

Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт  
Государственного комитета РФ по высшему образованию

П р е п р и н т    № 383

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН  
В НЕСТАЦИОНАРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Г.И.Григорьев  
О.Н.Савина  
В.В.Тамойкин

Нижегород, 1994

Григорьев Г.И., Савина О.Н.,  
Тамойкин В.В.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В НЕСТАЦИОНАРНО  
ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ//Препринт № 383. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1994.-  
- 16 с.

Рассмотрено излучение и распространение звуковых волн в не -  
стационарно движущейся среде. Получены и проанализированы выраже -  
ния для коэффициентов отражения и прохождения при падении звуко -  
вой волны на тангенциальный разрыв с нестационарной скоростью.

Grigor'ev G.I., Savina O.N., Tamoiikin V.V.

PROPAGATION AND RADIATION OF ACOUSTIC WAVES IN NONSTATIONARY  
MOVING MEDIUM

We consider radiation and propagation of acoustic waves in  
flows with simple harmonic time dependence. Reflection, transmis -  
sion and amplification of sound by moving medium are analysed.

---

Подписано в печать 26.02,94 г. Формат 60 x 84/16.  
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 0,97 усл.п.л.  
Заказ 5382. Тираж 100.

---

Отпечатано на ротапринте НИРФИ

## 1. Введение. Исходные уравнения

Значительное количество работ посвящено проблеме распространения различных типов волн в движущихся средах /1-8/. В большинстве из них рассматривалась ситуация, когда скорость движения среды  $\vec{u}_0$  не изменялась во времени. Исключение составляют работы /9, 10/, в одной из которых решалась задача об орографическом возбуждении акустико-гравитационных волн нестационарным потоком, обтекающим препятствие заданной формы.

Рассмотрим задачу о распространении и возбуждении звуковых волн в однородной среде с нестационарным ветром  $\vec{u}_0(u_0, 0, 0)$ :

$$u_0(t) = u_1 + u_2 \cos \Omega t . \quad (1)$$

В качестве исходной воспользуемся линеаризованной системой гидродинамических уравнений

$$\rho_0 d\vec{u}/dt = -\nabla p , \quad (2)$$

$$dp/dt + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u} = 0 , \quad (3)$$

$$p = c^2 \rho . \quad (4)$$

При записи (2) - (4) использованы обозначения:  $\rho$  - плотность,  $p$  - давление,  $c = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$  - скорость звука,  $\vec{u}$  - скорость движения среды,  $d/dt = \partial/\partial t + u_0(t)\partial/\partial x$ . Из системы (2)-(4) легко получить волновые уравнения для всех характеристик возмущений.

Например, для  $\rho$  и  $\zeta$ -компоненты смещения вдоль оси  $x$  имеем:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - c^2 \Delta\right) \left\{ \frac{\rho}{\zeta} \right\} = 0. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что заменой

$$\{\rho, \zeta\} = \{\tilde{\rho}, \tilde{\zeta}\} \exp[ik_x x + ik_y y - ik_x \int u_0(t) dt] \quad (6)$$

уравнения (5) приводятся к более простым:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + c^2 k_{\perp}^2\right) \left\{ \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\zeta}} \right\} = 0, \quad (7)$$

решения которых можно искать в виде  $\exp(-i\omega t \pm i\alpha z)$  с частотой  $\omega = c\sqrt{k_{\perp}^2 + \alpha^2}$ ,  $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

## 2. Функция Грина

Функцию Грина рассматриваемой задачи в безграничной среде найдем из уравнения

$$d^2 G / dt^2 - c^2 \Delta G = \delta(t - t_0) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (8)$$

После введения замены переменных (6) и преобразования Фурье по координатам уравнение (8) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial t^2} + c^2(k_{\perp}^2 + \alpha^2) \tilde{G} = \frac{\delta(t - t_0)}{(2\pi)^3} \exp\{-i\vec{k}\vec{r}_0 + ik_x \int u_0(t) dt\}. \quad (9)$$

Решая (9) при  $u_0 = u_1 + u_2 \cos \Omega t$ , получаем

$$G = \frac{1}{4\pi c^2 R} \delta\left(t - t_0 - \frac{R}{c}\right), \quad (10)$$

где  $R = \left\{ \left[ x - x_0 + u_1(t_0 - t) + \frac{u_2}{\Omega} \sin \Omega t_0 - \frac{u_2}{\Omega} \sin \Omega t \right]^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right\}^{1/2}$ .

