Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Государственного комитета РФ по высшему образованию

П р е п р и н т № 391

МНОГОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В.И.Есипенко

Нижний Новгород, 1994

Е с и п е н к о В. И.

МНОГОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ//Препринт № 391. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1994. - 19 с.

УДК 621.372.061.2:519.21.

Получена многомерная плотность распределения вероятности мгновенных значений импульсной характеристики линейной системы первого порядка со случайными параметрами. Исследован подкласс линейных систем, импульсные характеристики которых не содержат в своем составе дельта-функцию. Указана связь полученных результатов с линейными системами, импульсные характеристики которых содержат дельта-функцию. Рассмотрен случай, когда один из коэффициентов дифференциального уравнения, описывающего линейную систему, равен постоянной величине. Результаты кокретизированы для RC-интегратора со случайными параметрами.

Подписано в печать 25.05.94 г. Формат 60 x 84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,25 усл.п.л.
Заказ 5400. Тираж 65.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ

Линейные системы со случайными параметрами занимают заметное место в классе линейных систем, являясь составной частью линейных систем с переменными параметрами. Статистический анализ таких линейных систем представляет собой задачу огромной сложности, базируется на использовании методов теории чувствительности линейных систем, при этом приходится ограничиваться в основном отысканием математического ожидания, дисперсии, корреляционной функции и спектральной плотности выходного случайного процесса /I, 2/.

Решение задачи отыскания статистических характеристик случайных процессов на выходах линейных систем становится в значительной мере проще и нагляднее, если определены статистические характеристики самих линейных систем.

В данной работе для описания в вероятностной области линейной системы первого порядка со случайными параметрами получена многомерная плотность распределения вероятности (ПРВ) мгновенных значений ее импульсной характеристики.

В рассматриваемом классе линейных систем можно выделить два подкласса:

I) линейные системы, импульсные характеристики которых не содержат в своем составе дельта-функцию;

2) линейные системы, импульсные характеристики которых содержат дельта-функцию.

Здесь мы ограничимся рассмотрением линейных систем первого подкласса и отметим связь полученных результатов со статистическими характеристиками линейных систем второго подкласса.

Множество линейных систем первого подкласса описывается линейным дифференциальным уравнением /I/

$$a_1(t)\,\frac{dx(t_0,t)}{dt} + a_0(t)x(t_0,t) = \xi(t) \qquad \text{(I)}$$

с начальным условием

$$x(t_0,t)\Big|_{t=t_{0-}} = x_{80}, \qquad (2)$$

где $\xi(t)$ и $x(t_0, t)$ - соответственно входное воздействие и отклик линейной системы; $a_1(t)$ и $a_0(t)$ - переменные коэффициенты уравнения (I), "медленные" по сравнению с $x(t_0, t)$, т.е. $\Delta f_x \gg \Delta f_{ai}$, Δf_x и Δf_{ai} - ширина спектров функций $x(t_0, t)$ и $a_i(t)$ соответственно; $i = 0; 1$.

Импульсные характеристики таких линейных систем выражаются через коэффициенты уравнения (I):

$$h(t_0,t)=\frac{1}{a_1(t)}\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\frac{a_0(\tau)}{a_1(\tau)}d\tau\right]\approx\frac{1}{a_1(t)}\exp\left[-\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{0k}}{a_{1k}}\Delta\tau_k\right], \quad (3)$$

где в показателе экспоненты в правой части принята аппроксимация интеграла "нижней" интегральной суммой; k, n - индексы суммирования; a_{0k} и a_{1k} - значения коэффициентов $a_0(t)$ и $a_1(t)$ соответственно в моменты времени $t_k \geqslant t_0$; $\Delta\tau_k = t_{k+1} - t_k$.

В дальнейшем будет показано, что такая аппроксимация хорошо согласуется с аппроксимацией интеграла Дюамеля (см., например, 3), в который входит $h(t_0, t)$ "верхней" интегральной суммой.

Для линейных систем со случайными параметрами коэффициенты $a_0(t)$ и $a_1(t)$ из (I)-(3), а следовательно и $h(t_0, t)$, в общем случае являются случайными функциями времени, а их значения a_{0k}, a_{1k} и $h(t_0, t_k) = h_k$ - случайными величинами.

