Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Государственного комитета РФ по высшему образованию

Препринт № 392

МНОГОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ RC - ИНТЕГРАТОРА СО СЛУЧАЙНЫМИ ГАУССОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

В.И.Есипенко
С.Д.Щуко

Нижний Новгород, 1994

Е с и п е н к о В. И., Щ у к о С. Д.

МНОГОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ МГНОВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ RC-ИНТЕГРАТОРА СО СЛУЧАЙНЫМИ ГАУССОВСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ // Препринт № 392. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1994. - 23 с.

УДК 621.372.061.2:519.21

Приведена методика отыскания совместной многомерной плотности распределения вероятности случайных параметров линейной системы первого порядка. Получена многомерная плотность распределения вероятности мгновенных значений импульсной характеристики RC-интегратора с гауссовскими параметрами. Рассмотрены предельные случаи, когда один из параметров является постоянной величиной. Выведена многомерная плотность распределения вероятности мгновенных значений импульсной характеристики RC-интегратора с постоянными параметрами.

Подписано в печать 25.05.94 г. Формат 60 х 84/16
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 1,43 усл.п.л.
Заказ 5401. Тираж 65.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ.

Статистический анализ линейных систем со случайными параметрами представляет собой задачу большой сложности, методы решения которой, изложенные в /I-8/, уместно назвать косвенными.

Решение задачи становится в значительной мере проще и нагляднее, если определены статистические характеристики самих линейных систем. В /9/ на этой основе предложен метод прямого статистического анализа линейных систем. В /I0/ в развитие этого метода определена многомерная плотность распределения вероятности (ПРВ) мгновенных значений импульсной характеристики линейной системы первого порядка со случайными параметрами.

В данной работе на примере RC-интегратора со случайно изменяющимися параметрами рассмотрена методика отыскания совместной ПРВ $W^{*}_{2(n+1)}(a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}, a_{00}, a_{01}, \ldots, a_{0n};\ t_0, t_1, \ldots, t_n)$ /I0/ значений $a_1(t)$ и $a_0(t)$ в моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_n$ соответствующего дифференциального уравнения, а также получена многомерная ПРВ мгновенных значений импульсной характеристики RC-интегратора со случайно изменяющимися гауссовскими параметрами $R(t)$ и $C(t)$. Рассмотрен предельный переход к многомерной ПРВ мгновенных значений импульсной характеристики RC-интегратора с постоянными параметрами.

Линейное дифференциальное уравнение RC-интегратора со случайно изменяющимися параметрами и его импульсная характеристика имеют вид соответственно

$$\frac{1}{R(t)\,C(t)}\,\frac{dx(t_0,t)}{dt} + x(t_0,t) = \xi(t), \qquad (I)$$

$$h(t_0,t) = \frac{1}{R(t)\,C(t)} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \frac{1}{R(\tau)\,C(\tau)}\,d\tau\right] =$$

$$= \frac{1}{a_1(t)} \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \frac{1}{a_1(\tau)}\,d\tau\right] \approx \frac{1}{a_1(t)} \exp\left[-\sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta\tau_k}{a_{1k}}\right], \qquad (2)$$

где $\xi(t)$ и $x(t_0, t)$ - входное воздействие и отклик РС-интегратора; $a_1(t) = R(t)\cdot C(t)$ - случайно изменяющийся коэффициент уравнения (I), удовлетворяющий условию медленности: $\Delta f_x >> \Delta f_{a1}$, где Δf_x и Δf_{a1} - ширина спектров функций $x(t_0, t)$ и $a_1(t)$; k, n - индексы суммирования; a_{1k} - значение (случайная величина) коэффициента $a_1(t)$ в момент времени $t_0 \le t_k \le t$; $\Delta t = t - t_0$ - интервал наблюдения; $\Delta\tau_k = t_{k+1} - t_k$; в показателе экспоненты в правой части (2) принята аппроксимация интеграла "нижней" интегральной суммой, согласующейся с аппроксимацией интеграла Дюамеля (см., например, /II/), в который входит $h(t_0, t)$, верхней интегральной мсуммой.