Анализ корней уравнения  $R = c(t - t_0)$  позволяет определить время прихода сигнала в заданную точку наблюдения. Это уравнение является трансцендентным и получить его решение в общем виде затруднительно. При  $y = z = y_0 = z_0 = 0$  имеем:

$$x - x_0 = (c + u_1)(t - t_0) + \frac{u_2}{\Omega} (\sin \Omega t - \sin \Omega t_0).$$

Приводя это соотношение к уравнению Бесселя-Лагранжа /II/  $\psi - q \sin \psi = E$  и разрешая его относительно  $t_0 = \psi / \Omega$ , находим:

$$t_0 = t - \frac{x - x_0}{c + u_1} + \frac{u_2 \sin \Omega t}{\Omega (c + u_1)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \Omega} J_n \left( \frac{n u_2}{c + u_1} \right) \cdot \sin \left[ \pi n - \frac{n \Omega (x - x_0)}{c + u_1} + \frac{n u_2}{c + u_1} \sin \Omega t \right], \quad (II)$$

где  $J_n$  - функция Бесселя.

Найденная функция Грина позволяет определить возмущения в безграничной среде с нестационарным ветром  $u_0(t)$  от точечного гармонического источника, помещенного в начало координат ( $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ). Возмущения от такого источника представим в виде

$$\xi \sim \int_{-\infty}^t G(x, y, z, t - t') \exp(-i \omega_0 t') dt'. \quad (I2)$$

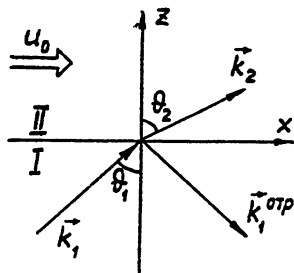
Таким образом, из формул (I0) - (I2) следует, что в нестационарно движущейся среде генерируемые гармоническим источником возмущения содержат не только частоту источника  $\omega_0$ , но и гармоники частоты  $\Omega$  модуляции скорости ветра  $u_0(t)$ . Аналогично в /II/ получено, что при обтекании препятствия гармонически изменяющимся во времени потоком возбуждаются волны не только на основной частоте, но и на всех ее гармониках.

### 3. Взаимодействие звуковой волны с областью нестационарного течения

Пусть из покоящейся среды I на границу раздела (плоскость  $z = 0$ ) под углом  $\vartheta$ , падает плоская волна (см. рис. I):

$$\xi_n = a \exp(i \vec{k}_1 \vec{r} - i \omega_0 t), \quad (I3)$$

$$\vec{k}_1 = (k_x, k_y, z), \quad \omega_0^2 = c^2 (k_x^2 + z^2).$$



Р и с . I

Ниже, для простоты, положим амплитуду  $a = 1$ . Определим волновые возмущения в среде II, расположенной над границей при  $z > 0$  и движущейся в направлении оси  $Ox$  со скоростью  $u_0(t)$  (см. (I)), а также отраженные волны. Граничными условиями при  $z = 0$  являются непрерывность давления  $p$  и смещения  $\zeta$ , нормального к границе. При переходе через плоскость  $z = 0$ , как известно, не меняются компоненты  $k_1$  ( $k_x, k_y$ ) волнового вектора  $\vec{k}_1$ , параллельные границе.

Поле смещения  $\zeta$  в движущейся среде представим в виде:

$$\zeta_2 = e^{i\vec{k}_1 \vec{r}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\alpha) \int A(\omega') \exp[-ik_x u_1 t - is\Omega t - i\omega' t + i\alpha_2(\omega')z] d\omega' \quad (I4)$$

или в эквивалентной форме:

$$\zeta_2 = \exp(i\vec{k}_1 \vec{r}) \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\alpha) \int A(\omega - s\Omega - k_x u_1) \cdot \exp[-i\omega t + i\alpha_2(\omega - s\Omega - k_x u_1)z] d\omega, \quad (I5)$$