Анализ показывает, что каждое значение a_{1k} случайной функции $a_1(t)$ входит в (3) дважды, и для отыскания многомерной размерности $(n + 1)$ плотности распределения вероятности (ПРВ) мгновенных значений импульсной характеристики $h(t_0, t)$ необходимо задание совместной размерности $3(n + 1)$ плотности распределения вероятности значений коэффициентов $a_0(t)$ и $a_1(t)$:

$$W_{3(n+1)}(a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}, a_0, a_1, \dots, a_n; t_0, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= W^*_{2(n+1)}(a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}; t_0, t_1, \dots, t_n) \times \quad (4)$$

$$\times \prod_{k=0}^{n} \delta(a_k - a_{1k}),$$

где в целях удобства и избежания путаницы a_k есть повторное значение a_{1k}; случайные величины a_{10}, a_{00}, a_0 соответствуют моменту времени t_0; a_{11}, a_{01}, a_1 – моменту времени t_1 и т.д.

В (4) использовано правило записи совместной ПРВ функционально связанных случайных величин $a_k = f(a_{1k})$ /4/. В нашем случае $a_k = a_{1k}$.

Отыскание совместной ПРВ $W^*_{2(n+1)}(a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}; t_0, t_1, \dots, t_n)$ элементов множеств $\{a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}\}$ и $\{a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}\}$ представляет собой самостоятельную задачу. Для ее решения необходимо задание (или определение) на основе тех или иных исходных данных многомерных размерности $(n + 1)$ ПРВ значений каждого из параметров линейной системы. Общий подход в решении этой задачи состоит в отыскании по заданным многомерным ПРВ параметров линейной системы многомерных ПРВ соответствующей размерности функционально связанных с этими параметрами коэффициентов $a_0(t)$ и $a_1(t)$ дифференциального уравнения (I) этой линейной системы. Для различных линейных систем функциональная связь коэффициентов $a_0(t)$ и $a_1(t)$ уравнения (I) с параметрами соответствующей линейной системы различна. Так, например, для RC-интегратора $a_0(t) \equiv 1$, $a_1(t) = R(t) \cdot C(t)$; для LR-цепи $a_0(t) \equiv 1$, $a_1(t) = L(t) / R(t)$ и т.д.

В дальнейшем на конкретном примере мы рассмотрим решение задачи отыскания многомерной ПРВ $W^*_{2(n+1)}(a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}; t_0, t_1, \dots, t_n)$ и тем самым разработает необходимую методику. Здесь же полагаем, что $W^*_{2(n+1)}(\dots)$ задана.

Для определенности полагаем также, что случайные величины $a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}$; $a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}$; $a_0, a_1, \dots, a_n$ принимают действительные значения в интервале от $-\infty$ до $+\infty$.

Введем следующее функциональное преобразование случайных величин $a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}$, $a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}$, $a_0, a_1, \dots, a_n$, входящих в (4):

$$
\begin{aligned}
&v_0 = 1 / a_{10}, \\
&v_1 = 1 / a_{11}, \\
&\text{-----------} \\
&v_n = 1 / a_{1n}, \qquad\qquad (5) \\
&a_{00} = a_{00},
\end{aligned}
$$

$$a_{01} = a_{01},$$
$$\text{-------}$$
$$a_{0n} = a_{0n},$$
$$a_0 = a_0,$$
$$\text{-------}$$
$$a_n = a_n.$$

Обратные функции однозначны:

$$\begin{aligned}
a_{10} &= 1/\upsilon_0,\\
a_{11} &= 1/\upsilon_1,\\
&\text{---------}\\
a_{1n} &= 1/\upsilon_n,\\
a_{00} &= a_{00},\\
a_{01} &= a_{01},\\
&\text{---------}\\
a_{0n} &= a_{0n},\\
a_0 &= a_0,\\
&\text{---------}\\
a_n &= a_n.
\end{aligned} \tag{6}$$

Якобиан преобразования от случайных величин $a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}$, $a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ к случайным величинам $\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$, $a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$D_{3(n+1),1} = \frac{\partial(a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}, a_0, a_1, \ldots, a_n)}{\partial(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}, a_0, a_1, \ldots, a_n)} =$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\upsilon_0^2\, \upsilon_1^2 \ldots \upsilon_n^2}. \tag{7}$$