Многочисленными исследованиями установлено /I2/, что большая часть главнейших явлений, порождающих случайный характер параметров $R(t)$ и $C(t)$ достаточно хорошо аппроксимируются гауссовскими случайными процессами, характеризующимися соответствующими многомерными ПРВ:

$$\omega_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n; t_0, t_1, \ldots, t_n)_R = \frac{1}{\sigma_R(t_0)\sigma_R(t_1)\ldots\sigma_R(t_n)\sqrt{(2\pi)^{n+1}D^*}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2D^*}\sum_{\mu,\nu=0}^{n} D^*_{\mu,\nu}\,\frac{\left[m_x(t_\mu)-x_\mu\right]\left[m_x(t_\nu)-x_\nu\right]}{\sigma_R(t_\mu)\,\sigma_R(t_\nu)}\right\}, \qquad (3)$$

$$\omega_{n+1}(y_0, y_1, \ldots, y_n;\ t_0, t_1, \ldots, t_n)_C = \frac{1}{\sigma_C(t_0)\sigma_C(t_1)\ldots\sigma_C(t_n)\sqrt{(2\pi)^{n+1}D}}\ \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{\mu,\nu}^{n} D_{\mu,\nu}\frac{\left[m_y(t_\mu)-y_\mu\right]\left[m_y(t_\nu)-y_\nu\right]}{\sigma_C(t_\mu)\ \sigma_C(t_\nu)}\right\}, \tag{4}$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $y_0, y_1, \ldots, y_n$ – выборочные значения случайных функций $R(t)$ и $C(t)$ соответственно (на это указывают индексы справа у $\omega_{n+1}(\ldots)_R$ и $\omega_{n+1}(\ldots)_C$) в моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_n$; $D^*_{\mu,\nu}$ и $D_{\mu,\nu}$ – алгебраические дополнения элементов $r^*_{\mu,\nu}$ и $r_{\mu,\nu}$ определителей соответствующих корреляционных матриц D^* и D.

Для наиболее реальных независимых параметров $R(t)$ и $C(t)$ совместная ПРВ множеств случайных величин $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ равна:

$$W_{2(n+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_n;\ t_0, t_1, \ldots, t_n) = \tag{5}$$

$$= \omega_{n+1}(x_0, x_1, \ldots, x_n;\ t_0, t_1, \ldots, t_n)_R\ \omega_{n+1}(y_0, y_1, \ldots, y_n; t_0, t_1, \ldots, t_n)_C .$$

Введем следующее функциональное преобразование случайных величин $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $y_0, y_1, \ldots, y_n$, входящих в (5):

$$\begin{array}{l} a_{10} = x_0 y_0, \\ a_{11} = x_1 y_1, \\ \text{-----------} \\ a_{1n} = x_n y_n, \\ y_0 = y_0, \\ \text{-----------} \\ y_n = y_n \end{array} \tag{6}$$

Обратные функции однозначны:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= a_{10}/y_0 \,, \\
x_1 &= a_{11}/y_1 \,, \\
&\text{----------} \\
x_n &= a_{1n}/y_n \,, \\
y_0 &= y_0 \,, \\
&\text{----------} \\
y_n &= y_n \,.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Якобиан преобразования от случайных величин $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ к случайным величинам $a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}, y_0, y_1, \ldots, y_n$ имеет вид

$$D_{2(n+1)} = \frac{\partial(x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_n)}{\partial(a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}, y_0, y_1, \ldots, y_n)} = \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n} \,. \tag{8}$$

