Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Государственного комитета РФ по высшему образованию

Препринт № 390

# СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В.И.Есипенко
О.Б.Щуко

Нижний Новгород, 1994

Есипенко В. И., Щукс О. Б.

СОВМЕСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН//Препринт № 390. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1994. - 17 с.

УДК 519.213

Развит прямой метод отыскания совместной плотности распределения вероятности сумм в общем случае зависимых случайных величин с постоянными коэффициентами при произвольном числе слагаемых в них и различной их глубине перекрытия. Рассмотрен один предельный случай, для другого - указана связь с известными результатами.

Подписано в печать 25.05.94 г. Формат 60 х 84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,02 усл.п.л.
Заказ 5399. Тираж 65.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ

В различных областях науки и техники приходится иметь дело с задачей отыскания статистических характеристик суммы

$$z = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k \tag{I}$$

в общем случае зависимых случайных величин $z_k$, которые могут принимать любые действительные значения и характеризуются совместной плотностью распределения вероятности $\omega_n^*(z_1, \dots, z_n)$. Входящие в (I) коэффициенты $a_k$ – постоянные действительные числа.

Эта задача в принципе разрешима, например, с помощью кумулянтного анализа /I/ или "прямого" метода /2/. В настоящее время становятся актуальными в статистической радиотехнике, в теории связи, автоматического управления и других областях сведения о тех или иных совместных статистических характеристиках сумм слагаемых, входящих в (I).

В данной работе рассматривается совместная плотность распределения вероятности (ПРВ) $W_m(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m)$ случайных величин $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m$ $(m < n)$, представляющих собой суммы элементов $a_k z_k$ из (I).

В простейшем случае (одном из предельных)

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_f z_f, \\
\hat{x}_2 &= a_{f+1} z_{f+1} + \dots + a_{f+\ell} z_{f+\ell}, \\
&\text{-----------------------} \\
\hat{x}_{m-1} &= a_{n-k-s+1} z_{n-k-s+1} + \dots + a_{n-k} z_{n-k}, \\
\hat{x}_m &= a_{n-k+1} z_{n-k+1} + \dots + a_n z_n,
\end{aligned} \tag{2}$$

т.е. элемент $a_k z_k$ суммы (I) входит в качестве слагаемого лишь в одну из переменных $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m$ .

В других случаях каждые две соседние переменные могут иметь по одному общему слагаемому, по два и т.д. общих слагаемых.

В предельном случае переменные $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m$ полностью повторяют друг друга, т.е. $\hat{x}_1 = \dots = \hat{x}_m$ .

Вводя переменную $x_k = a_k z_k$ и используя известные правила функционального преобразования случайных величин /3/ перейдем от $\omega_n^*(z_1, \dots, z_n)$ к совместной ПРГ $\omega_n(x_1, \dots, x_n)$ элементов множества случайных величин $\{x_1, \dots, x_n\}$ :

$$\omega_n(x_1, \dots, x_n) = \omega_n^*\left(\frac{x_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n}{a_n}\right) |D_n| , \tag{3}$$

где $D_n = 1/a_1 a_2 \dots a_n$ – Якобиан преобразования от случайных величин $z_1, \dots, z_n$ к случайным величинам $x_1, \dots, x_n$.

I. Рассмотрим простейший случай. Введем следующее функциональное преобразование случайных величин $x_1, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned}
&x_1 = x_1 , \\
&x_2 = x_2 , \\
&- - - - - - - - \\
&x_{\ell-1} = x_{\ell-1} , \\
&\hat{x}_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_\ell , \\
&x_{\ell+1} = x_{\ell+1} , \\
&- - - - - - - - - - - - - \\
&x_{\ell+\ell-1} = x_{\ell+\ell-1} , \\
&\hat{x}_2 = x_{\ell+1} + \dots + x_{\ell+\ell-1} + x_{\ell+\ell} , \\
&- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\
&x_{n-k+1} = x_{n-k+1} , \\
&- - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\
&\hat{x}_m = x_{n-k+1} + \dots + x_n .
\end{aligned} \tag{4}$$

Обратные функции однозначны:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_1,\\
&x_2 = x_2,\\
&\text{-----------}\\
&x_{\ell-1} = x_{\ell-1},\\
&x_\ell = \hat{x}_1 - x_1 - \ldots - x_{\ell-1},\\
&x_{\ell+1} = x_{\ell+1},\\
&\text{-----------}\\
&x_{\ell+\ell-1} = x_{\ell+\ell-1},\\
&x_{\ell+\ell} = \hat{x}_2 - x_{\ell+1} - \ldots - x_{\ell+\ell-1},\\
&x_{n-k+1} = x_{n-k+1},\\
&\text{-----------}\\
&x_n = \hat{x}_m - x_{n-k+1} - \ldots - x_{n-1}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Якобиан преобразования от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}, x_\ell, x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell+\ell-1}, x_{\ell+\ell}, \ldots, x_{n-k+1}, \ldots, x_n$ к переменным $x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}, \hat{x}_1, x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell+\ell-1}, \hat{x}_2, \ldots, x_{n-k+1}, \ldots, \hat{x}_m$

$$
D_n = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}, x_\ell, x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell+\ell-1}, x_{\ell+\ell}, \ldots, x_{n-k+1}, \ldots, x_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}, \hat{x}_1, x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell+\ell-1}, \hat{x}_2, \ldots, x_{n-k+1}, \ldots, \hat{x}_m)} = 1. \tag{6}
$$