В соответствии с общим правилом функционального преобразования случайных величин /4/ совместная ПРВ случайных величин υ_0, $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$, $a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ с учетом (4)-(7) имеет вид

$$W_{3(n+1)}(\upsilon_0,\upsilon_1,\dots,\upsilon_n,\ a_{00},a_{01},\dots,a_{0n},a_0,a_1,\dots,a_n;\ t_0,t_1,\dots,t_n)=$$

$$=W^{*}_{2(n+1)}\left(\frac{1}{\upsilon_0},\frac{1}{\upsilon_1},\dots,\frac{1}{\upsilon_n},\ a_{00},a_{01},\dots,a_{0n};\ t_0,t_1,\dots,t_n\right)\times$$

$$\times\prod_{\kappa=0}^{n}\delta\left(a_\kappa-\frac{1}{\upsilon_\kappa}\right)\left|\frac{1}{\upsilon_0^2\,\upsilon_1^2\dots\upsilon_n^2}\right|. \tag{8}$$

Теперь выполним функциональное преобразование случайных величин, входящих в (8):

$$\begin{aligned}
\upsilon_0 &= \upsilon_0,\\
&\text{- - - - - - - -}\\
\upsilon_n &= \upsilon_n,\\
u_0 &= a_{00}/a_0,\\
u_1 &= a_{01}/a_1,\\
&\text{- - - - - - - - -}\\
u_n &= a_{0n}/a_n,\\
a_0 &= a_0,\\
&\text{- - - - - - - - -}\\
a_n &= a_n.
\end{aligned} \tag{9}$$

Обратные функции однозначны:

$$\begin{aligned}
\upsilon_0 &= \upsilon_0,\\
&\text{- - - - - - - - -}\\
\upsilon_n &= \upsilon_n,\\
a_{00} &= u_0 a_0,\\
a_{01} &= u_1 a_1,\\
&\text{- - - - - - - - -}\\
a_{0n} &= u_n a_n,\\
a_0 &= a_0,\\
&\text{- - - - - - - - -}\\
a_n &= a_n.
\end{aligned} \tag{10}$$

Якобиан преобразования от случайных величин $v_0, v_1, \ldots, v_n$, $a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}, a_0, a_1, \ldots, a_n$ к случайным величинам $v_0, v_1, \ldots, v_n$, $u_0, u_1, \ldots, u_n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$D_{3(n+1),2} = \frac{\partial(v_0, v_1, \ldots, v_n, a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}, a_0, a_1, \ldots, a_n)}{\partial(v_0, v_1, \ldots, v_n, u_0, u_1, \ldots, u_n, a_0, a_1, \ldots, a_n)} = a_0 a_1 \ldots a_n \quad (\text{II})$$

В соответствии с общим правилом функционального преобразования случайных величин совместная ПРВ случайных величин v_0, v_1, $\ldots v_n$, $u_0, u_1, \ldots, u_n, a_0, a_1, \ldots, a_n$ имеет вид

$$W_{3(n+1)}(v_0, v_1, \ldots, v_n, u_0, u_1, \ldots, u_n, a_0, a_1, \ldots, a_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= W^*_{2(n+1)}\left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \ldots, \frac{1}{v_n}, u_0 \cdot a_0, u_1 \cdot a_1, \ldots, u_n \cdot a_n; t_0, t_1, \ldots, t_n\right) \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{n} \delta\left(a_k - \frac{1}{v_k}\right) \left|\frac{a_0 a_1 \ldots a_n}{v_0^2 v_1^2 \ldots v_n^2}\right| . \quad (\text{I2})$$

Интегрируя (I2) по $a_0, a_1, \ldots, a_n$, получим:

$$W_{2(n+1)}(v_0, v_1, \ldots, v_n, u_0, u_1, \ldots, u_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \left|\frac{1}{v_0^2 v_1^2 \ldots v_n^2}\right| \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} W^*_{2(n+1)}\left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \ldots, \frac{1}{v_n}, u_0 a_0, u_1 a_1, \ldots,\right.$$

$$\left. u_n a_n; t_0, t_1, \ldots, t_n\right) \prod_{k=0}^{n} \delta\left(a_k - \frac{1}{v_k}\right) |a_0 a_1 \ldots a_n| \, da_0 \, da_1 \ldots \quad (\text{I3})$$

$$\ldots da_n = W^*_{2(n+1)}\left(\frac{1}{v_0},\frac{1}{v_1},\ldots,\frac{1}{v_n},\frac{u_0}{v_0},\frac{u_1}{v_1},\ldots,\frac{u_n}{v_n};t_0,t_1,\ldots,t_n\right)\times$$

$$\times\left|\frac{1}{v_0^3\,v_1^3\ldots v_n^3}\right|.$$

Теперь используем следующее функциональное преобразование случайных величин $v_0, v_1, \ldots, v_n$, $u_0, u_1, \ldots, u_n$, входящих в (I3):

$$\begin{aligned} v_0 &= v_0,\\ &\text{-------}\\ v_n &= v_n,\\ z_0 &= u_0\Delta\tau_0,\\ z_1 &= u_0\Delta\tau_1,\\ &\text{-------}\\ z_n &= u_n\Delta\tau_n, \end{aligned} \tag{I4}$$

