho, q) e^{\mp i k_0 \rho^{(+)}(q) z} dq + \\ & + \int_{\Gamma_{\gamma}^{(-)}} a_{\pm}^{(-)}(q) \vec{E}_{\pm}^{(-)}(\rho, q) e^{\mp i k_0 \rho^{(-)}(q) z} dq, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\rho, z) = & \sum_{\nu} a_{\pm\nu} \vec{H}_{\pm\nu} + \int_{\Gamma_{\gamma}^{(+)}} a_{\pm}^{(+)}(q) \vec{H}_{\pm}^{(+)}(\rho, q) e^{\mp i k_0 \rho^{(+)}(q) z} dq + \\ & + \int_{\Gamma_{\gamma}^{(-)}} a_{\pm}^{(-)}(q) \vec{H}_{\pm}^{(-)}(\rho, q) e^{\mp i k_0 \rho^{(-)}(q) z} dq, \end{aligned}$$

где в качестве контура интегрирования используется часть контура Γ_{γ} , лежащая в четвертом квадранте ($\text{Re } q > 0, \text{Im } q < 0$) комплексной плоскости q . Поля волн непрерывного спектра, стоящие в разложении (49) под знаками интегралов, по-прежнему, выражаются через систему собственных функций (33).

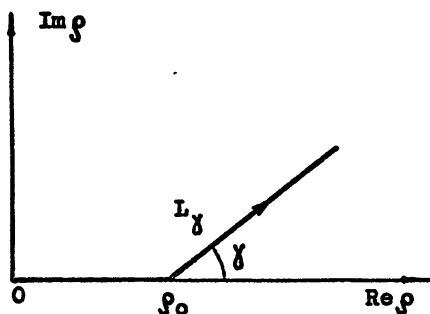
Можно утверждать, что и в общем случае произвольного ограниченного в пространстве распределения электрических и магнитных токов коэффициенты $a_{\pm\nu}$, $a_{\pm}^{(\alpha)}(q)$ разложения (49) так же, как и для изотропной открытой направляющей системы /20/, могут быть вычислены методом, опирающимся на лемму Лоренца. Очевидно, что поля, входящие в разложение (49), не удовлетворяют соотношениям ортогональности (42), однако для них имеют место свои соотношения ортогональности вида

$$\tilde{J}_{\nu, \mu} = 2\pi \int_{L_{\gamma}} \left\{ [\vec{E}_{\nu}, \vec{H}_{\mu}^{(\tau)}] - [\vec{E}_{\mu}^{(\tau)}, \vec{H}_{\nu}] \right\} \vec{z}_0 \rho d\rho = \frac{4\pi}{c} N_{\nu} \delta_{\nu, -\mu},$$

$$\tilde{J}_{\pm, \mu}^{(\alpha)} = 2\pi \int_{L_{\gamma}} \left\{ [\vec{E}_{\pm, \alpha}^{(\tau)}, \vec{H}_{\mu}^{(\tau)}] - [\vec{E}_{\mu}^{(\tau)}, \vec{H}_{\pm, \alpha}] \right\} \vec{z}_0 \rho d\rho = 0, \quad (50)$$

$$\tilde{J}_{\pm, \mp}^{(\alpha, \tilde{\alpha})} = 2\pi \int_{L_{\gamma}} \left\{ [\vec{E}_{\pm, \alpha}(\rho, z, q), \vec{H}_{\mp, \tilde{\alpha}}^{(\tau)}(\rho, z, \tilde{q})] - [\vec{E}_{\mp, \tilde{\alpha}}^{(\tau)}(\rho, z, \tilde{q}), \vec{H}_{\pm, \alpha}(\rho, z, q)] \right\} \vec{z}_0 \rho d\rho = \pm \frac{4\pi}{c} N^{(\alpha)}(q) \delta(q - \tilde{q}) \delta_{\alpha, \tilde{\alpha}}.$$

Здесь контур интегрирования L_{γ} проходит в комплексной плоскости и ρ так, как показано на рис.7; при этом величина ρ_0 (см.рис.7) определяется условием $\rho_0 = \max(a, b)$. Значения q, \tilde{q} в (50) принадлежат контуру $\Gamma_{\gamma}^{(+)}$, величина N_{ν} имеет смысл нормы ν -ой несобственной моды, остальные обозначения те же, что и в (42), (43). Доказательство соотношений (50) проводится аналогично доказательству выражений (42), если учесть, что при стремлении величин ρ по контуру



Р и с. 7

L_{γ} в бесконечность компоненты полей несобственных мод, стоящих в разложении (49) под знаком суммы, обращаются в нуль, а компоненты полей непрерывного спектра, волновые числа q , которых лежат на прямой $\text{Im } q = -\text{tg } \gamma \text{Re } q$, являются колеблющимися функциями и

с ограниченной вариацией (поскольку $\text{Im}(q, \rho) = 0$, $\text{Im}(q, \alpha \rho) < 0$ для $q \in \Gamma_{\chi}^{(\alpha)}$, $\rho \in L_{\chi}$, $\rho \rightarrow \infty$ — сравнить с /20/). Вычисление коэффициентов α_{\pm} , $\alpha_{\pm}^{(\alpha)}(q)$ в разложении (49), во многом аналогичное случаю открытого изотропного волновода /20/, дает выражения, формально совпадающие с (44); следует лишь в качестве пути интегрирования по ρ использовать контур L_{χ} .

Таким образом, сопоставление двух рассмотренных разложений поля (по поперечному волновому числу и продольному волновому числу) подтверждает, что оба они, действительно, дают одинаковые результаты. Причем одно представление может быть получено из другого путем деформации контура интегрирования и замены переменной под знаком интеграла. Каждое из этих двух представлений, как уже отмечалось, в определенных условиях может обладать некоторыми методическими преимуществами. Применительно к вычислению коэффициентов возбуждения направляемых столбом мод разложение по поперечному волновому числу (30) является более удобным, так как оно основывается на разложении поля, возбуждаемого источником, по системе собственных функций (33). В случае же разложения (6) функции $E(\rho, \rho)$, $H(\rho, \rho)$ для каждого конкретного источника приходится вычислять заново. В то же время в частотном интервале (20) разложение по продольному волновому числу оказывается более удобным применительно к анализу полей излучения источников. К обсуждению этих вопросов мы и переходим.

5. ИЗЛУЧАЕМАЯ МОЩНОСТЬ И ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Начнем с вычисления поля излучения кольцевых токов (2) и (3) при $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty$. Для этого рассмотрим выражения (25) в области пространства $\rho > \rho_0$. Поскольку в свистовом диапазоне частот в фоновой плазме распространяющейся является только "необыкновенная" волна, вклад в поле излучения вносит лишь интеграл по контуру Γ_e . Выполнив в этом интеграле переход от интегрирования по ρ к интегрированию по q в соответствии с процедурой, описанной в предыдущем разделе, получим следующие выражения для компонент волнового поля, возбуждаемого кольцевым электрическим (магнитным) током в окружающей плазменной среде

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_m(\vec{r}) = & \frac{\kappa_0}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}_m(z) f_m^{(1)}(q) C^{(1)}(q) H_n^{(2)}(\kappa_0 q, \rho) \times \\
& \times \frac{d\rho^{(e)}}{dq} e^{-i\kappa_0 \rho^{(e)} |z|} dq + \frac{\kappa_0}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}_m(z) f_m^{(2)}(q) C^{(2)}(q) \times \\
& \times H_n^{(2)}(\kappa_0 q, a \rho) \frac{d\rho^{(e)}}{dq} e^{-i\kappa_0 \rho^{(e)} |z|} dq,
\end{aligned} \tag{5I}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_m = & (E_p, E_\varphi, E_z, H_p, H_\varphi, H_z), \quad n=0 \quad (m=3, 6), \\
n = & I \quad (m=1, 2, 4, 5),
\end{aligned}$$

$$f_1^{(j)} = -\frac{\rho^{(e)} n^{(j)} + q}{\varepsilon}, \quad f_2^{(j)} = i, \quad f_3^{(j)} = \frac{i}{\kappa_0 a \eta} n^{(j)} Q^{(j)},$$

$$f_4^{(j)} = -i\rho^{(e)}, \quad f_5^{(j)} = -n^{(j)}, \quad f_6^{(j)} = -\frac{1}{\kappa_0 a} Q^{(j)}, \quad j=1, 2, \tag{52}$$

$$Q^{(1)} = Q_0, \quad Q^{(2)} = Q_a, \quad n^{(1,2)} = n_{0,a} \Big|_{\rho = \rho^{(e)}},$$

$$C^{(j)} = \tilde{C}_k + (\tilde{C}_j - \tilde{C}_k) [U(q+q_c) - U(q-q_c)], \quad k=1, 2, \quad k \neq j.$$

Величины $\tilde{C}_{1,2}$ здесь описываются выражениями (I4), (I5) для $C_{1,2}$, если в последних сделать замены $n_{1,2} \rightarrow n^{(1,2)}(q)$, $S_{1,2} \rightarrow iQ^{(1,2)}(q)$ при $-q_c \leq q \leq q_c$, $n_{1,2} \rightarrow n^{(2,1)}(q)$, $S_{1,2} \rightarrow iQ^{(2,1)}(q)$ при $q < -q_c$ и $q > q_c$ (см. (I3)), а также $\rho \rightarrow \rho^{(e)}(q)$. Кроме того, в (5I) ис-

пользуются обозначения $\Theta_m(z) = \bar{1}$ ($m = 1, 2, 6$), $\Theta_m(z) = \text{sign } z$ ($m = 3, 4, 5$) в случае кольцевого электрического тока (2) и $\Theta_m(z) = \bar{1}$ ($m = 3, 4, 5$), $\Theta_m(z) = \text{sign } z$ ($m = 1, 2, 6$) в случае кольцевого магнитного тока (3); остальные обозначения — те же, что и в (33). Заметим, что в пределе $\tilde{N} \rightarrow N$ формулы (51), (52) переходят, естественно, в соответствующие формулы, отвечающие однородной магнитоактивной плазме [14, 22].