Тогда совместная ПРВ множества случайных величин $\{x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}, \hat{x}_1, x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell+\ell-1}, \hat{x}_2, \ldots, x_{n-k+1}, \ldots, \hat{x}_m\}$ с учетом (4)-(6) принимает вид:

$$
\begin{aligned}
&W_n(x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}, \hat{x}_1, x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell+\ell-1}, \hat{x}_2, \ldots, x_{n-k+1}, \ldots, \hat{x}_m) =\\
&= \omega_n(x_1, x_2, \ldots, x_{\ell-1}, \hat{x}_1 - x_1 - \ldots - x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell+\ell-1}, \hat{x}_2 - x_{\ell+1} -\\
&- \ldots - x_{\ell+\ell-1}, \ldots, x_{n-k+1}, \ldots, \hat{x}_m - x_{n-k+1} - \ldots - x_{n-1}),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $\omega_n(\ldots)$ определена выражением (3).

Интегрируя (7) по всем переменным за исключением $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, в соответствии с /2/ получим

$$W_m(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega_n(x_1,\dots,x_{f-1},\hat{x}_1-x_1-\dots-x_{f-1},$$

$$x_{f+1},\dots,x_{f+\ell-1},\hat{x}_2-x_{f+1}-\dots-x_{f+\ell-1},\dots,x_{n-k+1},\dots,\hat{x}_m-x_{n-k-1}- \tag{8}$$

$$-x_{n-1})dx_1\dots dx_{f-1}\times dx_{f+1}\dots dx_{f+\ell-1}\times\dots\times dx_{n-k+1}\dots dx_{n-1}=$$

$$=\omega_m(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\dots,\hat{x}_m)_{om},$$

где $\omega_m(\dots)_{om}$ - некоторая функция, получаемая в результате интегрирования в (8), а индексы "о" и "m" (справа) обозначают (во избежание путаницы) соответственно, что переменные $x_1,\dots,x_n$ не перекрываются (имеют нулевое перекрытие) и выполнено $m$ циклов интегрирования.

2. Пусть теперь случайные величины $\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_m$ имеют по одному общему слагаемому (не уменьшая общности рассуждения можно считать, что в каждой паре переменных $\hat{x}_k$ и $\hat{x}_{k+1}$ последнее слагаемое $\hat{x}_k$ совпадает с первым слагаемым $\hat{x}_{k+1}$) т.е.

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= x_1+\dots+x_f,\\
\hat{x}_2 &= x_f+x_{f+1}+\dots+x_{f+\ell},\\
&\text{-----------------------}\\
\hat{x}_{m-1} &= x_{n-k-s}+x_{n-k-s+1}+\dots+x_{n-k},\\
\hat{x}_m &= x_{n-k}+x_{n-k+1}+\dots+x_n.
\end{aligned} \tag{9}$$

Введем, с учетом (9), $m-1$ дополнительную случайную величину:

$$\begin{gathered}
x^*_f = x_f,\\
x^*_{f+\ell}=x_{f+\ell},\dots,x^*_{n-k}=x_{n-k}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Выражение (9) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
&\hat{x}_1 = x_1 + \ldots + x_\ell, \\
&\hat{x}_2 = x^*_\ell + x_{\ell+1} + \ldots + x_{\ell+l}, \\
&------------------ \\
&\hat{x}_{m-1} = x^*_{n-k-s} + x_{n-k-s+1} \ldots + x_{n-k}, \\
&\hat{x}_m = x^*_{n-k} + \ldots + x_n .
\end{aligned} \qquad (11)$$

Совместную ПРВ элементов множеств случайных величин $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{x^*_\ell, \ldots, x^*_{n-k}\}$ можно записать, используя известное представление совместных ПРВ функционально связанных случайных величин /3, 4/ и свойства обобщенных функций /5, 6/:

$$W_{n+m-1}(x_1, \ldots, x_\ell, x^*_\ell, x_{\ell+1}, \ldots, x_{\ell+l}, x^*_{\ell+l},$$

$$x_{\ell+l+1}, \ldots, x_{n-k-s}, x^*_{n-k-s}, x_{n-k-s+1}, \ldots, x_{n-k}, x^*_{n-k}, x_{n-k+1},$$

$$\ldots, x_n) = \omega_n(x_1, \ldots, x_n) \times \delta(x^*_\ell - x_\ell)\,\delta(x^*_{\ell+l} - x_{\ell+l}) \times \qquad (12)$$

$$\times \ldots \times \delta(x^*_{n-k-s-r} - x_{n-k-s-r})\,\delta(x^*_{n-k-s} - x_{n-k-s}) \times$$

$$\times\, \delta(x^*_{n-k} - x_{n-k}),$$

где $\delta(\cdot)$ - дельта-функция.