где $\Delta\tau_k$ взято из (3).

Обратные функции однозначны:

$$\begin{aligned} v_0 &= v_0,\\ &\text{------}\\ v_n &= v_n,\\ u_0 &= z_0/\Delta\tau_0,\\ u_1 &= z_1/\Delta\tau_1,\\ &\text{----------}\\ u_n &= z_n/\Delta\tau_n. \end{aligned} \tag{I5}$$

Якобиан преобразования от случайных величин $v_0, v_1, \ldots, v_n$, $u_0, u_1, \ldots, u_n$ к случайным величинам $v_0, v_1, \ldots, v_n$, $z_0, z_1, \ldots, z_n$:

$$D_{2(n+1),1} = \frac{\partial(v_0,v_1,\ldots,v_n,u_0,u_1,\ldots,u_n)}{\partial(v_0,v_1,\ldots,v_n,z_0,z_1,\ldots,z_n)} = \frac{1}{\Delta\tau_0\Delta\tau_1\ldots\Delta\tau_n}. \tag{I6}$$

С учетом (I3)-(I6) совместная ПРВ случайных величин $v_0, v_1, \ldots,$

$v_n, z_0, z_1, \ldots, z_n$ принимает форму

$$W_{2(n+1)}(v_0, v_1, \ldots, v_n, z_0, z_1, \ldots, z_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= W^*_{2(n+1)}\left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \ldots, \frac{1}{v_n}, \frac{z_0}{v_0 \Delta\tau_0}, \frac{z_1}{v_1 \Delta\tau_1}, \ldots, \frac{z_n}{v_n \Delta\tau_n}; t_0, t_1, \ldots, t_n\right) \times$$

$$\times \left|\frac{1}{v_0^3 v_1^3 \ldots v_n^3}\right| \left|\frac{1}{\Delta\tau_1 \Delta\tau_2 \ldots \Delta\tau_n}\right|. \qquad (17)$$

Далее выполним функциональное преобразование случайных величин $v_0, v_1, \ldots, v_n$, $z_0, z_1, \ldots, z_n$, входящих в (17):

$$\begin{aligned}
&v_0 = v_0, \\
&\text{-------} \\
&v_n = v_n, \\
&\hat{z}_0 = z_0, \\
&\hat{z}_1 = z_0 + z_1 = \hat{z}_0 + z_1, \\
&\text{-------------------} \\
&\hat{z}_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_n = \hat{z}_{n-1} + z_n.
\end{aligned} \qquad (18)$$

Обратные функции однозначны:

$$\begin{aligned}
&v_0 = v_0, \\
&\text{-------} \\
&v_n = v_n, \\
&z_0 = \hat{z}_0, \\
&z_1 = \hat{z}_1 - \hat{z}_0, \\
&\text{-----------} \\
&z_n = \hat{z}_n - \hat{z}_{n-1}.
\end{aligned} \qquad (19)$$

Якобиан преобразования от случайных величин $v_0, v_1, \ldots, v_n$, z_0, $z_1, \ldots, z_n$ к случайным величинам $v_0, v_1, \ldots, v_n$, $\hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$:

$$D_{2(n+1),2} = \frac{\partial(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n,\ z_0, z_1, \ldots, z_n)}{\partial(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n,\ \hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n)} = 1. \tag{20}$$

Совместная ПРВ случайных величин $\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$, $\hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$ с учетом (I7)-(20) принимает вид

$$W_{2(n+1)}(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, \hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= W^*_{2(n+1)}\left(\frac{1}{\upsilon_0}, \frac{1}{\upsilon_1}, \ldots, \frac{1}{\upsilon_n},\ \frac{\hat{z}_0}{\upsilon_0 \Delta\tau_0}, \frac{\hat{z}_1 - \hat{z}_0}{}, \ldots,\right.$$

$$\left.\frac{\hat{z}_n - \hat{z}_{n-1}}{\upsilon_n\ \Delta\tau_n}; t_0, t_1, \ldots, t_n\right) \left| \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n} \upsilon_k^3\ \Delta\tau_k} \right|. \tag{2I}$$

Нетрудно видеть, что выполненные выше функциональные преобразования случайных величин таковы, что входящие в (2I) случайные величины $\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$, $\hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$, как и исходные случайн ы е величины $a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}$, $a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$, принимают действительные значения в интервале от $-\infty$ до $+\infty$.