Далее ограничимся случаем среды без потерь. Обозначим слагаемые, стоящие в выражении (51), как $F_m^{(1)}$ и $F_m^{(2)}$. Вычисляя интегралы (51) методом перевала (при $r \rightarrow \infty$), приходим к следующим выражениям

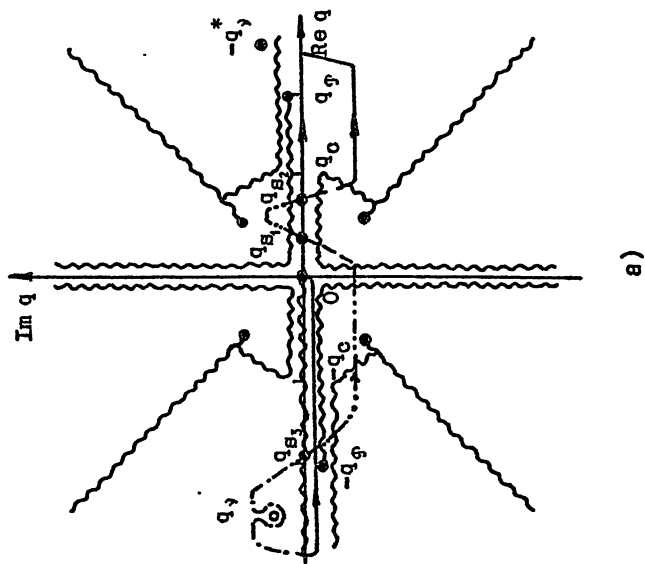
$$F_m^{(1)} = \sum_{s_i} \frac{\Theta_m f_m^{(1)}(q_{s_i}) C^{(1)}(q_{s_i}) \rho^{(e)'}(q_{s_i})}{2r [i q_{s_i} \rho^{(e)''}(q_{s_i}) \sin \vartheta \cos \vartheta]^{1/2}} \times \exp \left[-i k_0 q_{s_i} \rho - i k_0 \rho^{(e)}(q_{s_i}) |z| + i \frac{\pi}{4} (2n+1) \right], \quad (53)$$

$$F_m^{(2)} = - \frac{\Theta_m f_m^{(2)}(\tilde{q}_{s_1}) C^{(2)}(\tilde{q}_{s_1}) \rho^{(e)'}(q_{as})}{2r [i q_{as} \rho^{(e)''}(q_{as}) \sin \vartheta \cos \vartheta]^{1/2}} \times$$

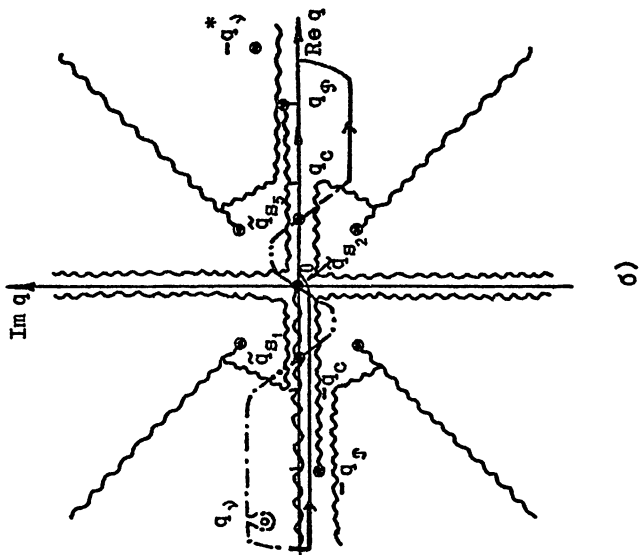
$$\times \exp \left[-i k_0 q_{as} \rho - i k_0 \rho^{(e)}(q_{as}) |z| + i \frac{\pi}{4} (2n+1) \right] +$$

$$+ \frac{\Theta_m f_m^{(2)}(\tilde{q}_{s_3}) C^{(2)}(\tilde{q}_{s_3}) \rho^{(e)'}(q_{as})}{2r [i q_{as} \rho^{(e)''}(q_{as}) \sin \vartheta \cos \vartheta]^{1/2}} \times$$

$$\times \exp \left[-i k_0 q_{as} \rho - i k_0 \rho^{(e)}(q_{as}) |z| + i \frac{\pi}{4} (2n+1) \right], \quad (54)$$



a)



b)

в которых суммирование производится по значениям $q_{\gamma s_i}, \tilde{q}_{\gamma s_i}$, удовлетворяющим уравнениям

$$\frac{dp^{(e)}}{dq} + \operatorname{tg} \vartheta = 0 \quad (55)$$

и

$$\frac{dp^{(e)}}{dq} + \frac{dq_a^{(e)}}{dq} \operatorname{tg} \vartheta = 0 \quad (56)$$

соответственно ($q_{as} = q_a^{(e)}(\tilde{q}_{s_{1,3}})$, $\tilde{q}_{s_1} = -\tilde{q}_{s_3}$, ρ, ϑ, φ - сферические координаты). Расположение седловых точек q_{s_i} и \tilde{q}_{s_i} показано на рис.8а, б. Там же изображены соответствующие контуры интегрирования, деформированные так, чтобы в окрестности седловых точек они проходили по путям наиболее быстрого спуска, а на остальных участках - в долинах ниже уровня седловых точек. На рис.8 штриховые линии с двойным пунктиром идут по листу $-\pi < \arg q < \pi$, $\operatorname{Im} \rho^{(e)} < 0$, $\operatorname{Im} q_a^{(e)} > 0$, а штриховые линии с тройным пунктиром - по листу $-\pi < \arg q < \pi$, $\operatorname{Im} \rho^{(e)} > 0$, $\operatorname{Im} q_a^{(e)} > 0$; обозначения остальных линий отвечают условию $\operatorname{Im} q_a^{(e)} < 0$ и тем же ветвям функций $\rho^{(e)}(q)$, $H_n^{(2)}(K_0 q, \rho)$, что и на рис.6а. При получении выражения (54) учтено, что в первом приближении метода перевала седловая точка $\tilde{q}_{s_2} = 0$ не дает вклада в значение интеграла $F_m^{(2)}$. Следует также отметить, что асимптотические выражения (53), (54) несправедливы в областях пространства $0 < \vartheta < \arcsin(\rho_0/r)$, $\pi - \arcsin(\rho_0/r) < \vartheta < \pi$.

Как видно из рис.8, для канала с повышенной плотностью плазмы в интервалах углов $0 < \vartheta < \vartheta_y^{(r)}$, $\pi - \vartheta_y^{(r)} < \vartheta < \pi$ при переходе к перевальному пути интегрирования можно выделить вычет, отвечающий γ -ой несобственной моде (здесь $\vartheta_y^{(r)} = -\arctg[\rho^{(e)}(q_y^{(r)})]$, где $q_y^{(r)}$ - точка пересечения перевального пути, проходящего через полюс $q = q_y$ с действительной осью q). Однако вклад в поле излучения в указанных интервалах углов эта волна не дает в силу экспоненциального спадания ее поля на бесконечности ($r \rightarrow \infty$). Заметим, что угол ϑ_y между направлением групповой скорости γ -ой вытекающей волны и осью Oz удовлетворяет соотношению $\vartheta_y^{(r)} < \vartheta_y < \vartheta_r$, где ϑ_r - угол, отвечающий плазменному резонансу ($\vartheta_r = \pi/2 - \gamma_r$,