С учетом (5)-(8) совместная ПРВ случайных величин $a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}, y_0, y_1, \ldots, y_n$ запишется в форме

$$
\begin{aligned}
& W_{2(n+1)}(a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}, y_0, y_1, \ldots, y_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) = \\
& = \omega_{n+1}\left(\frac{a_{10}}{y_0}, \frac{a_{11}}{y_1}, \ldots, \frac{a_{1n}}{y_n}; t_0, t_1, \ldots, t_n\right)_R \omega_{n+1}(y_0, y_1, \ldots, y_n; t_0, t_1, \ldots, t_n)_C \times \\
& \times \left| \frac{1}{y_0 y_1 \cdots y_n} \right| .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Интегрируя (9) по переменным $y_0, y_1, \ldots, y_n$, получим многомерную ПРВ мгновенных значений коэффициента $a_1(t)$ уравнения (I):

$$W_{n+1}(a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n}; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega_{n+1}\left(\frac{a_{10}}{y_0},\frac{a_{11}}{y_1},\ldots,\frac{a_{n1}}{y_n};\ t_0,t_1,\ldots,t_n\right)_R \times$$

$$\times\, \omega_{n+1}\left(y_0,y_1,\ldots,y_n;t_0,t_1,\ldots,t_n\right)_C \frac{dy_0 dy_1\ldots dy_n}{|y_0 y_1\cdots y_n|}. \qquad (10)$$

Из (5)-(10) следует, что выражение (10) можно также рассматривать в качестве многомерной ПРВ произведения двух как угодно распределенных случайных функций $x(t)$ и $y(t)$, если опустить индексы справа у $\omega_{n+1}(\ldots)_R$ и $\omega_{n+1}(\ldots)_C$.

Из (3), (4) и (10) следует, что только в частном случае, когда один из параметров интегратора ($R(t)$ или $C(t)$) есть постоянная величина, а второй - гауссовская случайная функция, постоянная времени интегратора является гауссовской случайной функцией. Так, полагая для определенности $C(t) \equiv C = const$, из (4) имеем:

$$\omega_{n+1}\left(y_0,y_1,\ldots,y_n;t_0,t_1,\ldots,t_n\right)_C = \prod_{k=0}^{n}\delta(y_k - C). \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (10) и интегрируя, получим:

$$W_{n+1}\left(a_{10},a_{11},\ldots,a_{1n};t_0,t_1,\ldots,t_n\right) =$$

$$= \frac{1}{C^{n+1}}\,\omega_{n+1}\left(\frac{a_{10}}{C},\frac{a_{11}}{C},\ldots,\frac{a_{1n}}{C},\ t_0,t_1,\ldots,t_n\right)_R . \qquad (12)$$

Из (12) с учетом (3) следует справедливость высказанного выше замечания.

Подстановка (3) и (4) в (10) дает:

$$W_{n+1}\left(a_{10},a_{11},\ldots,a_{1n};\ t_0,t_1,\ldots,t_n\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_R(t_0)\sigma_R(t_1)\ldots\sigma_R(t_n)\sigma_C(t_0)\sigma_C(t_1)\ldots\sigma_C(t_n)\sqrt{(2\pi)^{2(n+1)}DD^*}} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2D^*}\sum_{\mu,\nu=0}^{n} D^*_{\mu,\nu}\frac{\left[m_R(t_\mu)-\frac{a_{1\mu}}{y_\mu}\right]\left[m_R(t_\nu)-\frac{a_{1\nu}}{y_\nu}\right]}{\sigma_R(t_\mu)\ \sigma_R(t_\nu)}\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{\mu,\nu=0}^{n} D_{\mu,\nu}\frac{\left[m_y(t_\mu)-y_\mu\right]\left[m_y(t_\nu)-y_\nu\right]}{\sigma_C(t_\mu)\ \sigma_C(t_\nu)}\right\} \times$$

$$\times \frac{dy_0\, dy_1 \ldots dy_n}{|y_0 y_1 \cdots y_n|} \,. \tag{I3}$$

Введем функциональное преобразование случайных величин a_{10}, a_{11}, ..., a_{1n}, входящих в (I3):

$$\begin{aligned} \upsilon_0 &= 1/a_{10}, \\ \upsilon_1 &= 1/a_{11}, \\ &\text{-----------} \\ \upsilon_n &= 1/a_{1n}. \end{aligned} \tag{I4}$$