где  $\alpha = k_x u_2 / \Omega$ ,  $\alpha_2(\omega') = \pm c^{-1} \sqrt{\omega'^2 - c^2 k_1^2}$ . Знак  $\alpha_2$  должен быть выбран из условия, чтобы волны уходили от границы, т.е.  $v_z^{rp} = \partial\omega / \partial\alpha_2 > 0$ . По аналогии с (I5) отраженные волны представим в виде

$$\zeta_1^{отр} = \exp(i\vec{k}_1 \vec{r}) \int r(\omega') \exp[-i\omega' t - i\alpha_1(\omega')z] d\omega' \quad (I6)$$

Вариации давления  $p$  и смещения  $\zeta$  вдоль оси  $z$  связаны соотношениями<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_0 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -\rho_0 c^2 \Delta \zeta, \quad \text{из которых следует:}$$

$$p_1 = \frac{\rho_0 \omega_0^2}{i\alpha_1} \exp(i\vec{k}_1 \vec{r} - i\omega_0 t),$$

<sup>1)</sup> Далее принимаем, что скорость звука  $c$  и плотность  $\rho_0$  не меняются при переходе через границу  $z = 0$ .

$$p_1^{\text{отр}} = -p_0 \exp(i\vec{k}_1 \vec{r}) \int \frac{\omega'^2 r(\omega')}{i\varpi_1(\omega')} \exp[-i\omega't - i\varpi_1(\omega')z] d\omega'. \quad (17)$$

$$p_2 = p_0 \exp(i\vec{k}_1 \vec{r}) \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\alpha) \int \frac{(\omega - s\Omega - k_x u_1)^2 d\omega}{i\varpi_2(\omega - s\Omega - k_x u_1)} A(\omega - s\Omega - k_x u_1) \cdot \exp[-i\omega t + i\varpi_2(\omega - s\Omega - k_x u_1)z].$$

4. Функциональное уравнение для амплитуд  $A(\omega - s\Omega - k_x u_1)$

Групповая скорость волн в движущейся среде, определяемая из соотношения

$$c^2(\varpi_2^2 + k_1^2) = (\omega - s\Omega - k_x u_1)^2, \quad (18)$$

дается выражением

$$v_z^{\text{гп}} = \frac{\partial \omega}{\partial \varpi_2} = \frac{c^2 \varpi_2}{\omega - s\Omega - k_x u_1}. \quad (19)$$

Условие  $v_z^{\text{гп}} > 0$  выполняется, если

$$\varpi_2 = \frac{1}{c} [(\omega - s\Omega - k_x u_1)^2 - c^2 k_1^2]^{1/2} \text{sgn}(\omega - s\Omega - k_x u_1), \quad (20)$$

где  $\text{sgn}(x) = 1$  для  $x > 0$ ,  $\text{sgn}(x) = -1$  для  $x < 0$ . Аналогичная ситуация может возникать и для отраженных волн, если их частоты не совпадают с  $\omega_0$  и какие-либо из них изменяют знак. Поэтому, требуя  $v_z^{\text{гп}} = \partial \omega / \partial \varpi_1 < 0$ , представим  $\varpi_1(\omega')$  в виде

$$\varpi_1(\omega') = \frac{1}{c} (\omega'^2 - c^2 k_1^2)^{1/2} \text{sgn}(\omega'). \quad (21)$$

Подставляя в граничные условия  $\xi$  и  $\rho$  из (13) - (17), получаем функциональное уравнение для амплитуд  $A$  и представление для  $r(\omega)$ :

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\alpha) A(\omega - s\Omega - k_x u_1) \left[ \frac{\omega^2}{\varpi_1(\omega)} + \frac{(\omega - s\Omega - k_x u_1)^2}{\varpi_2(\omega)} \right] = 2c\omega_0 \sec \vartheta_1 \delta(\omega - \omega_0), \quad (22)$$

$$r(\omega) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(\alpha) A(\omega - s\Omega - k_x u_1) - \delta(\omega - \omega_0). \quad (23)$$