$$\chi_r = \arctg(1\eta |^{1/2} / \varepsilon^{1/2})).$$

Проанализируем более подробно решения уравнений (55), (56) и отвечающие им выражения (53), (54). Согласно уравнению (55), в интервалах углов $0 < \vartheta < \vartheta_r$ и $\pi - \vartheta_r < \vartheta < \pi$ каждому выбранному направлению (ϑ, φ) отвечают три седловые точки $q_{s_1}, q_{s_2}, q_{s_3}$, а в интервалах углов $\vartheta_r < \vartheta < \vartheta_s$ и $\pi - \vartheta_s < \vartheta < \pi - \vartheta_r$ ($\vartheta_s = -\arctg \rho^{(e)'}(q_s)$) — две седловые точки q_{s_1}, q_{s_2} . Отметим, что при $0 < \vartheta < \vartheta_\varphi$, $\pi - \vartheta_\varphi < \vartheta < \pi$ ($\vartheta_\varphi = -\arctg \rho^{(e)'}(q_\varphi)$) переплывающий путь дважды пересекает разрез $\text{Im } q_a^{(e)} = 0$, так что точка ветвления функции $q_a^{(e)}(q)$ в этом случае не дает вклада в значение интеграла $F_m^{(1)}$. При $\vartheta_\varphi < \vartheta < \vartheta_s$, $\pi - \vartheta_s < \vartheta < \pi - \vartheta_\varphi$ к выражению (53) следует добавить интеграл по берегам разреза $\text{Im } q_a^{(e)} = 0$, находящегося в третьем квадранте комплексной плоскости q (рис.8а). Мы не приводим здесь соответствующее выражение, поскольку при $r \rightarrow \infty$ вклад от него в значение интеграла $F_m^{(1)}$ убывает быстрее, чем вклад от седловых точек q_{s_i} . Что же касается интеграла $F_m^{(2)}$ и отвечающего ему уравнения (56), то седловые точки $\tilde{q}_{s_1}, \tilde{q}_{s_3}$, дающие ненулевой вклад в поле излучения, существуют лишь для направлений $0 < \vartheta < \vartheta_\varphi$, $\pi - \vartheta_\varphi < \vartheta < \pi$. При этом выполняются соотношения $q_{as} = q_{s_3}$, $q_a^{(e)}(q_{s_3}) = \tilde{q}_{s_1} = -\tilde{q}_{s_3}$. Учитывая данные соотношения, нетрудно убедиться, что сумма первого слагаемого ($\tilde{q}_{s_i} = \tilde{q}_{s_1}$) из выражения (54) и последнего слагаемого ($q_{s_i} = q_{s_3}$) из выражения (53) в указанной области углов ϑ обращается в нуль. При использовании разложения по продольному волновому числу этот факт допускает наглядную интерпретацию: как видно из рис.3а при стремлении поглощения в среде к нулю значения интеграла, отвечающего в (25) контуру Γ_θ , по нижнему берегу разреза $\text{Im } q_1 = 0$ и верхнему берегу разреза $\text{Im } q_2 = 0$ на участке $\varphi_c < \rho < \varphi$ действительно взаимно компенсируются.

В результате выражение для поля излучения принимает вид

$$F_m = \sum_{s_i} \frac{\sigma_m W_m(q_{s_i}) \rho^{(e)'}(q_{s_i})}{2r [i q_{s_i} \rho^{(e)'}(q_{s_i}) \sin \vartheta \cos \vartheta]^{1/2}} \times \\ \times \exp \left[-i k_0 q_{s_i} \rho - i k_0 \rho^{(e)}(q_{s_i}) |z| + i \frac{\pi}{4} (2n+1) \right], \quad (57)$$

где $W_m(q) = W_m^{(+)}(q)$ при $0 < q < q_c$, $W_m(q) = W_m^{(-)}(q)$ при $-\infty < q < -q_c$, $q = e^{-i\pi} |q|$. Функции $W^{(\pm)}(q)$ в указанных в них интервалах определяются следующими соотношениями: $W_m^{(+)}(q) = f_m^{(1)}(q) c^{(1)}(q)$; $W_m^{(-)}(q) = f_m^{(2)}(q_{ad}) c^{(2)}(q_{ad})$, $q_{ad} = -q_a^{(e)}(q)$, если $-q_a^{(e)} < q < -q_c$ (при этом $0 < q_{ad} < q_c$, $-q_a^{(e)} < q_a^{(e)}(q_{ad}) < -q_c$), и $W_m^{(-)}(q) = f_m^{(1)}(q) c^{(1)}(q)$, если $-\infty < q < -q_a^{(e)}$. В дальнейшем нам потребуются ввести функцию $W_m^{(+)}(q)$ также на интервале $q_c < q < \infty$. Выражения для $W_m^{(+)}(q)$ на этом интервале могут быть получены из соответствующих выражений для $W_m^{(-)}(q)$ ($-\infty < q < -q_c$) путем замены аргумента $K_0 q \rho$ ($q < 0$) в функции Ханкеля $H_n^{(2)}(K_0 q \rho)$ на величину $K_0 e^{-i\pi} q \rho$ ($q > 0$). При этом следует учесть формулы (36), а также соотношения $H_n^{(2)}(K_0 q_a^{(e)} \rho) = (-1)^{n-1} H_n^{(1)}(-K_0 q_a^{(e)} \rho)$, $n = 1, 2$, $q = -q_a^{(e)}(q_{ad}(q))$ ($q_c < q < q_a^{(e)}$).

Перейдем к вычислению диаграммы направленности излучения, которую мы будем определять следующим образом:

$$D(\vartheta, \varphi) = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Omega} \left(\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Delta\Omega} S_r(r, \vartheta, \varphi) r^2 d\Omega \right). \quad (58)$$

Здесь S_r - радиальная составляющая вектора Пойнтинга \vec{S} , $d\Omega = \sin\vartheta r d\vartheta d\varphi$ - элемент телесного угла. Подставляя соотношения (57), в формулу (58), приходим к выражению для диаграммы направленности вида (сравнить с /14, 22/)

$$D(\vartheta, \varphi) \equiv D(\vartheta) = \frac{c}{32\pi} \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta} \sum_i P(n(\chi_i) \sin\chi_i) * \quad (59)$$

$$* \frac{n'(\chi_i) \sin\chi_i + n(\chi_i) \cos\chi_i}{n(\chi_i) \sin\chi_i} *$$

$$* \left| \frac{n^2(\chi_i) + n'^2(\chi_i)}{n^2(\chi_i) + 2n'(\chi_i) - n(\chi_i)n''(\chi_i)} \right| ,$$

где

$$P(q) = \operatorname{Re} \left[W_1^{(+)}(q) W_5^{(+)*}(q) - W_2^{(+)}(q) W_4^{(+)*}(q) \right],$$

$n = [q^2 + \rho^{(\epsilon)^2}(q)]^{1/2}$ -- показатель преломления "необыкновенен в о й" волны в однородной плазме с концентрацией $N_e = N$, $\gamma = \arctg(q / \rho^{(\epsilon)}(q))$ -- полярный угол в пространстве волновых векторов, символ "*" обозначает операцию комплексного сопряжения. Фун и ц и я $n(\gamma)$, согласно (31), имеет вид:

$$n(\gamma) = \left\{ (\epsilon \eta + q^2 - \epsilon^2) \sin^2 \gamma - 2\epsilon \eta + \right. \\ \left. + [(\epsilon \eta + q^2 - \epsilon^2)^2 \sin^4 \gamma + 4q^2 \eta^2 \cos^2 \gamma]^{1/2} \right\}^{1/2} \times \\ \times [2(|\eta| \cos^2 \gamma - \epsilon \sin^2 \gamma)]^{-1/2}. \quad (60)$$

Суммирование в (59) ведется по всем решениям $\chi_i = \chi_i(\vartheta)$ уравне - ния

$$\vartheta = \begin{cases} \gamma - \arctg(n'(\gamma)/n(\gamma)), & \gamma \in [0, \gamma_c], \quad i = 1, 2 \\ -\gamma + \arctg(n'(\gamma)/n(\gamma)), & \gamma \in [\gamma_c, \gamma_r], \quad i = 3 \end{cases}, \quad (61)$$

$$\gamma_c = \arctg \frac{q_c}{\rho^{(\epsilon)}(q_c)}$$

Формула (59) соответствует обычному геометрическому при - ближению, и в ней фактически суммируются (в силу энергетическ о й ортогональности) потоки энергии, переносимые вдоль отдельных ду - чей, соответствующих данному направлению (ϑ, φ) . Следует отме - тить, что выражения (57), естественно, не применимы вблизи нап -

равления $\mathcal{U} = \mathcal{U}_s$, отвечающего простой каустической поверхности;
 вблизи направления $\mathcal{U} = 0$, отвечающего осевой каустике /14, 22,
 23/, и в окрестности особого направления $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$, соответствующего боковой волне.
 Вблизи резонансного конуса ($\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_r = 0$) указанные выражения для поля также
 требуют соответствующего уточнения /23, С.50/. Однако поскольку при выполнении
 предельного перехода $r \rightarrow \infty$ угловая ширина областей нарушения геометрооптического
 приближения стремится к нулю, формула (59) в конечном счете корректно описывает
 диаграмму направленности вблизи особых направлений. В этом смысле наличие цилиндрической
 неоднородности не изменяет ситуацию сравнительно со случаем однородной среды /22/,
 что, впрочем, и следовало ожидать. По-прежнему, в окрестности простой каустики
 ($\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_s = 0$) диаграмма направленности имеет особенность
 $D(\mathcal{U}) \sim 0 ((\mathcal{U}_s - \mathcal{U})^{-1/2})$. Однако вблизи оси OZ ($\mathcal{U} \rightarrow 0$) особенность диаграммы отсутствует. Это объясняется тем,
 что источник при наличии столба ($N \neq N$), не возбуждает в фоновой плазме волн
 конической рефракции. Поэтому осевая каустика не формируется, и особенность в
 диаграмме при $\mathcal{U} \rightarrow 0$ пропадает: $D(\mathcal{U}) \sim 0(\mathcal{U})$. Для всех остальных направлений
 $\mathcal{U} < \mathcal{U}_s$ функция $D(\mathcal{U})$ остается конечной.