Учитывая (11) введем следующее функциональное преобразование случайных величин, входящих в (11) и (12):

$$\begin{aligned}
&x_1 = x_1, \\
&x_2 = x_2, \\
&-------- \\
&x_{\ell-1} = x_{\ell-1}, \\
&\hat{x}_1 = x_1 + \ldots + x_\ell, \\
&x^*_\ell = x^*_\ell, \\
&x_{\ell+1} = x_{\ell+1},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{-----------------} \\
&x_{f+\ell-1} = x_{f+\ell-1}, \\
&\hat{x}_2 = x_f^* + x_{f+1} + \ldots + x_f, \\
&\text{-----------------} \\
&x_{n-k}^* = x_{n-k}^* \\
&x_{n-k+1} = x_{n-k+1}, \\
&\text{-----------------} \\
&x_{n-1} = x_{n-1}, \\
&\hat{x}_m = x_{n-k}^* + x_{n-k+1} + \ldots + x_n;
\end{aligned}
\tag{I3}
$$

Обратные функции однозначны:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_1, \\
&x_2 = x_2, \\
&\text{-------} \\
&x_{f-1} = x_{f-1}, \\
&x_f = \hat{x}_1 - x_1 - \ldots - x_{f-1}, \\
&x_f^* = x_f^*, \\
&x_{f+1} = x_{f+1}, \\
&\text{-----------------} \\
&x_{f+\ell-1} = x_{f+\ell-1}, \\
&x_{f+\ell} = \hat{x}_2 - x_f^* - x_{f+1} - \ldots - x_{f+\ell-1}, \\
&\text{-----------------} \\
&x_{n-k}^* = x_{n-k}^*, \\
&x_{n-k+1} = x_{n-k+1}, \\
&\text{-----------------} \\
&x_{n-1} = x_{n-1}, \\
&x_n = \hat{x}_m - x_{n-k}^* - x_{n-k+1} - \ldots - x_{n-1}.
\end{aligned}
\tag{I4}
$$

Якобиан преобразования от случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_{f-1}, x_f, x_f^*, x_{f+1}, \ldots, x_{f+\ell-1}, x_{f+\ell}, \ldots, x_{n-k}^*, x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n$ к случайным величинам $x_1, x_2, \ldots, x_{f-1}, \hat{x}_1, x_f^*, x_{f+1}, \ldots, x_{f+\ell-1}, \hat{x}_2, \ldots, x_{n-k}^*, x_{n-k+1}, \ldots, x_{n-1}, \hat{x}_m$

$$
D_{n+m-1} = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_{f-1},x_f,x_f^*,x_{f+1},\ldots,x_{f+\ell-1},x_{f+\ell},\ldots,x_{n-k}^*,x_{n-k+1},\ldots,x_{n-1},x_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_{f-1},\hat{x}_1,x_f^*,x_{f+1},\ldots,x_{f+\ell-1},\hat{x}_2,\ldots,x_{n-k}^*,x_{n-k+1},\ldots,x_{n-1},\hat{x}_m)} = 1. \tag{I5}
$$

С учетом (II)-(I5) совместная ПРВ элементов множества слу -

чайных величин $\{x_1,\dots,x_{f-1},\hat{x}_1,x^*_f,x_{f+1},\dots,x_{f+\ell-1},\hat{x}_2,\dots,x^*_{n-k},x_{n-k+1},\dots,x_{n-1},\hat{x}_m\}$ имеет вид:

$$W_{n+m-1}(x_1,\dots,x_{f-1},\hat{x}_1,x^*_f,x_{f+1},\dots,x_{f+\ell-1},\hat{x}_2,\dots,x^*_{n-k},x_{n-k+1},\dots$$
$$\dots,x_{n-1},\hat{x}_m)=\delta(x^*_f-x_f)\delta(x^*_{f+\ell}-x_{f+\ell})\times\dots\times\delta(x^*_{n-k-s-r}-x_{n-k-s-r})\times$$
$$\times\delta(x^*_{n-k-s}-x_{n-k-s})\,\delta(x^*_{n-k}-x_{n-k})\times\omega_n(x_1,\dots,x_{f-1},\hat{x}_1-\dots-x_{f-1},\tag{I6}$$
$$x_{f+1},\dots,x_{f+\ell+1},\hat{x}_2-x^*_f-x_{f+1}-\dots-x_{f+\ell-1},\dots,x_{n-k-s-r+1},\dots,$$
$$x_{n-k-s-1},\hat{x}_{m-2}-x^*_{n-k-s-r}-x_{n-k-s-r+1}-\dots-x_{n-k-s-1},x_{n-k-s+1},$$
$$\dots,x_{n-k-1},\hat{x}_{m-1}-x^*_{n-k-s}-x_{n-k-s+1}-\dots-x_{n-k-1},x_{n-k+1},$$
$$\dots,x_{n-1},\hat{x}_m-x^*_{n-k}-x_{n-k+1}-\dots-x_{n-1}).$$