Уравнение (22) можно решать методом последовательных приближений, полагая  $A(\omega) = A_0(\omega) + A_1(\omega)$ ,  $\alpha = k_x u_2 / \Omega \ll 1$ . При  $\alpha = 0$  в нулевом приближении имеем:

$$A_0(\omega) = \frac{2\omega_0 c \sec \vartheta_1 \delta(\omega - \omega_0 + k_x u_1)}{\omega_0^2 / \varkappa_1(\omega_0) + (\omega_0 - k_x u_1)^2 / \varkappa_2(\omega_0 - k_x u_1)},$$

$$r_0(\omega) = \frac{\omega_0 c \sec \vartheta_1 - (\omega_0 - k_x u_1)^2 / \varkappa_2(\omega_0 - k_x u_1)}{\omega_0^2 / \varkappa_1(\omega_0) + (\omega_0 - k_x u_1)^2 / \varkappa_2(\omega_0 - k_x u_1)} \delta(\omega - \omega_0).$$
(24)

Полученные выражения для  $A_0(\omega)$  и  $r_0(\omega)$  согласуются с коэффициентами отражения и прохождения, полученными ранее при решении задачи о падении звуковых волн на тангенциальный разрыв /1/.

Далее, в следующем приближении, при  $\alpha \ll 1$  находим

$$A_1(\omega) = \frac{\alpha B_0}{2\beta_{00}} \left[ \frac{\beta_{10}}{\beta_{11}} \delta(\omega - \omega_0 - \Omega + k_x u_1) - \frac{\beta_{-10}}{\beta_{-11}} \delta(\omega - \omega_0 + \Omega + k_x u_1) \right],$$
(25)

где  $B_0 = 2\omega_0 c \sec \vartheta_1$ ,  $\beta_{mn} = \alpha^m + \alpha_n$ ,  $\alpha^m = \frac{(\omega_0 - m\Omega)^2}{\varkappa_1(\omega_0 - m\Omega)}$ ,  $\alpha_n = \frac{(\omega_0 - n\Omega - k_x u_1)^2}{\varkappa_2(\omega_0 - n\Omega - k_x u_1)}$ . После подстановки полученного решения

в выражения (14), (16) для  $\zeta_2$ ,  $\zeta_1^{стр}$  получим:

$$\zeta_2 \approx \frac{B_1}{\beta_{00}} \exp[i\vec{k}_1 \vec{r}] \left\{ \exp[-i\omega_0 t + i\varkappa_2(\omega_0 - k_x u_1)z] + \right.$$

$$+ \frac{\alpha}{2} \frac{\beta_{10}}{\beta_{11}} \exp[-i(\omega_0 - \Omega)t + i\varkappa_2(\omega_0 - \Omega - k_x u_1)z] -$$

$$- \frac{\alpha}{2} \frac{\beta_{-10}}{\beta_{-11}} \exp[-i(\omega_0 + \Omega)t + i\varkappa_2(\omega_0 + \Omega - k_x u_1)z] -$$

$$\left. - i\alpha \sin \Omega t \exp[-i\omega_0 t + i\varkappa_2(\omega_0 - k_x u_1)z] \right\},$$
(26)

$$\zeta_1^{стр} \approx \left( \frac{B_0}{\beta_{00}} - 1 \right) \exp[i\vec{k}_1 \vec{r} - i\omega_0 t - i\varkappa_1(\omega_0)z] +$$

$$+ \frac{\alpha B_0}{2\beta_{00}} \left( \frac{\beta_{10}}{\beta_{11}} - 1 \right) \exp[i\vec{k}_1 \vec{r} - i(\omega_0 - \Omega)t - i\varkappa_1(\omega_0 - \Omega)z] +$$



$$+ \frac{\alpha B_0}{2 b_{00}} \left( 1 - \frac{b_{-10}}{b_{-1-1}} \right) \exp [i \vec{k}_1 \vec{r} - i(\omega_0 + \Omega)t - i \alpha_1 (\omega_0 + \Omega)z]. \quad (27)$$

Из формулы (26) следует, что в движущейся среде кроме волны на частоте  $\omega_0$ , заданной падающей из среды I волной, присутствуют возмущения на сдвинутых частотах  $\omega_0 \pm \Omega$ . А при учете более высоких степеней малого параметра  $\alpha$  были бы и другие гармоники. Кроме того, последнее слагаемое в формуле (26) можно интерпретировать как волну на основной частоте  $\omega_0$  с фазовой модуляцией, определяемой нестационарностью потока. Это акустический аналог хорошо изученного в радиофизике случая прохождения электромагнитных волн через синусоидальный фазовый экран [12]. Аналогичную структуру имеет поле отраженных волн (27).