Анализ выражения (59) в особо интересующем нас здесь случае столба с
 повышенной плотностью плазмы показывает, что в окрестности резонансного конуса
 ($\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}_r = 0$) диаграмма направленности имеет резкие максимумы вблизи
 направлений $\mathcal{U} = \mathcal{U}_s$, отвечающих вытекающим модам. Действительно, как видно из
 (14)-(16), (52), (59), функция $P(q)$, входящая в формулу для диаграммы
 направленности, имеет полюсы в точках $q = q_s$, расположенных вблизи действительной
 оси q ($|\text{Im } q_s| \ll |\text{Re } q_s|$). Поэтому в окрестности направлений
 $\mathcal{U} = \mathcal{U}_s$, то есть при $q \approx |\text{Re } q_s|$, функция $P(q)$ быстро возрастает, что и
 приводит к появлению соответствующих максимумов в диаграмме направленности.
 Очевидно, что особенности $D(\mathcal{U})$ при $\mathcal{U} \approx \mathcal{U}_s$ связаны с присутствием в поле
 излучения несобственных мод. Каждая из этих мод имеет две пространственные
 составляющие, различным образом зависящие от радиальной координаты, — локализованную
 составляющую, отвечающую крупномасштабным вистлерам и описываемую (при $\rho > a$)
 функциями $H_n^{(2)}(k_0 q_a^{(e)} \rho)$, и не локализованную составляющую, отвечающую
 мелкомасштабным квазиэлектростатическим волнам и описываемую функциями
 $H_n^{(2)}(k_0 q \rho)$.

Несобственные моды вытекают из канала в виде квазиэлектростатических волн, что в конечном счете и вызывает формирование особенностей диаграммы направленности в окрестности резонансного направления.

Существенно, что все рассмотренные выше особенности диаграммы направленности — интегрируемые, поэтому мощность, излучаемая в любой конечный телесный угол, является конечной величиной. Интегрируя диаграмму направленности по полному телесному углу и учитывая соотношения $q = n(\chi) \sin \chi$ и

$$\left| \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} \right| = \left| \frac{n^2(\chi) + n'^2(\chi)}{n^2(\chi) + 2n'(\chi)n''(\chi)} \right| \quad (62)$$

(см./24/), получаем выражение для полной мощности излучения $P_{\Sigma}^{e,m}$ кольцевого электрического (магнитного) тока в следующем удобном для расчетов спектральном виде:

$$P_{\Sigma}^{e,m} = \int_0^{\infty} P_J^{e,m}(q) dq, \quad (63)$$

где

$$P_J^{e,m}(q) = \frac{c}{8} q^{-1} P(q) \left[P^{(e)'}(q) \right]^2 \Big|_{I_0^{m,e} = 0}. \quad (64)$$

Очевидно, что максимумы подынтегральных выражений (64) при $q = |R_e q_y|$, имеющиеся в случае столба с повышенной плотностью в плазме, оказывают существенное влияние на характер распределения излучаемой мощности по пространственному спектру. Для больших значений q ($q \rightarrow \infty$) выражения (64) (при упрощающих условиях $\omega \gg \omega_{Ln}$, $b < a$) принимают вид

$$P_J^e(q) \approx \frac{|I_0^e|^2}{c} 2\pi^2 |q| (\kappa_0 b)^2 q^{-2} J_1^2(\kappa_0 q b) V(q),$$

$$P_I^m(q) \approx \frac{|I_0^m|^2}{c} 2\pi^2 |q| (\kappa_0 b)^2 J_1^2(\kappa_0 q b) V(q) \frac{\sin^2(\kappa_0 q d \sqrt{\epsilon/|\eta_1|})}{(\kappa_0 q d)^2 \epsilon/|\eta_1|}, \quad (65)$$

где

$$V(q) = \frac{2}{\pi \kappa_0 q a} \left[J_1^2(\kappa_0 q a) + \frac{\eta_0^2}{\eta_1^2} J_0^2(\kappa_0 q a) \right]^{-1}$$

Как видно из (65), при $d \rightarrow 0$ полная мощность излучения P_Σ^m кольцевого магнитного тока (3) логарифмически расходится, в то время как полная мощность излучения P_Σ^a кольцевого электрического тока (2) остается конечной величиной (сравнить с /14/).

В случае столба с пониженной плотностью плазмы, допускающем существование собственных мод, для вычисления полной мощности излучения к величине (63) следует добавить мощность излучения в соответствующие моды. Отметим, что при отсутствии потерь в среде для собственных мод с действительной постоянной распространения имеет место ортогональность в энергетическом смысле (см. Приложение 2). Это позволяет рассчитывать мощность, идущую в данные моды, суммированием потоков энергии, переносимых отдельными модами.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Выражения (44), (63), (64) весьма удобны для вычисления полной мощности излучения заданных источников, а также парциальных мощностей, уходящих в моды, направляемые каналом. Приведем некоторые результаты численных расчетов, демонстрирующие влияние плазменного столба на излучение кольцевых токов (2) и (3) в диапазоне частот (20).

Начнем со случая волновода с повышенной плотностью, допускающего канализование только несобственных (вытекающих) мод. Поскольку для несобственных мод ортогональность в энергетическом смысле отсутствует, полная мощность, идущая в данные моды, не может быть рассчитана, строго говоря, путем сложения потоков энер-

гии, отвечающих отдельным модам. Нетрудно, однако, показать, что для мод слабовытекающих ($\rho''_j \ll \rho'_j$) такая ортогональность выполняется приближенно с хорошей степенью точности. Поэтому соответствующее суммирование вполне приемлемо. Напомним, что потоки энергии, переносимый вытекающей модой берется через поперечное сечение $z = \text{const}$, удовлетворяющее условиям $\rho_0 |\eta|^{1/2} / \varepsilon^{1/2} \ll |z| \ll (K_0 \rho''_j)^{-1}$, в следующем интервале значений ρ : $0 \leq \rho \leq \rho^{(r)}$, где $\rho^{(r)} = |z| \min \text{tg } \theta_j^{(r)}$.

Может быть использован и другой способ для приближенного вычисления мощности, уходящей в несобственные моды. Согласно ему, выражения (64) следует проинтегрировать по малым окрестностям Δq_j точек $q = |\text{Re } q_j|$, соответствующих резонансам функции $R_T^{e,m}(q)$. Поскольку в случае $\rho''_j \ll \rho'_j$ резонансы оказываются весьма "острыми", результат интегрирования при увеличении интервалов Δq_j , начиная с некоторого значения $\Delta q_{j \max}$ ($\Delta q_{j \max} \ll |q_{j+1} - q_j|$) фактически перестает зависеть от конкретных значений Δq_j . Любопытно отметить, что численные расчеты, выполненные в соответствии с описанными выше способами, дают, по существу, совпадающие (с точностью до нескольких процентов) результаты.

Влияние повышенной плотности плазмы \tilde{N} в столбе на излучение кольцевых токов (2) и (3) при заданных значениях $\omega = 1,88 \times 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_p = 8,78 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ ($N_0 = 0,5 \text{ Э}$), $\omega_D = 5,64 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ ($N = 10^6 \text{ см}^{-3}$), отвечающих условиям земной ионосферы, и $a = 5 \text{ м}$, $b = 2,5 \text{ м}$, $d = 0,01 \text{ м}$ иллюстрирует следующая таблица.

Т а б л и ц а

\tilde{N} , см^{-3}	m_w	R_w^e , Ом	R_Σ^e , Ом	R_w^m , Ом $^{-1}$	R_Σ^m , Ом $^{-1}$
$3 \cdot 10^7$	10	$7,31 \cdot 10^{-2}$	$7,98 \cdot 10^{-2}$	$1,42 \cdot 10^{-19}$	$3,66 \cdot 10^{-19}$
$5 \cdot 10^7$	13	$1,09 \cdot 10^{-1}$	$1,19 \cdot 10^{-1}$	$1,56 \cdot 10^{-19}$	$6,08 \cdot 10^{-19}$
$8 \cdot 10^7$	17	$1,54 \cdot 10^{-1}$	$1,67 \cdot 10^{-1}$	$4,38 \cdot 10^{-19}$	$9,67 \cdot 10^{-19}$
10^8	19	$1,79 \cdot 10^{-1}$	$1,94 \cdot 10^{-1}$	$5,49 \cdot 10^{-19}$	$1,20 \cdot 10^{-18}$
$3 \cdot 10^8$	34	$3,30 \cdot 10^{-1}$	$3,40 \cdot 10^{-1}$	$2,10 \cdot 10^{-18}$	$3,47 \cdot 10^{-18}$