Обратные функции однозначны:

$$\begin{aligned} a_{10} &= 1/\upsilon_0, \\ a_{11} &= 1/\upsilon_1, \\ &\text{-----------} \\ a_{1n} &= 1/\upsilon_n. \end{aligned} \tag{I5}$$

Якобиан преобразования

$$D_{n+1,1} = \frac{\partial(a_{10}, a_{11}, \ldots, a_{1n})}{\partial(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{\upsilon_0^2\, \upsilon_1^2 \ldots \upsilon_n^2} \,. \tag{I6}$$

С учетом (I3)-(I6) совместная ПРВ случайных величин υ_0, υ_1,

$\ldots, \vartheta_n$ имеет вид

$$W_{n+1}(\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \left| \frac{1}{\prod_{K=0}^{n} \vartheta_K^2} \right| \frac{1}{\sigma_R(t_0)\sigma_R(t_1)\ldots\sigma_R(t_n)\sigma_C(t_0)\sigma_C(t_1)\ldots\sigma_C(t_n)\sqrt{(2\pi)^{n+1} D^* D}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2D^*} \sum_{\mu,\nu=0}^{n} D^*_{\mu,\nu} \frac{\left[m_R(t_\mu) - \frac{1}{\vartheta_\mu y_\mu}\right]\left[m_R(t_\nu) - \frac{1}{\vartheta_\nu y_\nu}\right]}{\sigma_R(t_\mu)\,\sigma_R(t_\nu)} \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2D} \sum_{\mu,\nu=0}^{n} D_{\mu,\nu} \frac{\left[m_C(t_\mu) - y_\mu\right]\left[m_C(t_\nu) - y_\nu\right]}{\sigma_C(t_\mu)\,\sigma_C(t_\nu)} \right\} \frac{dy_0\, dy_1 \ldots dy_n}{|y_0 y_1 \ldots y_n|} =$$

$$= \left| \frac{1}{\prod_{K=0}^{n} \vartheta_K^2} \right| B(\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n; t_0, t_1, \ldots, t_n). \tag{I7}$$

В (I7) увеличим в два раза размерность ПРВ за счет введения дополнительных случайных величин $u_0, u_1, \ldots, u_n$, где $u_K \equiv \vartheta_K$ /I3/:

$$W_{2(n+1)}(\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, u_0, u_1, \ldots, u_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \left| \frac{1}{\prod_{K=0}^{n} \vartheta_K^2} \right| B(\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) \prod_{K=0}^{n} \delta(u_K - \vartheta_K). \tag{I8}$$

Рассмотрим следующее функциональное преобразование случайных величин $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, u_0, u_1, \ldots, u_n$:

$$
\begin{aligned}
\upsilon_0 &= \upsilon_0 , \\
&\text{- - - - - - - -} \\
\upsilon_n &= \upsilon_n , \\
z_0 &= u_0 \, \Delta\tau_0 , \\
z_1 &= u_1 \, \Delta\tau_1 , \\
&\text{- - - - - - - - - -} \\
z_n &= u_n \, \Delta\tau_n .
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Обратные функции однозначны:

$$
\begin{aligned}
\upsilon_0 &= \upsilon_0 , \\
&\text{- - - - - - - -} \\
\upsilon_n &= \upsilon_n , \\
u_0 &= z_0/\Delta\tau_0 , \\
u_1 &= z_1/\Delta\tau_1 , \\
&\text{- - - - - - - - - -} \\
u_n &= z_n/\Delta\tau_n .
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Якобиан преобразования:

$$
D_{2(n+1),1} = \frac{\partial(\upsilon_0,\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n,\ u_0,u_1,\ldots,u_n)}{\partial(\upsilon_0,\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n,\ z_0,z_1,\ldots,z_n)} = \frac{1}{\Delta\tau_0\,\Delta\tau_1\ldots\Delta\tau_n} . \tag{21}
$$