Итак, из-за нестационарности потока в прошедшем и отраженном сигналах возникают возмущения с комбинационными частотами  $\omega_0 \pm \Omega$ ,  $\omega_0 \pm 2\Omega$ , ... Спектры этих волн содержат соответствующие  $\delta$ -функции. Поэтому для нахождения решения функционального уравнения (22) представим амплитуды  $A(\omega - s\Omega - k_x u_1)$  в виде<sup>+</sup>

$$A(\omega - s\Omega - k_x u_1) = \sum_p A^p(\omega_0 - l\Omega - k_x u_1) \delta(\omega - \omega_0 - s\Omega + l\Omega). \quad (28)$$

Для коэффициентов  $A^p(\omega_0 - l\Omega - k_x u_1)$  получается тогда уравнение

$$B_0 \delta(\omega - \omega_0) = \sum_s \sum_p J_s(\alpha) A^p(\omega_0 - l\Omega - k_x u_1) \cdot (\alpha^{l-s} + a_p) \delta(\omega - \omega_0 - s\Omega + l\Omega), \quad (29)$$

которое можно переписать в матричной форме, собирая члены с одинаковыми  $\delta$ -функциями. При этом получается алгебраическая система бесконечного числа уравнений для нахождения  $A^p$ .

Решение уравнения (29) при малых  $\alpha \ll 1$  совпадает с приведенным выше.

<sup>+</sup> Другой способ решения уравнения (22) приведен в Приложении.

## 5. Анализ полученных соотношений

Как следует из формул (18), (26), волны в движущейся среде являются распространяющимися при выполнении условия  $\alpha_2^2 > 0$  или

$$(1 - s\Omega/\omega_0 - M \sin \vartheta_1)^2 > \sin^2 \vartheta_1,$$

где  $M = u_1/c$  - число Маха. Легко проверить, что граница  $\alpha_2 = 0$  на плоскости  $(M, \vartheta_1)$  проходит вдоль линий

$$M = \frac{1 - s\Omega/\omega_0}{\sin \vartheta_1} \neq 1, \quad (30)$$

а изменение знака  $\alpha_2$  для обеспечения принятого выше условия  $v_z'' >$

$$> 0 \text{ должно происходить при пересечении линии } M_3 = \frac{1 - s\Omega/\omega_0}{\sin \vartheta_1}.$$

Коэффициенты прохождения волны  $T$  на основной частоте  $\omega_0$  в движущуюся среду и отражения от нее  $R$  на основании (26)-(27) запишем в виде

$$T = B_0 / b_{00}, \quad R = B_0 / b_{00} - 1. \quad (31)$$

По аналогии с формулами (31) можно привести коэффициенты преобразования в гармоники на частотах  $\omega_0 \mp \Omega$  в прошедших и отраженных волнах:

$$T_1 = \frac{\alpha B_0 b_{10}}{2 b_{00} b_{11}}, \quad T_{-1} = -\frac{\alpha B_0 b_{-10}}{b_{00} b_{-1-1}}, \quad (32)$$

$$R_1 = \frac{\alpha B_0}{2 b_{00}} \left( \frac{b_{10}}{b_{11}} - 1 \right), \quad R_{-1} = \frac{\alpha B_0}{2 b_{00}} \left( 1 - \frac{b_{-10}}{b_{-1-1}} \right). \quad (33)$$

Анализ полученных выражений показывает, что при выполнении некоторых условий параметры  $b_{00}$ ,  $b_{11}$ ,  $b_{-1-1}$  обращаются в нуль, а коэффициенты  $T$ ,  $T_1$ ,  $T_{-1}$ ,  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_{-1}$  при этом неограниченно возрастают. Действительно, полагая  $b_{33} = 0$ , приходим к уравнению

$$\Gamma^4 [(\Gamma - M \sin \vartheta_1)^2 - \sin^2 \vartheta_1] = (\Gamma^2 - \sin^2 \vartheta_1)(\Gamma - M \sin \vartheta_1)^4, \quad (34)$$

$$\Gamma = 1 - s\Omega / \omega_0,$$

решая которое находим:

$$M_1 = \frac{2\Gamma}{\sin \vartheta_1}, \quad M_2 = \frac{\Gamma}{\sin \vartheta_1} + \frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - \sin^2 \vartheta_1}}. \quad (35)$$

На рис.2 эти решения (35) изображены сплошными линиями для  $s = 0$  ( $\vartheta_{00} = 0$ ) на плоскости  $(M, \vartheta_1)$ , пунктиром показаны линии  $\alpha_2 = 0$ . Рис.3 и рис.4 иллюстрируют ситуацию, возникающую при значениях параметра  $\Gamma$  равных соответственно  $\Gamma_1 = 0,5$  и  $\Gamma_2 = 2$ . Возможность резонансного увеличения амплитуды при отражении от тангенциального разрыва отмечалась в работах /1,2,13,14/.