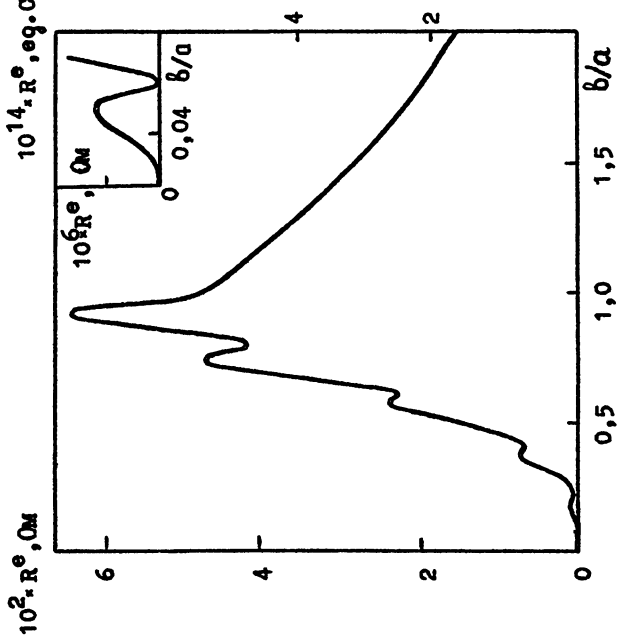
Здесь $R_\Sigma^{e,m} = 2R_w^{e,m} / |I_0^{e,m}|^2$ - полные сопротивления излучения соответствующих токов; $R_w^{e,m} = 2R_w^{e,m} / |I_0^{e,m}|^2$ - сопротивления излучения этих же источников в несобственные свистовые моды с постоянными распространения ρ'_j , лежащими в интервале

$\max_{\Sigma} (\Phi, \tilde{\Phi}_c) < \rho'_j < \tilde{\Phi}$ (m_w — количество соответствующих мод, $R_{\Sigma}^{e,m}$ — мощности, уносимые ими).

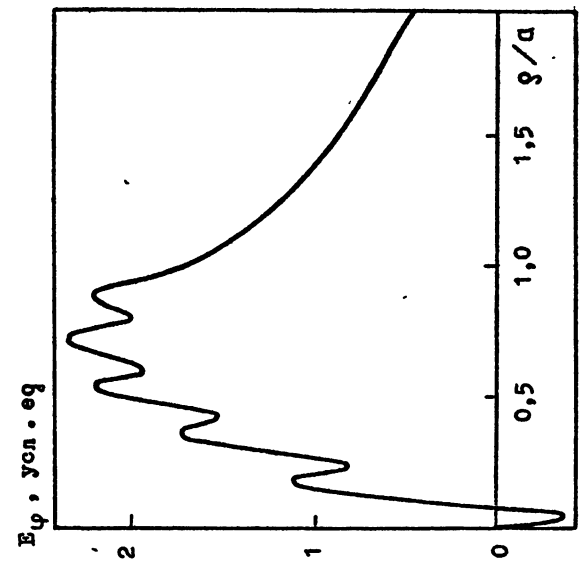
В однородной фоновой плазме ($N_e = N$) полные сопротивления излучения $R_{\text{фон}}^{e,m}$ рассматриваемых источников при выбранных значениях $\omega, \omega_H, \omega_p, b, d$ составляют $R_{\text{фон}}^e = 3,53 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}$, $R_{\text{фон}}^m = 1,23 \cdot 10^{20} \text{ Ом}$. Для сопоставления величин $R_w^e, R_{\Sigma}^e, R_{\text{фон}}^e$ и $R_w^m, R_{\Sigma}^m, R_{\text{фон}}^m$ удобно перейти к абсолютной системе единиц, в которой они имеют одинаковую размерность. Для этого значения $R_w^e, R_{\Sigma}^e, R_{\text{фон}}^e$, выраженные в единицах системы СИ, следует разделить на $9 \cdot 10^{11}$, а соответствующие значения $R_w^m, R_{\Sigma}^m, R_{\text{фон}}^m$ умножить на $9 \cdot 10^{11}$. Нетрудно убедиться, что сопротивления излучения, отвечающие кольцевому магнитному току, существенно превосходят свои электрические аналоги. Следует, однако, иметь в виду, что создание эффективного магнитного тока I_0^m сопряжено с гораздо большими трудностями и требует гораздо больших энергетических затрат, чем равному ему по величине электрического тока I_0^e .

При анализе данных, представленных в таблице, необходимо учитывать, что несобственные моды могут различаться как числом крупномасштабных вариаций поля по радиусу, так и числом мелко-масштабных осцилляций (см./13/). Например, при $\tilde{N} = 3 \cdot 10^7 \text{ см}^{-3}$ все несобственные моды, учтенные в величинах R_m^e и R_w^m , имеют одну крупномасштабную вариацию по радиальной координате, в то время как при $\tilde{N} = 3 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$ соответствующие моды имеют от одной до трех крупномасштабных вариаций. На рис.9, 10 изображены зависимости сопротивлений излучения R^e, R^m кольцевых токов (2) и (3) в основную несобственную моду от радиуса источника b , а также распределения по поперечной координате ρ азимутальных компонент электрического и магнитного поля этой моды при $\tilde{N} = 10^8 \text{ см}^{-3}$ и тех же значениях $\omega, \omega_H, \omega_p, a, d$, что и в таблице (комплексная постоянная распространения основной моды $\rho_j = 2,482 \cdot 10^2 - i 3,762 \cdot 10^{-4}$). Под основной мы так же, как и в /13/, понимаем здесь моду с одной крупномасштабной вариацией поля по радиусу и минимальной постоянной затухания ρ_j'' . Как видно из рис.10, зависимость $R^m(b)$ имеет ярко выраженный осциллирующий характер, что связано с заметным вкладом мелкомасштабной составляющей в азимутальную компоненту магнитного поля при $\tilde{N} \gg N$.

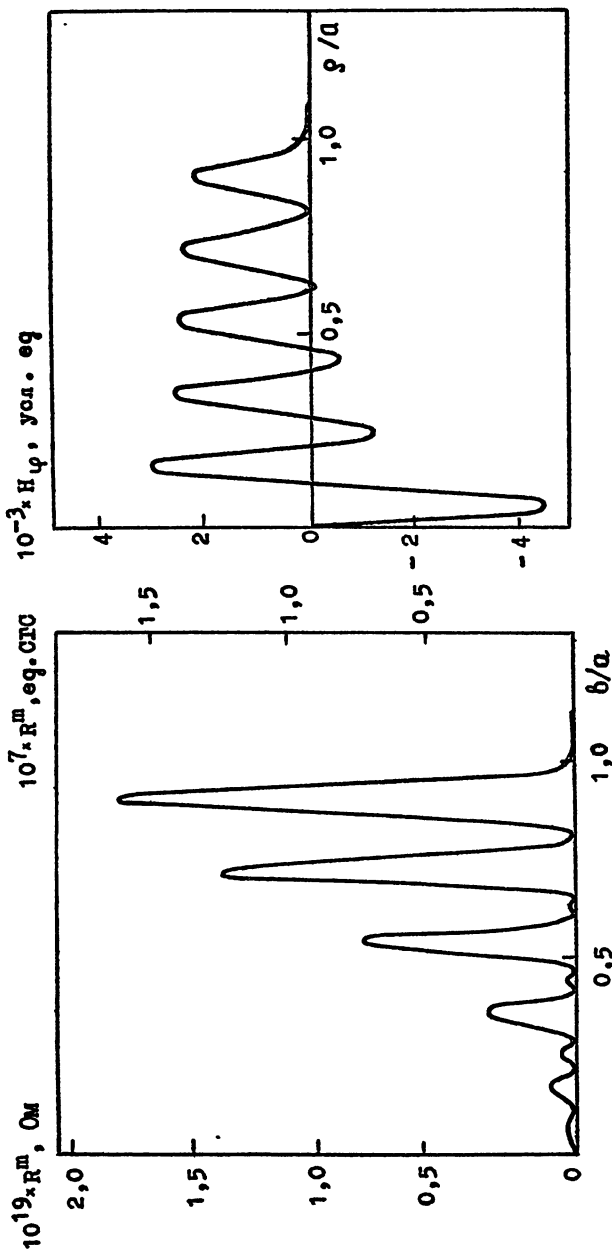
Согласно представленным данным, наличие канала с повышенной плотностью плазмы приводит к значительному увеличению сопротивле-



а)



б)