В соответствии с общим правилом функционального преобразования случайных чвеличин и учетом (18)-(21) совместная ПРВ случайных величин $\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, z_0, z_1, \ldots, z_n$ имеет вид

$$
W_{2(n+1)}(\upsilon_0,\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n, z_0,z_1,\ldots,z_n; t_0,t_1,\ldots,t_n) =
$$

$$
= \left| \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n} \upsilon_k^2 \Delta\tau_k} \right| B(\upsilon_0,\upsilon_1,\ldots,\upsilon_n; t_0,t_1,\ldots,t_n) \prod_{k=0}^{n} \delta\left(\frac{z_k}{\Delta\tau_k} - \upsilon_k\right) . \tag{22}
$$

Введем функциональное преобразование случайных величин υ_0, $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, z_0, z_1, \ldots, z_n$, входящих в (22):

$$
\begin{aligned}
&\upsilon_0 = \upsilon_0,\\
&\text{------}\\
&\upsilon_n = \upsilon_n,\\
&\hat{z}_0 = z_0,\\
&\hat{z}_1 = z_0 + z_1 = \hat{z}_0 + z_1,\\
&\text{------------------}\\
&\hat{z}_n = z_0 + z_1 + \ldots + z_n = \hat{z}_{n-1} + z_n.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Обратные функции однозначны:

$$
\begin{aligned}
&\upsilon_0 = \upsilon_0,\\
&\text{------}\\
&\upsilon_n = \upsilon_n,\\
&z_0 = \hat{z}_0,\\
&z_1 = \hat{z}_1 - \hat{z}_0,\\
&\text{----------}\\
&z_n = \hat{z}_n - \hat{z}_{n-1}.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Якобиан преобразования:

$$
D_{2(n+1),2} = \frac{\partial(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n,\ z_0, z_1, \ldots, z_n)}{\partial(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n,\ \hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n)} = 1. \tag{25}
$$

С учетом (22)-(25) совместная ПРВ случайных величин $\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, \hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$ запишется в форме:

$$
W_{2(n+1)}(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n,\ \hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n) = \tag{26}
$$

$$
= \left| \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{n} \upsilon_k^2 \Delta\tau_k} \right| B(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) \prod_{k=0}^{n} \delta\left(\frac{\hat{z}_k - \hat{z}_{k-1}}{\Delta\tau_k} - \upsilon_k \right),
$$

где $\hat{z}_{-1} = 0$.

Теперь рассмотрим следующее функциональное преобразование случайных величин $\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, \hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$, входящих в

(26):

$$\begin{aligned}
\upsilon_0 &= \upsilon_0, \\
&\text{-------} \\
\upsilon_n &= \upsilon_n, \\
\eta_0 &= \exp(-\hat{z}_0), \\
\eta_1 &= \exp(-\hat{z}_1), \\
&\text{-------------} \\
\eta_n &= \exp(-\hat{z}_n).
\end{aligned} \tag{27}$$

Обратные функции однозначны:

$$\begin{aligned}
\upsilon_0 &= \upsilon_0, \\
&\text{-------} \\
\upsilon_n &= \upsilon_n, \\
\hat{z}_0 &= -\ln \eta_0, \\
&\text{-------} \\
\hat{z}_n &= -\ln \eta_n.
\end{aligned} \tag{28}$$

Якобиан преобразования от случайных величин $\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n$, $\hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n$ к случайным величинам $\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ имеет вид

$$D_{2(n+1),3} = \frac{\partial(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, \hat{z}_0, \hat{z}_1, \ldots, \hat{z}_n)}{\partial(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{\eta_0 \eta_1 \ldots \eta_n}. \tag{29}$$

С учетом (26)-(29) совместная ПРВ случайных величин $\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ запишется в форме

$$W_{2(n+1)}(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \left| \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} \upsilon_k^2 \Delta\tau_k \eta_k} \right| B(\upsilon_0, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{n} \delta \left(-\frac{\ln \eta_k - \ln \eta_{k-1}}{\Delta\tau_k} - \upsilon_k \right), \tag{30}$$

где $\ln \eta_{-1} = 0$.