Выполним следующее функциональное преобразование случайн ы х величин $\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$, $\hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$, входящих в (2I) (пятое по счету функциональное преобразование):

$$\begin{aligned}
\upsilon_0 &= \upsilon_0, \\
&\text{---------} \\
\upsilon_n &= \upsilon_n, \\
\eta_0 &= e^{-\hat{z}_0}, \\
\eta_1 &= e^{-\hat{z}_1}, \\
&\text{----------} \\
\eta_n &= e^{-\hat{z}_n}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Обратные функции однозначны:

$$
\begin{aligned}
&v_0 = v_0,\\
&\text{-------}\\
&v_n = v_n,\\
&\hat{z}_0 = -\ln \eta_0,\\
&\hat{z}_1 = -\ln \eta_1,\\
&\text{---------}\\
&\hat{z}_n = -\ln \eta_n.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Из (22) следует, что случайные величины $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ принимают действительные значения в интервале от 0 до $+\infty$.

Якобиан преобразования от случайных величин $v_0, v_1, \dots, v_n$, $\hat{z}_0, \hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n$ к случайным величинам $v_0, v_1, \dots, v_n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$:

$$
D_{2(n+1),3} = \frac{\partial(v_0, v_1, \dots, v_n, \hat{z}_0, \hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n)}{\partial(v_0, v_1, \dots, v_n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)} =
$$

$$
= \frac{(-1)^{n+1}}{\eta_0 \eta_1 \cdots \eta_n}. \tag{24}
$$

С учетом (2I)-(24) совместная ПРВ случайных величин $v_0, v_1, \dots, v_n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ имеет вид

$$
W_{2(n+1)}(v_0, v_1, \dots, v_n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n; t_0, t_1, \dots, t_n) =
$$

$$
= W^*_{2(n+1)}\left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \dots, \frac{1}{v_n}, -\frac{\ln \eta_0}{v_0 \Delta\tau_0}, -\frac{\ln \eta_1 - \ln \eta_0}{v_1 \Delta\tau_1}, \dots, \right. \tag{25}
$$

$$- \frac{\ln \eta_n - \ln \eta_{n-1}}{v_n \, \Delta\tau_n}; t_0, t_1, \dots, t_n \Bigg) \left| \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n} v_k^3 \, \Delta\tau_k \, \eta_k} \right| .$$

Наконец, введем следующее функциональное преобразование случайных величин $v_0, v_1, \dots, v_n$, $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$, входящих в (25):

$$\begin{aligned} h_0 &= v_0 \eta_0, \\ h_1 &= v_1 \eta_1, \\ &\text{-----------} \\ h_n &= v_n \eta_n, \\ \eta_0 &= \eta_0, \\ &\text{-----------} \\ \eta_n &= \eta_n . \end{aligned} \tag{26}$$

Обратные функции однозначны:

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{h_0}{\eta_0}, \\ v_1 &= \frac{h_1}{\eta_1}, \\ &\text{-----------} \\ v_n &= \frac{h_n}{\eta_n}, \\ \eta_0 &= \eta_0, \\ &\text{-----------} \\ \eta_n &= \eta_n . \end{aligned} \tag{27}$$

Якобиан преобразования от случайных величин $v_0, v_1, \dots, v_n$, $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$ к случайным величинам $h_0, h_1, \dots, h_n$, $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$:

$$D_{2(n+1),4} = \frac{\partial(v_0, v_1, \dots, v_n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)}{\partial(h_0, h_1, \dots, h_n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)} = \frac{1}{\eta_0 \eta_1 \dots \eta_n} . \tag{28}$$