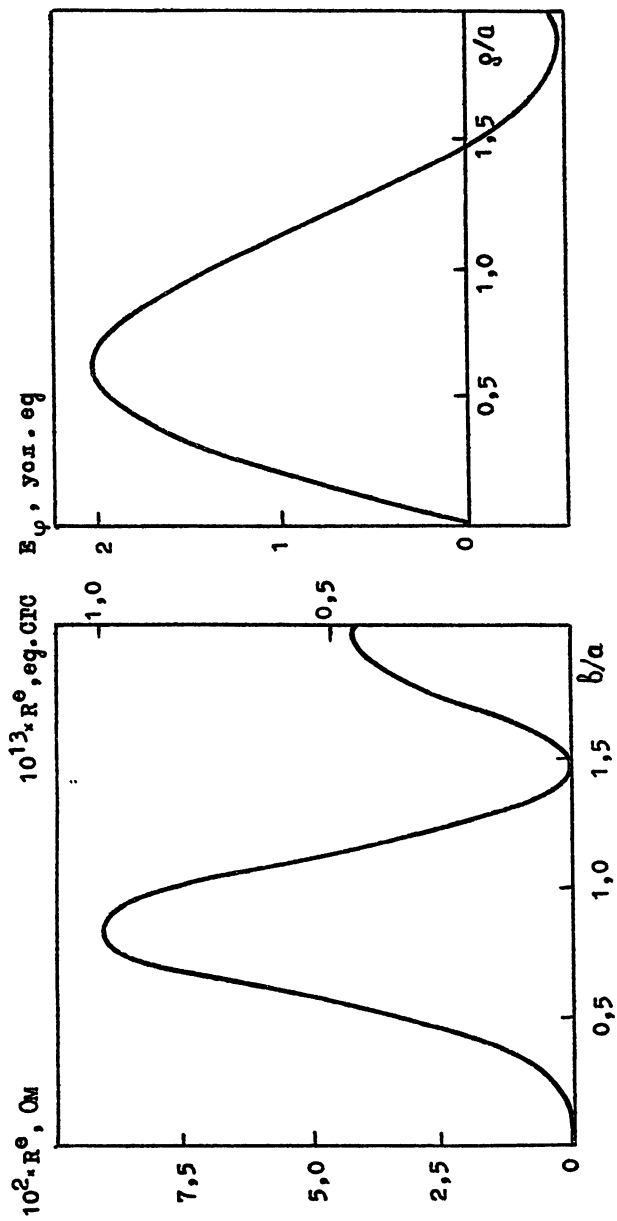
б)

а)

ния излучения заданных источников. При этом подавляющая часть мощности излучения кольцевого электрического тока и довольно значительная часть мощности излучения кольцевого магнитного тока идут в поддерживаемые столбом несобственные моды. Можно показать, что этот вывод остается справедливым и для канала с плавным законом изменения концентрации плазмы $N_e(\rho)$ в поперечном направлении.

Что касается распределения мощности излучения по пространственному спектру возбуждаемых в фоновой плазме волн, то наличие столба с повышенной плотностью усиливает роль квазиэлектростатических волн. Это связано с тем, что в случае бесконечного столба несобственные моды "высвечиваются" в конечном итоге именно в квазиэлектростатические волны окружающей плазменной среды. Аналогичная ситуация, очевидно, будет иметь место и для канала конечной длины $L_{||}$, если $L_{||} \gg (\kappa_o \rho'_o)^{-1}$. При $(\kappa_o \rho'_o)^{-1} \ll L_{||} \ll (\kappa_o \rho''_o)^{-1}$ распределение мощности излучения между слабовытекающими несобственными модами, поддерживаемыми каналом, и быстро вытекающими волнами, не удерживающимися в нем изначально, остается примерно таким же, как и для бесконечного столба, но окончательное распределение мощности по пространственному спектру может уже заметно измениться. Анализ характеристик излучений такой, по существу, плазменной антенны представляет несомненный интерес, однако выходит за рамки настоящей работы.

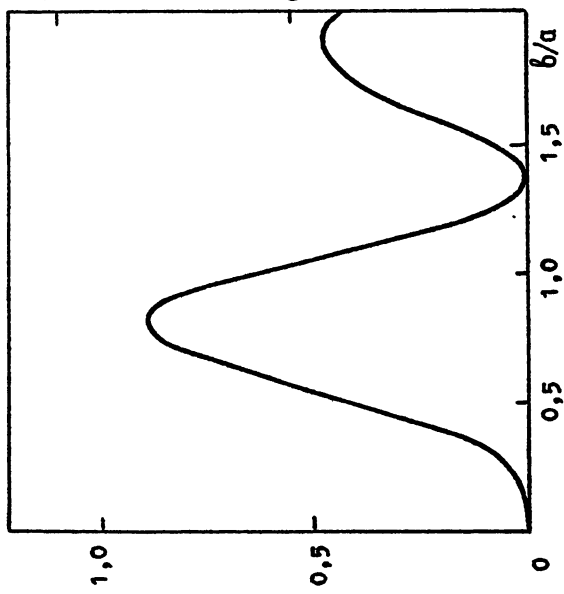
Наличие канала с пониженной концентрацией приводит, напротив, к снижению полной мощности излучения соответствующих заданных источников. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом случае, а ограничимся только конкретным примером слабопрореженного канала, отвечающего следующим значениям параметров: $\omega = 1,88 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$, $\omega_H = 8,78 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$, $\omega_D = 5,64 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ ($N = 10^6 \text{ см}^{-3}$), $\tilde{N} = 9 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$, $a = 15 \text{ м}$. При данных значениях параметров в столбе может существовать только основная собственная мода с постоянной распространения $\rho_n = 12,480$. Зависимости сопротивлений излучения $R_{\Sigma}^{e,m}$ кольцевого электрического тока и кольцевого магнитного тока ($d = 0,01 \text{ м}$) в эту моду от радиуса источника b , а также поперечные распределения азимутальных компонент поля моды представлены на рис. II, I2. В силу условия $N - \tilde{N} \ll N$ полные сопротивления излучения $R_{\Sigma}^{e,m}$ источников в рассматриваемом случае мало отличаются от соответствующих значений $R_{\text{фон}}^{e,m}$ (см./I4/), отвечающих однородной фоновой плазме. В оптимальном случае. мощ -



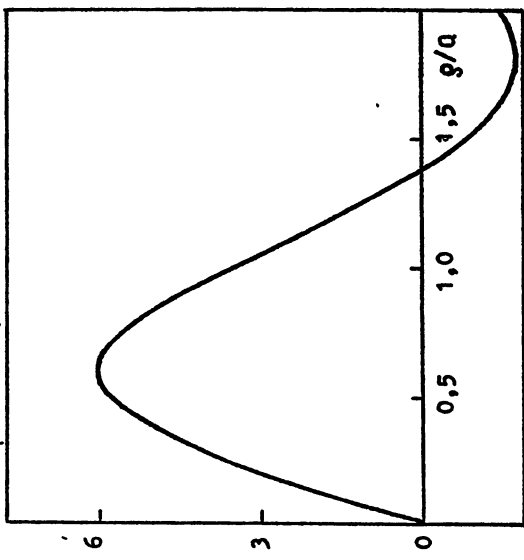
б)

а)

$10^{20} \times R^m, \text{ Ом}^{-1}$ $10^8 \times R^m, \text{ егГТС}$ $10^{-2} \times H_{cp}, \text{ ус.л. ег}$



а)



б)

ность, идущая в моды, направляемые каналом с пониженной плотностью, может быть близка (по крайней мере, для кольцевого электрического тока) к полной мощности излучения соответствующего источника.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя, можно утверждать следующее. Получено строгое решение задачи об излучении заданных электрических и магнитных токов в однородной магнитоактивной плазменной среде при наличии цилиндрического плазменного канала, ориентированного вдоль внешнего магнитного поля, обобщающее, по существу, решение соответствующей классической изотропной задачи. Проведен подробный математический анализ и дана физическая интерпретация построенного решения. Результаты представлены в виде, удобном для выполнения численных расчетов, что непосредственно продемонстрировано в работе. При этом значительное внимание сосредоточено на наиболее сложных (но в то же время интересных) случаях значений параметров, которым отвечает наличие особых каустических и резонансных направлений в средах. Теоретические выводы согласуются с результатами упоминавшихся во введении лабораторных и натуральных экспериментов. Даны конкретные оценки увеличения уровня излучаемой заданными источниками мощности при наличии цилиндрического образования с повышенной плотностью. Несомненно, что построенное решение послужит также необходимой основой для последующего рассмотрения более сложных (по форме и внутренней структуре) естественных и искусственных плазменных неоднородностей. В частности, применительно к проблеме самоподдерживающихся плазменных антенн это решение может являться отправной точкой для выбора конфигурации исходной антенной системы, а также для постановки нелинейной самосогласованной задачи.

Настоящая работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований.

I. Запишем уравнения для функций $\Psi_n(\rho)$, $\Phi_n(\rho)$ ($\rho > a$), отвечающие в среде с внешним магнитным полем $\vec{H}_0 = H_0 \vec{z}_0$ собственной волне с постоянной распространения ρ_n , и уравнения для функций $\Psi_m^{(\tau)}(\rho)$, $\Phi_m^{(\tau)}(\rho)$ ($\rho > a$), отвечающие в среде с обратным направлением внешнего магнитного поля ($-\vec{H}_0$) собственной волне с постоянной распространения ρ_m , в виде