Искомая совместная ПРВ множества случайных величин $\{\hat{x}_1,\hat{x}_2,\dots,\hat{x}_m\}$ получается из (I6) интегрированием по "лишним" переменным:

$$W_m(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\dots,\hat{x}_m)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x^*_f-x_f)\delta(x^*_{f-\ell}-x_{f+\ell})\times\dots\times\delta(x^*_{n-k-s-r}-$$
$$-x_{n-k-s-r})\delta(x^*_{n-k-s}-x_{n-k-s})\delta(x^*_{n-k}-x_{n-k})\omega_n(x_1,\dots,x_{f-1},\hat{x}_1-x_1-$$
$$-\dots-x_{f-1},x_{f+1},\dots,x_{f+\ell-1},\hat{x}_2-x^*_f-x_{f+1}-\dots-x_{f+\ell-1},\dots,x_{n-k-s-r+1},\tag{I7}$$
$$\dots,x_{n-k-s-1},\hat{x}_{m-2}-x^*_{n-k-s-r}-x_{n-k-s-r+1}-\dots-x_{n-k-s-1},x_{n-k-s+1},\dots,$$
$$x_{n-k-1},\hat{x}_{m-1}-x^*_{n-k-s}-x_{n-k-s+1}-\dots-x_{n-k-1},x_{n-k+1},\dots,x_{n-1},\hat{x}_m-x^*_{n-k}-$$
$$-x_{n-k+1}-\dots-x_{n-1})dx_1\dots dx_{f-1}\times dx^*_f dx_{f+1}\dots dx_{f+\ell-1}\times\dots\times dx^*_{n-k-s-r}\times$$
$$\times dx_{n-k-s-r+1}\dots dx_{n-k-s-1}dx^*_{n-k-s}dx_{n-k-s+1}\dots dx_{n-k-1}\times dx^*_{n-k}dx_{n-k+1}\dots dx_{n-1}.$$

Выполнение преобразования в (I7) получается наиболее простым, если воспользоваться нижеследующем методикой.

При выполнении первого (из $m$ ) цикла интегрирования (по переменным $x_{n-1},x_{n-2},\dots,x_{n-k+1},x^*_{n-k}$ ) на предпоследнем шаге интегрирования будем иметь:

$$W_m(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\dots,\hat{x}_m)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x_\ell^*-x_1)\delta(x_{\ell+\ell}^*-x_{\ell+\ell})\dots\delta(x_{n-k-s-r}^*-x_{n-k-s-r})\times$$
$$\times\delta(x_{n-k-s}^*-x_{n-k-s})\delta(x_{n-k}^*-x_{n-k})\omega_{n-k+1}(x_1,\dots,x_{\ell-1},\hat{x}_1-x_1-\dots-x_{\ell-1},x_{\ell+1},$$
$$\dots,x_{\ell+\ell-1},\hat{x}_2-x_\ell^*-x_{\ell+1}-\dots-x_{\ell+\ell-1},\dots,x_{n-k-s-r+1},\dots,x_{n-k-s-1},\hat{x}_{m-2}- \tag{I8}$$
$$-x_{n-k-s-r}^*-x_{n-k-s-r+1}-\dots-x_{n-k-s-1},x_{n-k-s+1},\dots,x_{n-k-1},\hat{x}_{m-1}-$$
$$-x_{n-k-s}^*-x_{n-k-s+1}-\dots-x_{n-k-1},\hat{x}_m-x_{n-k}^*)_{F11}dx_1\dots dx_{\ell-1}\times dx_\ell^*\times$$
$$\times dx_{\ell+1}\dots dx_{\ell+\ell-1}\times\dots\times dx_{n-k-s-r}^*dx_{n-k-s-r+1}\dots dx_{n-k-s-1}\times dx_{n-k-s}^*\times$$
$$\times dx_{n-k-s+1}\dots dx_{n-k-1}\times dx_{n-k}^*,$$

где $\omega_{n-k+1}(\dots)_{F11}$ – некоторая первообразная (индекс F справа ) функции $\omega_n(\dots)$ при минимальном (первой после F индекс "1") перекрытии переменных $\hat{x}_k$ после интегрирования по переменным $x_{n-1}$, $x_{n-2},\dots,x_{n-k+1}$ первого цикла (крайний справа индекс "1").