Укажем, что решения (35) при учете необходимого условия  $\alpha_2^2 > 0$  (эквивалентного двум  $M > \frac{\Gamma}{\sin \vartheta_1} + 1$  и  $M < \frac{\Gamma}{\sin \vartheta_1} - 1$ ) реализуются при  $M = u_1/c > 1$ .

## 6. Кинематика

Как показано выше, для волн, распространяющихся в движущейся среде, справедливо уравнение

$$c^2 k_2^2 = (\omega_0 - s\Omega - k_x u_1)^2. \quad (36)$$

Исходя из условия сохранения горизонтальной компоненты волнового вектора  $k_x = k_2 \sin \vartheta_2 = \omega_0 c^{-1} \sin \vartheta_1$ , из (36) имеем:

$$\sin \vartheta_2 = \frac{\sin \vartheta_1}{1 - M \sin \vartheta_1 - s\Omega / \omega_0}. \quad (37)$$

Зависимость угла  $\vartheta_2$  моды с номером  $s$  от угла падения  $\vartheta_1$ , определяемая соотношением (37), показана на рис.5 для чисел Маха  $M = 2$  (пунктир) и  $M = 3$  (сплошные линии) при  $\Gamma = 1 - s\Omega / \omega_0 = 0,5$  и  $\Gamma = 1$ . Отрицательные углы  $\vartheta_2$  характеризуют ситуацию, когда вол-