$$\begin{aligned} \hat{L} \Psi_n &= -\kappa_0^2 \varepsilon^{-1} \left\{ [\varepsilon(\varepsilon - \rho_n^2) - g^2] \Psi_n + g \Phi_n \right\}, \\ \hat{L} \Phi_n &= -\kappa_0^2 \eta \varepsilon^{-1} \left[\rho_n^2 g \Psi_n + (\varepsilon - \rho_n^2) \Phi_n \right], \\ \hat{L} \Psi_m^{(\tau)} &= -\kappa_0^2 \varepsilon^{-1} \left\{ [\varepsilon(\varepsilon - \rho_m^2) - g^2] \Psi_m^{(\tau)} - g \Phi_m^{(\tau)} \right\}, \\ \hat{L} \Phi_m^{(\tau)} &= \kappa_0^2 \eta \varepsilon^{-1} \left[\rho_m^2 g \Psi_m^{(\tau)} - (\varepsilon - \rho_m^2) \Phi_m^{(\tau)} \right] \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Умножим правую и левую части этих уравнений соответственно на $\rho \Psi_m^{(\tau)}$, $\rho \Phi_m^{(\tau)}$, $-\rho \Psi_n$, $-\rho \Phi_n$, сложим их и проинтегрируем результат по ρ в пределах от $\rho = a$ до $\rho = \infty$. Аналогичные действия с последующим интегрированием по ρ в пределах от $\rho = 0$ до $\rho = a$ выполним для функций $\tilde{\Psi}_n$, $\tilde{\Phi}_n$, $\tilde{\Psi}_m^{(\tau)}$, $\tilde{\Phi}_m^{(\tau)}$, описывающих поля соответствующих мод при $\rho < a$. Тогда после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} J_{n,m}^{(0)} &= 2\pi \int_0^a \left[(\rho_n - \rho_m) \tilde{\Psi}_n \tilde{\Psi}_m^{(\tau)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_n} \right) \tilde{\Phi}_n \tilde{\Phi}_m^{(\tau)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{\varepsilon} \left(\frac{\tilde{\Psi}_m^{(\tau)} \tilde{\Phi}_n}{\rho_n} + \frac{\tilde{\Psi}_n \tilde{\Phi}_m^{(\tau)}}{\rho_m} \right) \right] \rho d\rho + 2\pi \int_a^\infty \left[(\rho_n - \rho_m) \Psi_n \Psi_m^{(\tau)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\rho_m} - \frac{1}{\rho_n} \right) \Phi_n \Phi_m^{(\tau)} - \frac{g}{\varepsilon} \left(\frac{\Psi_m^{(\tau)} \Phi_n}{\rho_n} + \frac{\Psi_n \Phi_m^{(\tau)}}{\rho_m} \right) \right] \rho d\rho = \end{aligned} \quad (\text{II})$$

$$= \frac{2\pi}{\kappa_0^2(\rho_n + \rho_m)} \left\{ \left[\tilde{\Psi}_m^{(\tau)} \frac{d}{d\rho} (\rho \tilde{\Psi}_n) - \tilde{\Psi}_n \frac{d}{d\rho} (\rho \tilde{\Psi}_m^{(\tau)}) + \frac{1}{\rho_n \rho_m \tilde{\eta}} \tilde{\Phi}_m^{(\tau)} \frac{d}{d\rho} (\rho \tilde{\Phi}_n) - \frac{1}{\rho_n \rho_m \tilde{\eta}} \tilde{\Phi}_n \frac{d}{d\rho} (\rho \tilde{\Phi}_m^{(\tau)}) \right] \Big|_0^a + \left[\Psi_m^{(\tau)} \frac{d}{d\rho} (\rho \Psi_n) - \Psi_n \frac{d}{d\rho} (\rho \Psi_m^{(\tau)}) + \frac{1}{\rho_n \rho_m \eta} \Phi_m^{(\tau)} \frac{d}{d\rho} (\rho \Phi_n) - \frac{1}{\rho_n \rho_m \eta} \Phi_n \frac{d}{d\rho} (\rho \Phi_m^{(\tau)}) \right] \Big|_a^\infty \right\}.$$

Нетрудно убедиться, что величины $J_{n,m}$ (см. (42)) и $J_{n,m}^{(0)}$ связаны между собой соотношением

$$J_{n,m} = J_{n,m}^{(0)} e^{-i\kappa_0(\rho_n + \rho_m)z}. \quad (ПЗ)$$

С учетом формул (7), (ПЗ), а также того факта, что при $\rho = 0$ и $\rho = \infty$ соответствующие выражения, стоящие в правой части (ПЗ), обращаются в нуль, имеем

$$J_{n,m} = i \frac{2\pi a}{\kappa_0(\rho_n + \rho_m)} \hat{D}_a (E_{\varphi m}^{(\tau)} H_{zn} + E_{zn} H_{\varphi m}^{(\tau)} - E_{\varphi n} H_{zm} - H_{\varphi n} E_{zm}^{(\tau)}) \times e^{-i\kappa_0(\rho_n + \rho_m)z}. \quad (П4)$$

Оператор \hat{D}_a означает здесь разность пределов слева и справа в точке $\rho = a$:

$$\hat{D}_a f = \lim_{\rho \rightarrow a-0} f - \lim_{\rho \rightarrow a+0} f.$$

Как видно из (П4), в случае $\rho_n \neq -\rho_m$, т.е. при $n \neq -m$, выполняется соотношение $J_{n,m} = 0$.

Аналогичным образом доказывается соотношение ортогональности и $J_{\pm, m}^{(0)} = 0$ (см. (42)). Отличие состоит в том, что в выражениях (ПЗ), (П4) вместо функций $\tilde{\Psi}_n$, $\tilde{\Phi}_n$, Ψ_n , Φ_n , отвечающих волнам дискретного спектра, следует взять функции $\tilde{\Psi}_{\pm}^{(0)}$, $\tilde{\Phi}_{\pm}^{(0)}$, $\Psi_{\pm}^{(0)}$, $\Phi_{\pm}^{(0)}$ (см.

(33)), отвечающие волнам непрерывного спектра, и учесть, что при действительных значениях q , выполняется условие $\rho_m \neq \rho^{(a)}(q)$.

2. Рассмотрим теперь выражение $J_{\pm, \mp}^{(\alpha, \tilde{\alpha})}$ из (42). Начнем со случая $\alpha = \tilde{\alpha}$. Выполним для функций (33) действия, аналогичные тем, что были проведены при выводе соотношения (12). С учетом условия $\text{Im } q^{(\alpha)} < 0$ и соответствующих асимптотических представлений и для функций Ханкеля $H_n^{(k)}(k_0 q \rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$ /Г7/ получим:

$$\begin{aligned}
 J_{\pm, \mp}^{(\alpha, \alpha)} = & \pm \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{4(\tilde{q} - q)}{k_0^2(q\tilde{q})^{1/2} [\rho^{(\alpha)}(q) - \rho^{(\alpha)}(\tilde{q})]} [1 + \eta^{-1} n_0(q) n_0(\tilde{q})] \times \\
 & * \left\{ (q + \tilde{q}) [C_1(q) C_2(\tilde{q}) + C_1(\tilde{q}) C_2(q)] \frac{\sin(q - \tilde{q}) k_0 \rho}{q - \tilde{q}} - \right. \quad (П5) \\
 & - i (q + \tilde{q}) [C_1(q) C_2(\tilde{q}) - C_1(\tilde{q}) C_2(q)] \frac{\cos(q - \tilde{q}) k_0 \rho}{q - \tilde{q}} + \\
 & + i [C_1(q) C_1(\tilde{q}) - C_2(q) C_2(\tilde{q})] \sin(q + \tilde{q}) k_0 \rho + \\
 & \left. + [C_1(q) C_1(\tilde{q}) + C_2(q) C_2(\tilde{q})] \cos(q + \tilde{q}) k_0 \rho \right\}.
 \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что первое слагаемое в фигурной скобке ведет себя, как δ -функция Дирака:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sin(q - \tilde{q}) k_0 \rho}{q - \tilde{q}} = \pi \delta(q - \tilde{q}).$$

Остальные слагаемые, умноженные на любую регулярную функцию аргумента q и проинтегрированные по q от 0 до ∞ , после перехода к пределу $\rho \rightarrow \infty$ дают нуль. В результате выражение (П5) принимает вид

$$J_{\pm, \mp}^{(\alpha, \alpha)} = \pm \frac{4\pi}{c} N^{(\alpha)}(q) \delta(q - \tilde{q}),$$

где нормировочная величина $N^{(\alpha)}(q)$ определяется соответствующей формулой (43).

Аналогично можно показать, что при $\alpha \neq \tilde{\alpha}$ величина $J_{\pm, \mp}^{(\alpha, \tilde{\alpha})} = 0$. Отметим лишь, что в этом случае следует принять во внимание и соотношение $\rho^{(\alpha)}(q) \neq \rho^{(\tilde{\alpha})}(q)$, где q - действительная величина.