Воспользовавшись в (I8) фильтрующим свойством $\delta$ -функц и и $\delta(x_{n-k}^*-x_{n-k})$ и заменяя затем $x_{n-k}$ его значением из (I4) ( $x_{n-k}=\hat{x}_{m-1}-x_{n-k-s}^*-x_{n-k-s+1}-\dots-x_{n-k-1}$ ) получим окончательный результат после выполнения первого цикла интегрирования:

$$W_m(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\dots,\hat{x}_m)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x_\ell^*-x_\ell)\delta(x_{\ell+\ell}^*-x_{\ell+\ell})\dots\delta(x_{n-k-s-r}^*-x_{n-k-s-r})\times$$
$$\times\delta(x_{n-k-s}^*-x_{n-k-s})\omega_{n-k+1}(x_1,\dots,x_{\ell-1},\hat{x}_1-x_1-\dots-x_{\ell-1},x_{\ell+1},\dots,x_{\ell+\ell-1},$$
$$\hat{x}_2-x_\ell^*-x_{\ell+1}-\dots-x_{\ell+\ell-1},\dots,x_{n-k-s-r+1},\dots,x_{n-k-s-1},\hat{x}_{m-2}-$$
$$-x_{n-k-s-r}^*-x_{n-k-s-r+1}-\dots-x_{n-k-s-1},x_{n-k-s+1},\dots,x_{n-k-1}, \tag{I9}$$
$$\hat{x}_{m-1}-x_{n-k-s}^*-x_{n-k+1}-\dots-x_{n-k-1},\hat{x}_m-(\hat{x}_{m-1}-x_{n-k-s}^*-x_{n-k-s+1}-$$
$$-\dots-x_{n-k-1}))_{11}dx_1\dots dx_{\ell-1}\times dx_\ell^*dx_{\ell+1}\dots dx_{\ell+\ell-1}\times\dots\times dx_{n-k-s-r}^*\times$$
$$\times dx_{n-k-s-r+1}\dots dx_{n-k-s-1}\times dx_{n-k-s}^*dx_{n-k-s+1}\times\dots\times dx_{n-k-1}.$$

При выполнении второго цикла интегрирования (по переменным $x_{n-k-1}, \ldots, x_{n-k-s+1}, x^*_{n-k-s}$) на предпоследнем шаге интегрирования будем иметь:

$$W_m(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x^*_f - x_f)\,\delta(x^*_{f+\ell} - x_{f+\ell}) \times \ldots$$
$$\ldots \times \delta(x^*_{n-k-s-r} - x_{n-k-s-r})\,\delta(x^*_{n-k-s} - x_{n-k-s})\,\omega_{n-k-s+2}\Big(x_1,$$
$$\ldots, x_{f-1}, \hat{x}_1 - x_1 - \ldots - x_{f-1}, x_{f+1}, \ldots, x_{f+\ell-1}, \hat{x}_2 - x^*_f - x_{f+1} - \tag{20}$$
$$- \ldots - x_{f+\ell-1}, \ldots, x_{n-k-s-r+1}, \ldots, x_{n-k-s-1}, \hat{x}_{m-2} - x^*_{n-k-s-r} -$$
$$- x_{n-k-s-r+1} - \ldots - x_{n-k-s-1}, \hat{x}_{m-1} - x^*_{n-k-s}, \hat{x}_m - (\hat{x}_{m-1} -$$
$$- x^*_{n-k-s})\Big)_{F12} dx_1 \ldots dx_{f-1} \times dx^*_f\, dx_{f+1} \ldots dx_{f+\ell-1} \times \ldots \times$$
$$\times dx^*_{n-k-s-r} \times dx_{n-k-s-r+1} \ldots dx_{n-k-s-1} \times dx^*_{n-k-s}\,.$$

Воспользовавшись в (20) фильтрующим свойством $\delta$-функции $\delta(x^*_{n-k-s} - x_{n-k-s})$ и заменяя $x_{n-k-s}$ его значением из (I4) ($x_{n-k-s} = \hat{x}_{m-2} - x^*_{n-k-s-r} - x_{n-k-s-r+1} - \ldots - x_{n-k-s-1}$) получим окончательный результат после выполнения второго цикла интегрирования:

$$W_m(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x^*_f - x_f)\,\delta(x^*_{f+\ell} - x_{f+\ell}) \times \ldots \times$$
$$\times \delta(x^*_{n-k-s-r} - x_{n-k-s-r})\,\omega_{n-k-s+2}\Big\{x_1, \ldots, x_{f-1}, \hat{x}_1 - x_1 - \ldots - x_{f-1},$$
$$x_{f+1}, \ldots, x_{f+\ell-1}, \hat{x}_2 - x^*_f - x_{f+1} - \ldots - x_{f+\ell-1}, \ldots, x_{n-k-s-r+1}, \ldots, \tag{21}$$
$$x_{n-k-s-1}, \hat{x}_{m-2} - x^*_{n-k-s-r} - x_{n-k-s-r+1} - \ldots - x_{n-k-s-1}, \hat{x}_{m-1} -$$
$$-(\hat{x}_{m-2} - x^*_{n-k-s-r} - x_{n-k-s-r+1} - \ldots - x_{n-k-s-1}), \hat{x}_m - \Big[\hat{x}_{m-1} -$$
$$-(\hat{x}_{m-2} - x^*_{n-k-s-r} - x_{n-k-s-r+1} - \ldots - x_{n-k-s-1})\Big]\Big\}_{12} dx_1 \ldots dx_{f-1} \times$$
$$\times dx^*_f\, dx_{f+1} \ldots dx_{f+\ell-1} \times \ldots \times dx^*_{n-k-s-r}\, dx_{n-k-s-r+1} \ldots dx_{n-k-s-1}.$$

Последовательно применяя рассмотренную методику интегрирования, после выполнения последнего цикла интегрирования (по переменным $x_{f-1}, \ldots, x_1$) окончательно получим:

$$W_m(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m) = \omega_m\Big(\hat{x}_1, \hat{x}_2 - \hat{x}_1, \hat{x}_3 - \hat{x}_2 + \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m - \hat{x}_{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1}\hat{x}_1\Big)_{1m} . \tag{22}$$

3. Пусть каждые две переменные $\hat{x}_k$ и $\hat{x}_{k+1}$ имеют по два общих слагаемых (последние два слагаемых $\hat{x}_k$ являются первыми слагаемыми $\hat{x}_{k+1}$)

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= x_1 + \ldots + x_f , \\ \hat{x}_2 &= x_{f-1} + x_f + x_{f+1} + \ldots + x_{f+\ell} , \\ &\text{-----------------------------} \\ \hat{x}_{m-1} &= x_{n-k-s-1} + x_{n-k-s} + x_{n-k-s+1} + \ldots + x_{n-k} , \\ \hat{x}_m &= x_{n-k-1} + x_{n-k} + x_{n-k+1} + \ldots + x_n . \end{aligned} \tag{23}$$

Введем $2(m-1)$ новые переменные:

$$x^*_{f-1} = x_{f-1},\ x^*_f = x_f,\ x^*_{f+\ell-1} = x_{f+\ell-1},\ x^*_{f+\ell} = x_{f+\ell}, \ldots, \tag{24}$$
$$x^*_{n-k-s-1} = x_{n-k-s-1},\ x^*_{n-k-s} = x_{n-k-s},\ x^*_{n-k-1} = x_{n-k-1},\ x^*_{n-k} = x_{n-k} .$$

По аналогии с (I2) совместная ПРВ элементов множеств случайных величин $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{x^*_{f-1}, \ldots, x^*_{n-k}\}$ может быть записана в форме:

$$W_{n+2(m-1)}(x_1, \ldots, x_f, x^*_{f-1}, x^*_f, x_{f+1}, \ldots, x_{f+\ell}, x^*_{f+\ell-1}, x^*_{f+\ell},$$
$$x_{f+\ell+1}, \ldots, x^*_{n-k-s-1}, x^*_{n-k-s}, x_{n-k-s+1}, \ldots, x_{n-k}, x^*_{n-k-1}, x^*_{n-k}, x_{n-k+1}, \tag{25}$$
$$\ldots, x_n) = \omega_n(x_1, \ldots, x_n)\,\delta(x^*_{f-1} - x_{f-1})\,\delta(x^*_f - x_f)\,\delta(x^*_{f+\ell-1} - x_{f+\ell-1}) \times$$

$$\times\,\delta(x^*_{f+\ell}-x_{f+\ell})\times\ldots\times\delta(x^*_{n-k-s-1}-x_{n-k-s-1})\,\delta(x^*_{n-k-s}-x_{n-k-s})\times$$

$$\times\,\delta(x^*_{n-k-1}-x_{n-k-1})\,\delta(x^*_{n-k}-x_{n-k}),$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция.

Введем функциональное преобразование (с учетом (23) и (24)):

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_1,\\
&x_2 = x_2,\\
&\text{-------}\\
&x_{f-1} = x_{f-1},\\
&\hat{x}_1 = x_1 + \ldots + x_f,\\
&x^*_{f-1} = x^*_{f-1},\\
&x^*_f = x^*_f,\\
&x_{f+1} = x_{f+1},\\
&\text{-----------}\\
&x_{f+\ell-1} = x_{f+\ell-1},\\
&\hat{x}_2 = x^*_{f-1} + x^*_f + x_{f+1} + \ldots + x_{f+\ell},\\
&\text{---------------------}\\
&x^*_{n-k-1} = x^*_{n-k-1},\\
&x^*_{n-k} = x^*_{n-k},\\
&x_{n-k+1} = x_{n-k+1},\\
&\text{--------------}\\
&x_{n-1} = x_{n-1},\\
&\hat{x}_m = x^*_{n-k-1} + x^*_{n-k} + x_{n-k+1} + \ldots + x_n.
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