Совместная ПРВ случайных величин $h_0, h_1, \ldots, h_n, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ с учетом (25)-(28) запишется в форме

$$W_{2(n+1)}\left(h_0, h_1, \ldots, h_n, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n; t_0, t_1, \ldots, t_n\right) =$$

$$= W^*_{2(n+1)}\left[\frac{\eta_0}{h_0}, \frac{\eta_1}{h_1}, \ldots, \frac{\eta_n}{h_n}, -\frac{\eta_0 \ln \eta_0}{h_0 \Delta\tau_0}, -\frac{\eta_1(\ln\eta_1 - \ln\eta_0)}{h_1 \Delta\tau_1}, \right. \tag{29}$$

$$\left. \ldots, \frac{\eta_n(\ln\eta_n - \ln\eta_{n-1})}{h_n \Delta\tau_n}; t_0, t_1, \ldots, t_n\right] \left| \prod_{k=0}^{n} \frac{\eta_k}{h_k^3 \Delta\tau_k} \right| .$$

Интегрируя (29) по переменным $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$, получим:

$$W_{n+1}\left(h_0, h_1, \ldots, h_n; t_0, t_1, \ldots, t_n\right) =$$

$$= \left| \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} h_k^3 \Delta\tau_k} \right| \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty W^*_{2(n+1)}\left[\frac{\eta_0}{h_0}, \frac{\eta_1}{h_1}, \ldots, \frac{\eta_n}{h_n}, -\frac{\eta_0 \ln\eta_0}{h_0 \Delta\tau_0}, \right.$$

$$\left. -\frac{\eta_1(\ln\eta_1 - \ln\eta_0)}{h_1 \Delta\tau_1}, \ldots, -\frac{\eta_n(\ln\eta_n - \ln\eta_{n-1})}{h_n \Delta\tau_n}; t_0, t_1, \ldots, t_n\right] \times$$

$$\times \left| \prod_{k=0}^{n} \eta_k \right| d\eta_0 d\eta_1 \ldots d\eta_n . \tag{30}$$

Выражение (30) есть искомая многомерная ПРВ мгновенных зна - чений импульсной характеристики линейной системы первого поряд ка со случайными параметрами.

Выражение (30) можно несколько упростить, если учесть реальные свойства той или иной линейной системы.

Пусть, например, один из коэффициентов дифференциального уравнения (I) является постоянной величиной $a_0(t) = b_0 = const$. Тогда выражения (4) и (8) принимают вид соответственно /4/:

$$W_{3(n+1)}(a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}, a_0, a_1, \dots, a_n; t_0, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= W^*_{n+1}(a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}; t_0, t_1, \dots, t_n) \prod_{k=0}^{n} \delta(a_{0k} - b_0) \prod_{k=0}^{n} \delta(a_k - a_{1k}); \tag{31}$$

$$W_{3(n+1)}(v_0, v_1, \dots, v_n, a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}, a_0, a_1, \dots, a_n; t_0, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \left| \frac{1}{v_0^2 v_1^2 \dots v_n^2} \right| W^*_{n+1}\left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \dots, \frac{1}{v_n}; t_0, t_1, \dots, t_n\right) \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{n} \delta(a_{0k} - b_0) \prod_{k=0}^{n} \delta\left(a_k - \frac{1}{v_k}\right). \tag{32}$$

Проинтегрировав (3I) и (32) по $a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n}, a_0, a_1, \dots, a_n$, получим соответственно:

$$W_{n+1}(a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}; t_0, t_1, \dots, t_n) = W^*_{n+1}(a_{10}, a_{11}, \dots, a_{1n}; t_0, t_1, \dots, t_n), \tag{33}$$

$$W_{n+1}(v_0, v_1, \dots, v_n; t_0, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \left| \frac{1}{v_0^2 v_1^2 \dots v_n^2} \right| W^*_{n+1}\left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \dots, \frac{1}{v_n}; t_0, t_1, \dots, t_n\right). \tag{34}$$

Увеличим размерность ПРВ, определяемой выражением (34), за счет введения дополнительных случайных величин $u_0, u_1, \ldots, u_n$, где $u_k = b_0 v_k$ /4/:

$$W_{2(n+1)}(v_0, v_1, \ldots, v_n, u_0, u_1, \ldots, u_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \left|\frac{1}{v_0^2 v_1^2 \ldots v_n^2}\right| W^*_{n+1}\left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \ldots, \frac{1}{v_n}; t_0, t_1, \ldots, t_n\right) \prod_{k=0}^{n} \delta(u_k - b_0 v_k). \quad (35)$$