3. Установим связь между нормировочными величинами N_n и $N^{(\alpha)}(q)$. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 J_{n,-}^{(e)} &= 2\pi \int_0^{\infty} \left\{ [\vec{E}_n, \vec{H}_{-,e}^{(\tau)}(\rho, z, q)] - [\vec{E}_{-,e}^{(\tau)}(\rho, z, q), \vec{H}_n] \right\} \bar{z}_0 \rho \, d\rho = \\
 &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{4i}{\kappa_0^2 [\rho^{(e)}(\tilde{q}) - \rho_n]} e^{-i\kappa_0 [\rho_n - \rho^{(e)}(\tilde{q})] z} \times \\
 &\times \left\{ (q_n + \tilde{q}) C_1(\tilde{q}) C_2(q_n) [1 + \eta^{-1} n_0(q_n) n_0(\tilde{q})] \frac{e^{-i\kappa_0 \rho (q_n - \tilde{q})}}{(q_n \tilde{q})^{1/2}} - \right. \\
 &- i(q_n - \tilde{q}) C_2(\tilde{q}) C_2(q_n) [1 + \eta^{-1} n_0(q_n) n_0(\tilde{q})] \frac{e^{-i\kappa_0 \rho (q_n + \tilde{q})}}{(q_n \tilde{q})^{1/2}} - \\
 &- i(q_n - \tilde{q}_a) C_2(\tilde{q}) C(q_n) [1 + \eta^{-1} n_0(q_n) n_a(\tilde{q})] \frac{e^{-i\kappa_0 \rho (q_n + \tilde{q}_a)}}{(q_n \tilde{q}_a)^{1/2}} + \\
 &+ (q_a + \tilde{q}) C_1(\tilde{q}) C(q_n) [1 + \eta^{-1} n_0(\tilde{q}) n_a(q_n)] \frac{e^{-i\kappa_0 \rho (q_a - \tilde{q})}}{(q_a \tilde{q})^{1/2}} - \\
 &- i(q_a - \tilde{q}) C_2(\tilde{q}) C(q_n) [1 + \eta^{-1} n_0(\tilde{q}) n_a(q_n)] \frac{e^{-i\kappa_0 \rho (q_a + \tilde{q})}}{(q_a \tilde{q})^{1/2}} - \\
 &\left. - i(q_a - \tilde{q}_a) C(\tilde{q}) C(q_n) [1 + \eta^{-1} n_a(\tilde{q}) n_a(q_n)] \frac{e^{-i\kappa_0 \rho (q_a + \tilde{q}_a)}}{(q_a \tilde{q})^{1/2}} \right\}. \quad (П6)
 \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения $q_a = q_a^{(e)}(q_n)$, $\tilde{q}_a = \tilde{q}_a^{(e)}(\tilde{q})$ и учтено, что $\rho = \rho^{(e)}(\tilde{q})$, $\rho_n = \rho^{(e)}(q_n)$, $C_1(q_n) = 0$. С учетом соотношений $\text{Im } q_n < 0$, $\text{Im } q_a < 0$, $\text{Im}(q_a - q_n) < 0$, выполняющихся для собственных мод в свистовом диапазоне, получим из (П6),

что

$$N_n = \lim_{\tilde{q} \rightarrow q_n} \frac{c}{4\pi} J_{n,-}^e = \frac{2i}{\pi} \frac{c}{\kappa_0^2} \left(\frac{d\rho^{(e)}}{dq} \right)^{-1} [1 + \eta^{-1} n_0^2(q)] \frac{dC_1}{dq} C_2 \Big|_{q=q_n}. \quad (\text{П7})$$

Здесь так же, как и в /19, С.152/, сначала делается переход $\tilde{q} \rightarrow q_n$, а затем $\rho \rightarrow \infty$. Из формулы (П7) и выражения для $N^{(e)}(q)$ (см. (43)) следует соотношение

$$\frac{dN^{(e)}}{dq} \Big|_{q=q_n} = 2\pi i N_n.$$

Полезно отметить, что величина $\frac{dC_1}{dq} \left(\frac{d\rho^{(e)}}{dq} \right)^{-1}$ при $q = q_n$, стоящая в (П7), может быть записана в виде

$$\frac{dC_1}{dq} \left(\frac{d\rho^{(e)}}{dq} \right)^{-1} \Big|_{q=q_n} = \varkappa \frac{d\Delta}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_n}, \quad (\text{П8})$$

где

$$\varkappa = 4\pi^{-2} S_1 K_0(S_1) S_2 K_0(S_2).$$

П Р И Л О Ж Е Н И Е 2

Можно показать, что в плазме без потерь энергетическая ортогональность для собственных мод (с действительными постоянными распространения) имеет место при условии

$$P_{n,m} = \frac{c}{4} \operatorname{Re} \int_0^\infty \left\{ [\bar{E}_n, \bar{H}_m^*] - [\bar{E}_m, \bar{H}_n^*] \right\} \bar{z}_0 \rho \, d\rho = 0. \quad (\text{П9})$$

Докажем, что это соотношение действительно выполняется при чисто вещественных постоянных распространения. Для доказательства используем вместо двух последних уравнений (III) уравнения для Ψ_m^* , Φ_m^* и выполним те же действия, что и при выводе (П4). В результате получим

$$P_{n,m} = \frac{c}{4} \operatorname{Re} \left[\frac{i a}{k_0 (\rho_n - \rho_m^*)} \hat{D}_a (H_{\varphi n} E_{zm}^* + H_{\varphi m}^* E_{zn} - E_{\varphi n} H_{zm}^* - H_{zn} E_{\varphi m}^*) \right]. \quad (\text{ШО})$$

Из (ШО) при $\rho_n \neq \rho_m^*$ (в нашем случае $\rho_m^* = \rho_m$) следует, что в самом деле $P_{n,m} = 0$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мальцева О.А., Молчанов О.А. Распространение низкочастотных волн в магнитосфере Земли. - М.: Наука, 1987. - II8 с.
2. Мареев Е.А., Чугунов Ю.В. Антенны в плазме. - Нижний Новгород: ИФ АН СССР, 1991. - 232 с.
3. Марков Г.А., Миронов В.А., Сергеев А.М. и др. Многолучков в самоанализация плазменных волн//ЖЭТФ. - 1981. - Т.80. - Вып. 6. - С.2264-2271.
4. Вдовиченко И.А., Марков Г.А., Миронов В.А. и др. Ионизационная самоанализация вистлеров в плазме// Письма в ЖЭТФ. - 1986. - Т.44. - Вып.5. - С.216-219.
5. Агафонов Ю.Н., Бабаев А.П., Бажанов В.С. и др. Плазменная волновая разряд в ионосфере Земли//Письма в ЖЭТФ. - 1989. - Т.15. - Вып.17. - С.1-5.
6. Stenzel R.L. Filamentation instability of large amplitude whistler wave // Phys. Fluids. - 1976. - V. 19, No 6. - P.865-871.
7. Заборонкова Т.М., Костров А.В., Кудрин А.В. и др. Канализованные волны свистового диапазона в неоднородных плазменных структурах//ЖЭТФ. - 1992. - Т.102. - Вып.4. - С.1151-1166.
8. Karpman V.I., Kaufman R.N., Shagalov A.G. Axially symmetric self-focusing of whistler waves// J. Plasma Phys. - 1984. - V.31, Pt.2. - P.209-223.
9. Марков Г.А. Наблюдение резонансной автонастройки магнитных антенн плазмой ВЧ разряда//Физика плазмы. - 1988. - Т.14, № 9. - С.1094-1098.
10. Кудрин А.В., Марков Г.А. О дисперсионных и согласующих свой -

- ствах неоднородных плазменных волноводов//Изв.вузов. - Ра -
диофизика. - 1991. - Т.34, № 2. - С.163-172.
11. Кауфман Р.Н., Рябова Н.А. Свистовые волны в плазменных волноводов//Исследование структуры и волновых свойств около -
земной плазмы. - М.: ИЗМИРАН, 1980. - С.97-112.
 12. Karpman V.I., Kaufman R.N. Whistler wave propagation in
density ducts // J. Plasma Phys. - 1982. - V.27, Pt.2. -
P.225-238.
 13. Заборонкова Т.М., Кудрин А.В., Марков Г.А. Волны свистового
диапазона, направляемые каналами с повышенной плотностью в
плазмы//Физика плазмы. - 1993. - Т.19. - Вып.6. - С.769-780.
 14. Kondrat'ev I.G., Kudrin A.V., Zaboronkova T.M. Radiation of
whistler waves in magnetoactive plasma // Radio Sci. - 1992.
- V.27, No 2. - P.315-324.
 15. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. - М.: Наука, 1967. - 684 с.
 16. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1973. - 736 с.
 17. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971. - С.975-976, 983.
 18. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. - М.: Радио и связь, 1988. - 440 с.
 19. Шевченко В.В. Плавные переходы в открытых волноводах. - М.: Наука, 1969. - 192 с.
 20. Шевченко В.В. О разложении полей открытых волноводов по собственным и несобственным волнам//Изв.вузов. - Радиофизика.-
- 1971. - Т.14, № 8. - С.1242-1249.
 21. Кондратьев И.Г., Таланов В.И. Применение леммы Лоренца к расчету полей излучения зачанных источников в безграничных средах//ЖТФ. - 1965. - Т.35, № 3. - С.571-573.
 22. Заборонкова Т.М., Кондратьев И.Г., Кудрин А.В. О диаграмме направленности излучения кольцевых электрических токов в магнитоактивной плазме в свистовом диапазоне//Радиотехника и электроника. - 1993. - Т.38, № 98. - С.1451-1460.

23. Моисеев Б.С. Особенности излучения электрического диполя в магнитоактивной плазме и проблема гидирования волн в магнитосфере Земли. Диссертация... канд.физ.-мат.наук. - М. : ИЗМИРАН, 1985. - 170 с.
24. Wang T.N.C., Bell T.F. VLF/ELF radiation patterns of arbitrarily oriented electric and magnetic dipoles in a cold lossless multicomponent magnetoplasma // J. Geophys. Res. -1972. - V.77, No 7. - P.1174-1189.

Дата поступления статьи
3 ноября 1993 г.

Подписано в печать 0..II.93 г. Формат 60 x 84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 4,01 усл.п.л.
Знак 5350. Тираж 100.

Отпечатано на ротационте НИРФИ