Обратные функции однозначны:

$$
\begin{aligned}
&x_1 = x_1,\\
&-----\\
&x_{\ell-1} = x_{\ell-1},\\
&x_\ell = \hat{x}_1 - x_1 - \ldots - x_{\ell-1},\\
&x^*_{\ell-1} = x^*_{\ell-1},\\
&x^*_\ell = x^*_\ell,\\
&x_{\ell+1} = x_{\ell+1},\\
&-------\\
&x_{\ell+\ell-1} = x_{\ell+\ell-1},\\
&x_{\ell+\ell} = \hat{x}_2 - x^*_{\ell-1} - x^*_1 - x_{\ell+1} - \ldots - x_{\ell+\ell-1},\\
&-------------\\
&x^*_{n-k-1} = x^*_{n-k-1},\\
&x^*_{n-k} = x^*_{n-k},\\
&x_{n-k+1} = x_{n-k+1},\\
&---------\\
&x_n = \hat{x}_m - x^*_{n-k-1} - x^*_{n-k} - x_{n-k+1} - \ldots - x_{n-1}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Якобиан преобразования от случайных величин $x_1,\ldots,x_\ell, x^*_{\ell-1}, x^*_\ell, x_{\ell+1},\ldots, x_{\ell+1},\ldots, x_{\ell+\ell},\ldots, x^*_{n-k-1}, x^*_{n-k}, x_{n-k+1},\ldots, x_n$ к случайным величинам $x_1,\ldots,x_{\ell-1}, \hat{x}_1, x^*_{\ell-1}, x^*_\ell, x_{\ell+1},\ldots, x_{\ell+\ell-1}, \hat{x}_2,\ldots, x^*_{n-k-1}, x^*_{n-k}, x_{n-k+1},\ldots, x_{n-1}, \hat{x}_m$

$$
D_{n+2(m-1)} = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_\ell,x^*_{\ell-1},x^*_\ell,x_{\ell+1},\ldots,x_{\ell+\ell},\ldots,x^*_{n-k-1},x^*_{n-k},x_{n-k+1},\ldots,x_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_{\ell-1},\hat{x}_1,x^*_{\ell-1},x^*_\ell,x_{\ell+1},\ldots,x_{\ell+\ell-1},\hat{x}_2,\ldots,x^*_{n-k},x_{n-k+1},\ldots,x_{n-1},\hat{x}_m)} = 1. \tag{28}
$$

С учетом (23)-(28) совместная ПРВ множества случайных величин $\{x_1,\ldots,x_{\ell-1},\hat{x}_1,x^*_{\ell-1},x^*_\ell,x_{\ell+1},\ldots,x_{\ell+\ell-1},\hat{x}_2,\ldots,x^*_{n-k-1},x^*_{n-k},x_{n-k+1},\ldots,x_{n-1},\hat{x}_m\}$ имеет вид:

$$
W_{n+2(m-1)}(x_1,\ldots,x_{\ell-1},\hat{x}_1,x^*_{\ell-1},x^*_\ell,x_{\ell+1},\ldots,x_{\ell+\ell-1},\hat{x}_2,\ldots,
$$

$$
x^*_{n-k-1},x^*_{n-k},x_{n-k+1},\ldots,x_{n-1},\hat{x}_m) = \delta(x^*_{\ell-1}-x_{\ell-1})\delta(x^*_\ell - x_\ell)\times
$$

$$\times\delta(x^*_{\ell+\varrho-1}-x_{\ell+\varrho-1})\delta(x^*_{\ell+\varrho}-x_{\ell+\varrho})\times\ldots\times\delta(x^*_{n-k-s-1}-x_{n-k-s-1})\times$$
$$\times\delta(x^*_{n-k-s}-x_{n-k-s})\delta(x^*_{n-k-1}-x_{n-k-1})\delta(x^*_{n-k}-x_{n-k})\times$$
$$\times\omega_n\big(x_1,\ldots,x_{\ell-1},\hat{x}_1-x_1-\ldots-x_{\ell-1},x_{\ell+1},\ldots,x_{\ell+\varrho-1},\hat{x}_2- \qquad (29)$$
$$-x^*_{\ell-1}-x^*_{\ell}-x_{\ell+1}-\ldots-x_{\ell+\varrho-1},\ldots,x_{n-k-s+1},\ldots,x_{n-k-1},\hat{x}_{m-1}-$$
$$-x^*_{n-k-s-1}-x^*_{n-k-s}-x_{n-k-s+1}-\ldots-x_{n-k-1},x_{n-k+1},\ldots,$$
$$x_{n-1},\hat{x}_m-x^*_{n-k-1}-x^*_{n-k}-x_{n-k+1}-\ldots-x_{n-1}\big).$$