Выполнив функциональное преобразование случайных величин v_0, $v_1, \ldots, v_n, u_0, u_1, \ldots, u_n$ в соответствии с (I4), получим:

$$W_{2(n+1)}(v_0, v_1, \ldots, v_n, z_0, z_1, \ldots, z_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \left|\frac{1}{v_0^2 v_1^2 \ldots v_n^2}\right| W^*_{n+1}\left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \ldots, \frac{1}{v_n}; t_0, t_1, \ldots, t_n\right) \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{n} \delta(z_k - b_0 v_k \Delta\tau_k). \quad (36)$$

После выполнения функционального преобразования случайных величин $v_0, v_1, \ldots, v_n, z_0, z_1, \ldots, z_n$ в соответствии с (I8) имеем

$$W_{2(n+1)}(v_0, v_1, \ldots, v_n, \hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \left|\frac{1}{v_0^2 v_1^2 \ldots v_n^2}\right| W^*_{n+1}\left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \ldots, \frac{1}{v_n}; t_0, t_1, \ldots, t_n\right) \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{n} \delta\left[(\hat{z}_k - \hat{z}_{k-1}) - b_0 v_k \Delta\tau_k\right], \qquad (37)$$

где $\hat{z}_{-1} = 0$.

Используя функциональное преобразование случайных величин $v_0, v_1, \dots, v_n, \hat{z}_0, \hat{z}_1, \dots, \hat{z}_n$ в соответствии с (22), получим

$$W_{2(n+1)}(v_0, v_1, \dots, v_n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n; t_0, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \left|\frac{1}{v_0^2 v_1^2 \dots v_n^2}\right| \left|\frac{1}{\eta_0 \eta_1 \dots \eta_n}\right| W^*_{n+1}\left(\frac{1}{v_0}, \frac{1}{v_1}, \dots, \frac{1}{v_n}; t_0, t_1, \dots, t_n\right) \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{n} \delta\left[-(\ln \eta_n - \ln \eta_{n-1}) - b_0 v_k \Delta\tau_k\right], \qquad (38)$$

где $\ln \eta_{-1} = 0$.

Выполнение функционального преобразования случайных величин, входящих в (38), в соответствии с (26), дает

$$W_{2(n+1)}(h_0, h_1, \dots, h_n, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n; t_0, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \left|\frac{\eta_0 \eta_1 \dots \eta_n}{h_0^2 h_1^2 \dots h_n^2}\right| W^*_{n+1}\left(\frac{\eta_0}{h_0}, \frac{\eta_1}{h_1}, \dots, \frac{\eta_n}{h_n}; t_0, t_1, \dots, t_n\right) \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{n} \delta\left[-\eta_k(\ln \eta_k - \ln \eta_{k-1}) - b_0 h_k \Delta\tau_k\right], \qquad (39)$$

где, по-прежнему, $\ln \eta_{-1} = 0$.

Интегрируя (39) по переменным $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$, получим:

$$W_{n+1}(h_0, h_1, \dots, h_n;\ t_0, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \left|\frac{1}{h_0^2 h_1^2 \dots h_n^2}\right| \left|\int_0^\infty \dots \int_0^\infty W_{n+1}^*\left(\frac{\eta_0}{h_0}, \frac{\eta_1}{h_1}, \dots, \frac{\eta_n}{h_n}; t_0, t_1, \dots, t_n\right) \times\right.$$

$$\times \left|\prod_{k=0}^{n} \eta_k\right| \prod_{k=0}^{n} \delta\left[-\eta_k(\ln\eta_k - \ln\eta_{k-1}) - b_0 h_k \Delta\tau_k\right] d\eta_0 d\eta_1 \dots d\eta_n. \quad (40)$$

Введем новую переменную:

$$æ_k = -\eta_k(\ln\eta_k - \ln\eta_{k-1}) = g(\eta_k). \quad (41)$$

Тогда

$$\eta_k = g^{-1}(æ_k), \quad (42)$$

где $g^{-1}(\cdot)$ – функция, обратная по отношению к $g(\eta_k)$.