Наконец, введем функциональное преобразование случайных величин $v_0, v_1, \ldots, v_n, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$, входящих в (30):

$$
\begin{aligned}
h_0 &= v_0 \eta_0, \\
h_1 &= v_1 \eta_1, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
h_n &= v_n \eta_n, \\
\eta_0 &= \eta_0, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\eta_n &= \eta_n .
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Обратные функции однозначны:

$$
\begin{aligned}
v_0 &= h_0 / \eta_0, \\
v_1 &= h_1 / \eta_1, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
v_n &= h_n / \eta_n, \\
\eta_0 &= \eta_0, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\eta_n &= \eta_n .
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Якобиан преобразования:

$$
D_{2(n+1),4} = \frac{\partial(v_0, v_1, \ldots, v_n, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)}{\partial(h_0, h_1, \ldots, h_n, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)} = \frac{1}{\eta_0 \eta_1 \ldots \eta_n} . \tag{33}
$$

В соответствии с общим правилом функционального преобразования случайных величин и с учетом (30)-(33) и (I7) получим совместную ПРВ случайных величин $h_0, h_1, \ldots, h_n, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$ вида:

$$
W_{2(n+1)}(h_0, h_1, \ldots, h_n, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n; t_0, t_1, \ldots, t_n) =
$$

$$
= \left| \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} h_k^2 \Delta\tau_k} \right| \frac{1}{\sigma_R(t_0)\sigma_R(t_1)\ldots\sigma_R(t_n)\sigma_C(t_0)\sigma_C(t_1)\ldots\sigma_C(t_n)\sqrt{(2\pi)^{2(n+1)} D^* D}} \times
$$

$$
\times \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2D^*} \sum_{\mu,\nu=0}^{n} D^*_{\mu,\nu} \frac{\left[m_R(t_\mu) - \frac{\eta_\mu}{h_\mu y_\mu}\right]\left[m_R(t_\nu) - \frac{\eta_\nu}{h_\nu y_\nu}\right]}{\sigma_R(t_\mu)\, \sigma_R(t_\nu)} \right\} \times
$$

$$
\times \exp\left\{ -\frac{1}{2D} \sum_{\mu,\nu=0}^{n} D_{\mu,\nu} \frac{\left[m_C(t_\mu) - y_\mu\right]\left[m_C(t_\nu) - y_\nu\right]}{\sigma_R(t_\mu)\, \sigma_R(t_\nu)} \right\} \times
$$

$$
\times \frac{dy_0\, dy_1 \ldots dy_n}{|y_0\, y_1 \ldots y_n|} \prod_{k=0}^{n} \delta\left(\frac{\ln \eta_k - \ln \eta_{k-1}}{\Delta\tau_k} - \frac{h_k}{\eta_k} \right). \qquad (34)
$$

Приводя в (34) аргумент дельта-функции к общему знаменателю, используя правило вынесения множителя на знак дельта-функции /I4/, а затем интегрируя по переменным $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n$, с учетом (27), получим:

$$
W_{n+1}(h_0, h_1, \ldots, h_n;\, t_0, t_1, \ldots, t_n) =
$$

$$
= \left| \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} h_k^2} \right| \frac{1}{\sigma_R(t_0)\sigma_R(t_1)\ldots\sigma_R(t_n)\sigma_C(t_0)\sigma_C(t_1)\ldots\sigma_C(t_n)\sqrt{(2\pi)^{2(n+1)} D^* D}} \times
$$

$$\times\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2D^*}\sum_{\mu,\nu=0}^{n}D^*_{\mu,\nu}\frac{\left[m_R(t_\mu)-\frac{\eta_\mu}{h_\mu y_\mu}\right]\left[m_R(t_\nu)-\frac{\eta_\nu}{h_\nu y_\nu}\right]}{\sigma_R(t_\mu)\ \sigma_R(t_\nu)}\right\}\times\right.$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{\mu,\nu=0}^{n}D_{\mu,\nu}\frac{\left[m_c(t_\mu)-y_\mu\right]\left[m_c(t_\nu)-y_\nu\right]}{\sigma_c(t_\mu)\ \sigma_c(t_\nu)}\right\}\times$$