Интегрирование выражения (29) по переменным $x_1,\ldots,x_{\ell-1},x^*_{\ell-1},x^*_{\ell}$, $x_{\ell+1},\ldots,x_{\ell+\varrho-1},\ldots,x^*_{n-k-1},x^*_{n-k},x_{n-k-1},\ldots,x_{n-1}$ дает искомую совместную ПРВ переменных $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_m$:

$$W_m(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_m)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x^*_{\ell-1}-x_{\ell-1})\delta(x^*_{\ell}-x_{\ell})\times$$
$$\times\delta(x^*_{\ell+\varrho-1}-x_{\ell+\varrho-1})\delta(x^*_{\ell+\varrho}-x_{\ell+\varrho})\times\ldots\times\delta(x^*_{n-k-s-1}-x_{n-k-s-1})\times$$
$$\times\delta(x_{n-k-s}-x_{n-k-s})\delta(x^*_{n-k-1}-x_{n-k-1})\delta(x^*_{n-k}-x_{n-k})\times \qquad (30)$$
$$\times\omega_n(x_1,\ldots,x_{\ell-1},\hat{x}_1-x_1-\ldots-x_{\ell-1},x_{\ell+1},\ldots,x_{\ell+\varrho-1},\hat{x}_2-$$
$$-x^*_{\ell-1}-x^*_{\ell}-x_{\ell+1}-\ldots-x_{\ell+\varrho-1},\ldots,x_{n-k-s+1},\ldots,x_{n-k-1},$$
$$\hat{x}_{m-1}-x^*_{n-k-s-1}-x^*_{n-k-s}-x_{n-k-s+1}-\ldots-x_{n-k-1},x_{n-k+1},$$
$$\ldots,x_{n-1},\hat{x}_m-x^*_{n-k-1}-x^*_{n-k}-x_{n-k+1}-\ldots-x_{n-1})dx_1\ldots dx_{\ell-1}\times$$
$$\times dx^*_{\ell-1}dx^*_{\ell}dx_{\ell+1}\ldots dx_{\ell+\varrho-1}\times\ldots\times dx^*_{n-k-1}dx^*_{n-k}dx_{n-k+1}\ldots dx_{n-1}.$$

Выполняя в (30) интегрирование в соответствии с изложенной в п.2 методикой, окончательно получим:

$$W_m(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\ldots,\hat{x}_m)=\omega_m(\hat{x}_1,\hat{x}_2-\hat{x}_1,\hat{x}_3-\hat{x}_2+\hat{x}_1,$$
$$\ldots,\hat{x}_m-\hat{x}_{m-1}+\ldots+(-1)^{m-1}\hat{x}_1)_{2m}. \qquad (31)$$

Сравнивая (31) и (22), нетрудно видеть, что плотности распределения вероятности $W_m(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m)$ различно введенных случайных величин $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m$ имеют один и тот же вид.

Можно показать, что дальнейшее увеличение глубины перекрытия случайных величин $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m$ приводит к аналогичным результатам, лишь усложняя вычисления.

Изложенная методика применима к случаям, когда переменные $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m$ имеют разное число слагаемых и различную глубины перекрытия. Так, если $r$ - минимальное число слагаемых в переменных $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m$, то окончательное выражение для совместной ПРВ $W_m(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m)$ для случая, когда $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m$ отличаются друг от друга как минимум одним слагаемым, может быть записана в форме:

$$W_m(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m) =$$

$$= \omega_m\left(\hat{x}_1, \hat{x}_2 - \hat{x}_1, \hat{x}_3 - \hat{x}_2 + \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m - \hat{x}_{m-1} + \ldots + (-1)^{m-1}\hat{x}_1\right)_{r-1,m}.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе задача отыскания совместной плотности распределения вероятности сумм случайных величин решена в обобщенном виде при условии, что эти суммы отличаются друг от друга как минимум одним слагаемым при произвольном числе слагаемых в них. Рассмотрен один из предельных случаев, когда такие суммы не имеют общих слагаемых. Другой предельный случай, когда все суммы совпадают между собой, сводится к задаче отыскания одномерной ПРВ суммы случайных величин, уже рассмотренной ранее (см., например, /I, 2/).

## ЛИТЕРАТУРА


I. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. - М.: Сов.радио, 1978. - 376 с.

2. Есипенко В.И., Щуко О.Б. Одномерная плотность распределения вероятности суммы случайных величин//Препринт № 345. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1992.

3. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Сов.радио, 1966. - 678 с.

4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. - М.: Сов.радио, 1969. - Т.I. - 752 с.

5. Микусинский Я., Сикорский Р. Элементарная теория обобщенных функций. - М.: ИЛ, 1959. - С.78.

6. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. - М.: ФМ, 1959.

Дата поступления статьи
7 мая 1994 г.