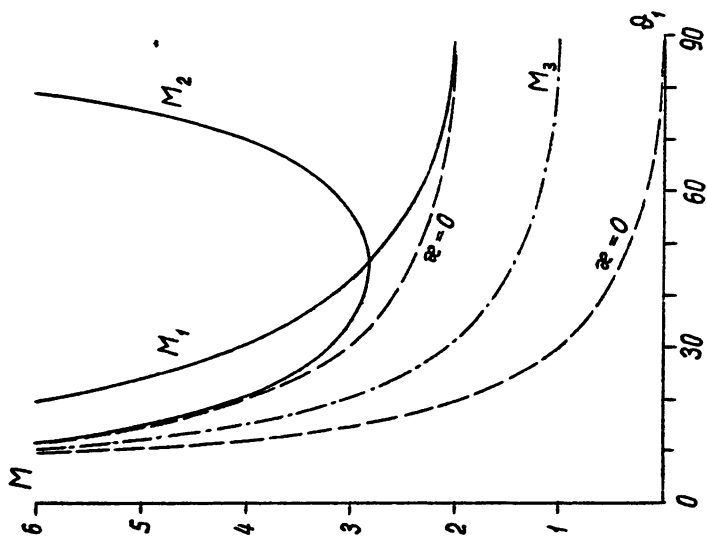


Рис. 2

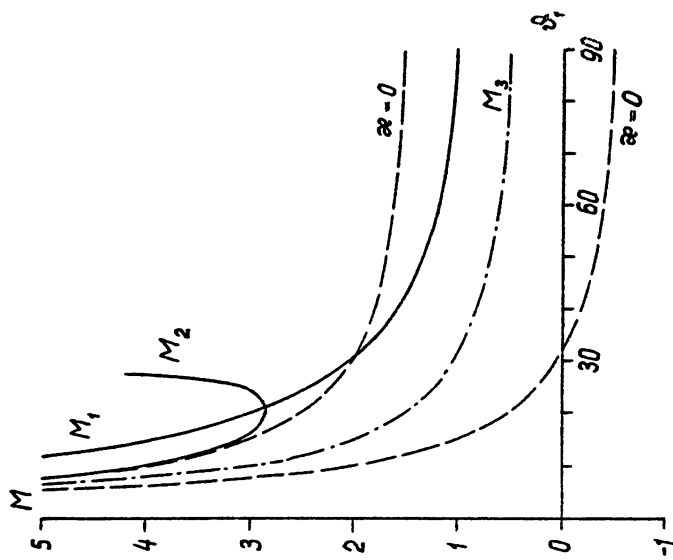
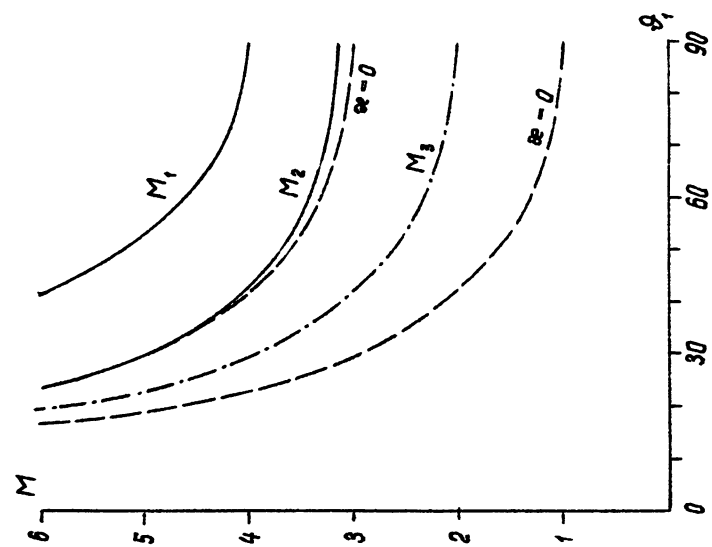
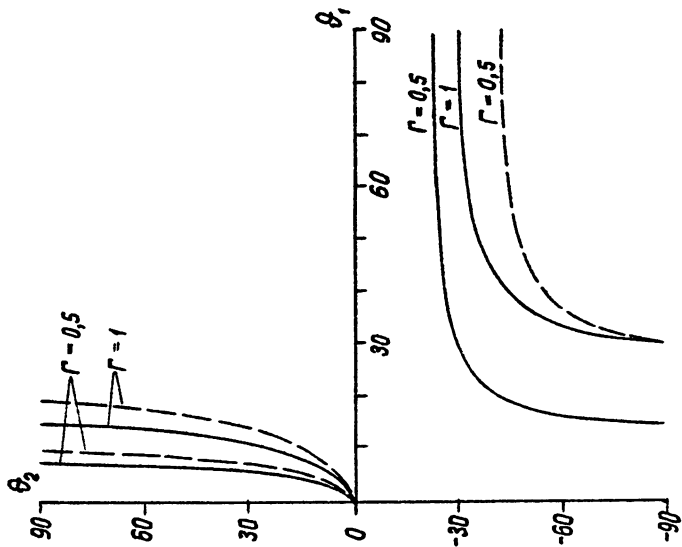


Рис. 3



Р и с . 4



Р и с . 5

новой вектор  $\vec{k}_2$  направлен к границе ( $k_{z2} < 0$ ). Существуют такие значения  $\theta_1$ , для которых (35) не имеет решения. Эта область углов характерна для полного внутреннего отражения. Аналогичные соотношения можно привести и для отраженных волн.

Таким образом, в результате проведенного исследования линейного взаимодействия звуковой монохроматической волны частоты  $\omega_0$  с областью нестационарного течения установлено, что кроме основной частоты  $\omega_0$  в отраженном и прошедшем в движущуюся среду сигналах возникают гармоники  $\omega_0 \pm \Omega$ ,  $\omega_0 \pm 2\Omega$ , ... Определены коэффициенты преобразования основной частоты  $\omega_0$  в гармоники и найдены условия их резонансного увеличения.

Авторы благодарны А.А.Белобородовой за помощь в проведении численных расчетов и оформлении рукописи работы.