$$\left.\times\frac{dy_0dy_1\ldots dy_n}{|y_0y_1\ldots y_n|}\right)\left|\prod_{K=0}^{n}\eta_K\right|\prod_{K=0}^{n}\delta\left[\eta_K(\ln\eta_{n-1}-\ln\eta_K)-h_K\Delta\tau_K\right]\times$$

$$\times\ d\eta_0d\eta_1\ldots d\eta_n. \tag{35}$$

Введем обозначения:

$$\eta_K(\ln\eta_{n-1}-\ln\eta_K)=g(\eta_K)=\varkappa_K. \tag{36}$$

Пусть

$$\eta_K=g^{-1}(\varkappa_K), \tag{37}$$

где $g^{-1}(\cdot)$ - некоторая функция, обратная к $g(\eta_K)$.

Тогда существует

$$d\eta_K=\frac{\partial g^{-1}(\varkappa_K)}{\partial\varkappa}\,d\varkappa_K. \tag{38}$$

Подставляя (36)-(38) в (35) и изменяя соответственно пределы интегрирования, получим:

$$W_{n+1}(h_0,h_1,\ldots,h_n;\ t_0,t_1,\ldots,t_n)=$$

$$=\left|\frac{1}{\prod\limits_{K=0}^{n}h_K^2}\right|\frac{1}{\sigma_R(t_0)\sigma_R(t_1)\ldots\sigma_R(t_n)\sigma_c(t_0)\sigma_c(t_1)\ldots\sigma_c(t_n)\sqrt{(2\pi)^{2(n+1)}D^*D}}\times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2D^*}\sum_{\mu,\nu=0}^{n} D^*_{\mu,\nu}\frac{\left[m_R(t_\mu)-\frac{g^{-1}(\text{æ}_\mu)}{h_\mu y_\mu}\right]\left[m_R(t_\nu)-\frac{g^{-1}(\text{æ}_\nu)}{h_\nu y_\nu}\right]}{\sigma_R(t_\mu)\,\sigma_R(t_\nu)}\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{\mu,\nu=0}^{n} D_{\mu,\nu}\frac{\left[m_c(t_\mu)-y_\mu\right]\left[m_c(t_\nu)-y_\nu\right]}{\sigma_c(t_\mu)\,\sigma_c(t_\nu)}\right\}\frac{dy_0 dy_1\ldots dy_n}{|y_0 y_1\ldots y_n|}\right)\times$$

$$\times\prod_{\kappa=0}^{n} g^{-1}(\text{æ}_\kappa)\left|\frac{\partial g^{-1}(\text{æ}_\kappa)}{\partial \text{æ}_\kappa}\right|\prod_{\kappa=0}^{n}(\text{æ}_\kappa-h_\kappa\Delta\tau_\kappa)d\text{æ}_0 d\text{æ}_1\ldots d\text{æ}_n, \qquad (39)$$

где использованы модули производных, т.к. ПРВ не может быть отрицательной.

Используя в (39) фильтрующее свойство дельта-функции, получим:

$$W_{n+1}(h_0,h_1,\ldots,h_n;t_0,t_1,\ldots,t_n)=$$

$$=\left|\prod_{\kappa=0}^{n}\frac{g^{-1}(h_\kappa\Delta\tau_\kappa)}{h_\kappa^2}\left[\frac{\partial g^{-1}(h_\kappa\Delta\tau_\kappa)}{\partial(h_\kappa\Delta\tau_\kappa)}\right]\right|\times$$