Имеем

$$d\eta_k = \frac{\partial g^{-1}(æ_k)}{\partial æ_k} dæ_k. \quad (43)$$

Подставляя (41)–(43) в (40) и учитывая, что случайная величина $æ_k$ принимает действительные значения в интервале от $-\infty$ до $+\infty$, получим:

$$W_{n+1}(h_0, h_1, \dots, h_n; t_0, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \left|\frac{1}{h_0^2 h_1^2 \dots h_n^2}\right| \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W_{n+1}^*\left[\frac{g^{-1}(æ_0)}{h_0}, \frac{g^{-1}(æ_1)}{h_1}, \dots,\right.\right.$$

$$\left.\frac{g^{-1}(æ_n)}{h_n}; t_0, t_1, \dots, t_n\right] \left|\prod_{k=0}^{n} g^{-1}(æ_k) \frac{\partial g^{-1}(æ_k)}{\partial æ_k}\right| \times \quad (44)$$

$$\times \prod_{k=0}^{n} \delta(\text{æ}_k - b_0 h_k \Delta\tau_k)\, d\text{æ}_0\, d\text{æ}_1 \ldots d\text{æ}_n \quad ,$$

где использованы модули производных по æ_k , т.к. ПРВ не может быть отрицательной.

Используя в (44) фильтрующее свойство дельта-функции, получим:

$$W_{n+1}(h_0, h_1, \ldots, h_n ; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \left| \frac{1}{h_0^2 h_1^2 \ldots h_n^2} \right| \left| \prod_{k=0}^{n} g^{-1}(b_0 h_k \Delta\tau_k) \frac{\partial g^{-1}(b_0 h_k \Delta\tau_k)}{\partial(b_0 h_k \Delta\tau_k)} \right| \times \quad (45)$$

$$\times W^*_{n+1}\left[\frac{g^{-1}(b_0 h_0 \Delta\tau_0)}{h_0}, \frac{g^{-1}(b_0 h_1 \Delta\tau_1)}{h_1}, \ldots, \frac{g^{-1}(b_0 h_n \Delta\tau_n)}{h_n}; t_0, t_1, \ldots, t_n \right].$$

Это и есть окончательное выражение для многомерной ПРВ мгновенных значений импульсной характеристики линейной системы первого порядка со случайными коэффициентами, когда коэффициент $a_0(t)$ дифференциального уравнения (I) равен постоянной величине b_0 .

В частности, для РС-интегратора со случайными параметрами и $b_0 = I$. Тогда для него

$$W_{n+1}(h_0, h_1, \ldots, h_n ; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \left| \prod_{k=0}^{n} \frac{g^{-1}(h_k \Delta\tau_k)}{h_k^2} \left[\frac{\partial g^{-1}(h_k \Delta\tau_k)}{\partial(h_k \Delta\tau_k)} \right] \right| \times \quad (46)$$

$$\times W^*_{n+1}\left[\frac{g^{-1}(h_0 \Delta\tau_0)}{h_0}, \frac{g^{-1}(h_1 \Delta\tau_1)}{h_1}, \ldots, \frac{g^{-1}(h_n \Delta\tau_n)}{h_n}; t_0, t_1, \ldots, t_n \right].$$

Входящие в выражения (30) и (46) величины $\Delta\tau_0, \Delta\tau_1, \dots, \Delta\tau_n$ являются дополнительными параметрами и определяются выбранными моментами наблюдения $t_0, t_1, \dots, t_n$ и интервалом $\Delta t = t_n - t_0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное выражение (30) есть многомерная плотность распределения вероятности мгновенных значений импульсной характеристики $h(t_0, t)$ любой линейной системы первого порядка со случайными параметрами, импульсная характеристика которой не содержит в своем составе дельта-функцию.

Для линейных систем второго подкласса, импульсные характеристики которых содержат в своем составе дельта-функцию (вида $g(t_0, t) = \delta(t_0 - t) - h(t_0, t)$), выражение (30) описывает многомерную плотность распределения вероятности мгновенных значений значащей части $h(t_0, t)$ этих импульсных характеристик.

Из (30), (45) и (46) следует, что совместная многомерная плотность распределения вероятности значений параметров линейной системы полностью определяет многомерную плотность распределения вероятности мгновенных значений ее импульсной характеристики.

Для конкретных линейных систем выражение (30) может быть существенно упрощено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солодов А.В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. - М.: ФМ, 1962. - С.324.
2. Теория автоматического регулирования /Под ред.В.В.Солодовникова. - М.: Машиностроение, 1967. - Кн.2. - С.682.
3. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Сов. радио, 1964. - С.696.
4. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Сов.радио, 1966. - С.678.

Дата поступления статьи
5 мая 1994г.