## П р и л о ж е н и е

В результате линейного взаимодействия падающей волны частоты  $\omega_0$  и пульсирующего на частоте  $\Omega$  потока в среде II рождаются волны комбинационных частот  $\omega_0 \pm \Omega$ ,  $\omega_0 \pm 2\Omega$ ,  $\omega_0 \pm 3\Omega$ , ... Спектры этих волн содержат соответствующие  $\delta$ -функции. С учетом этого обстоятельства запишем уравнение (22) последовательно сдвигая нуль оси частот  $\omega$  на величину кратную  $\Omega$ . Тогда вместо одного функционального уравнения (22) получится бесконечная система уравнений для искомых амплитуд  $A_s = A(\omega - s\Omega - k_x u_1)$ :

$$\|B\| A = B_0 \delta. \quad (\text{П.1})$$

Элементы матрицы  $\|B\|$  даются выражениями  $B_{nm} = J_{m-n}(\alpha) b_{nm}$ . Решая укороченную систему (П.1) при  $-1 \leq n, m \leq +1$

$$\begin{vmatrix} B_{-1,-1} & B_{-1,0} & B_{-1,1} \\ B_{0,-1} & B_{0,0} & B_{0,1} \\ B_{1,-1} & B_{1,0} & B_{1,1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{-1} \\ A_0 \\ A_1 \end{vmatrix} = B_0 \begin{vmatrix} \delta(\omega + \Omega - \omega_0) \\ \delta(\omega - \omega_0) \\ \delta(\omega - \Omega - \omega_0) \end{vmatrix} \quad (\text{П.2})$$

и полагая, как и выше,  $\alpha \ll 1$ , получаем:

$$A_1 = \frac{B_0}{\beta_{11}} \delta(\omega - \omega_0 - \Omega), \quad A_{-1} = \frac{B_0}{\beta_{-1-1}} \delta(\omega - \omega_0 + \Omega), \quad (\text{П.3})$$

$$A_0 = \frac{B_0}{\beta_{00}} \delta(\omega - \omega_0) + \frac{\alpha B_0 \beta_{0-1}}{2 \beta_{00} \beta_{-1-1}} \delta(\omega - \omega_0 + \Omega) - \frac{\alpha B_0 \beta_{01}}{2 \beta_{00} \beta_{11}} \delta(\omega - \omega_0 - \Omega).$$

Сопоставление полученных таким способом амплитуд  $A_s$  (П.3) с найденными выше (см. (24), (25)) показывает, что они совпадают при приведении их к одинаковым аргументам.

### Л и т е р а т у р а

1. Miles J.W. On the reflection of sound at an interface of relative motion. J. Acoust. Soc. Amer. - 1957, V.29, N.2. - P.226-228.
2. Ribner H.S. Reflection, transmission and amplification of sound by a moving medium - J. Acoust. Soc. Amer. - 1957, V.29, N.4. - P. 435-441.
3. Yeh C. A further note on the reflection and transmission of sound waves by a moving fluid layer. J. Acoust. Soc. Amer. - 1968, V.43, N.6. - P. 1454-1455.
4. Кикина Н.Г., Санников Д.Г. Отражение звуковых волн от движущегося плоскопараллельного слоя // Акуст. журнал. - 1969. - Т.15, № 4. - С.543-546.
5. Григорьев Г.И. Преломление атмосферных гравитационных волн на тангенциальном разрыве // Изв. АН СССР. Сер. ФАС. - 1973. - Т.9, № II. - С.1193-1194.
6. Осташев В.Е. Распространение звука в движущихся средах. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992.
7. Morse P.M., Ingard K. *Une Theoretical Acoustics*. McGraw Hill Book Co., N.Y., 1968.
8. Блохинцев Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981.

9. Mc Ewan A.D., Robinson R.M. Parametric instability of internal gravity waves. J.Fluid Mech., 1975, V.67, P4.- P.667-687.
10. Bell T.H. Lee waves in stratified flows with simple harmonic time dependence. J.Fluid.Mech.- 1975, V.67, P4, P. 705-722.
11. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. Ч.1. - М.: ИЛ, 1949.
12. Ratcliffe J.A. Some aspects of diffraction theory and their application to the ionosphere. Rep. of Progr. in Phys. 1956, V.19, P. 188.  
Русский пер.: Дж.Ратклифф. Некоторые вопросы дифракции и их применение к ионосфере // ПСФ. - 1957. - № 10. - С.5.
13. Фабрикант А.Л. Сверхотражение волн в гидродинамических потоках // Изв.вузов. - Радиофизика. - 1987. - Т.30, № 2. - С.275 - 286.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.