$$\times\frac{1}{\sigma_R(t_0)\sigma_R(t_1)\ldots\sigma_R(t_n)\sigma_c(t_0)\sigma_c(t_1)\ldots\sigma_c(t_n)\sqrt{(2\pi)^{2(n+1)}D^* D}}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2D^*}\sum_{\mu,\nu=0}^{n}D^*_{\mu,\nu}\frac{\left[m_R(t_\mu)-\frac{g^{-1}(h_\mu\Delta\tau_\mu)}{h_\mu\; y_\mu}\right]\left[m_R(t_\nu)-\frac{g^{-1}(h_\nu\Delta\tau_\nu)}{h_\nu\; y_\nu}\right]}{\sigma_R(t_\mu)\;\sigma_R(t_\nu)}\right\}\times \tag{40}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{\mu,\nu=0}^{n}D_{\mu,\nu}\frac{\left[m_c(t_\mu)-y_\mu\right]\left[m_c(t_\nu)-y_\nu\right]}{\sigma_c(t_\mu)\;\sigma_c(t_\nu)}\right\}\frac{dy_0dy_1\dots dy_n}{|y_0y_1\dots y_n|}.$$

Выражение (40) есть окончательное выражение для многомерной ПРВ мгновенных значений импульсной характеристики RC-интегратора со случайными гауссовскими параметрами.

Отметим, что:

I) обратная функция $\eta_K = g^{-1}(h_K\Delta\tau_K)$ определяется транцендентным уравнением

$$\eta_K(\ln\eta_{K-1}-\ln\eta_K)=h_K\,\Delta\tau_K \tag{4I}$$

с заданными значениями η_{K-1}, h_K и $\Delta\tau_K$, причем $\ln\eta_{-1}=0$, т.е. $\eta_{-1}=I$;

2) производные $\partial g^{-1}(h_K\Delta\tau_K)/\partial(h_K\Delta\tau_K)$ вычисляются с использованием (4I) в каждой точке $æ_K = h_K\Delta\tau_K$:

$$\frac{d\eta_K}{dæ_K}=\lim_{\Deltaæ_K\to 0}\frac{\Delta\eta_K}{\Deltaæ_K}.$$

Рассмотрим предельные случаи, вытекающие из (40).

I. Пусть R(t) и C(t) – стационарные гауссовские случайные процессы. Тогда $\sigma_R(t)=\sigma_R=const$, $\sigma_c(t)=\sigma_c=const$, $m_R(t)=m_R=R$, $m_c(t)=m_c=C$.

При этом

$$W_{n+1}(h_0,h_1,\dots,h_n;t_0,t_1,\dots,t_n)=$$

$$=\left|\prod_{K=0}^{n}\frac{g^{-1}(h_K\Delta\tau_K)}{h_K^2}\left[\frac{\partial g^{-1}(h_K\Delta\tau_K)}{\partial(h_K\Delta\tau_K)}\right]\right|\frac{1}{\sigma_R^{n+1}\sigma_c^{n+1}\sqrt{(2\pi)^{2(n+1)}D^*D}}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2D^*}\sum_{\mu,\nu=0}^{n}D^*_{\mu,\nu}\frac{\left[R-\dfrac{g^{-1}(h_\mu\Delta\tau_\mu)}{h_\mu\,y_\mu}\right]\left[R-\dfrac{g^{-1}(h_\nu\Delta\tau_\nu)}{h_\nu\,y_\nu}\right]}{\sigma_R^2}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2D}\sum_{\mu,\nu=0}^{n}D_{\mu,\nu}\frac{[C-y_\mu][C-y_\nu]}{\sigma_C^2}\right\}\frac{dy_0dy_1\ldots dy_n}{|y_0y_1\cdots y_n|}. \quad (42)$$

2. При условии, что $R(t)$ и $C(t)$ – дельта-коррелированные гауссовские случайные процессы, $D^* = D = I$, $D^*_{\mu,\nu} = D_{\mu,\nu} = I$ при $\mu = \nu$, $D^*_{\mu,\nu} = D_{\mu,\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$. Тогда:

$$W_{n+1}(h_0,h_1,\ldots,h_n;t_0,t_1,\ldots,t_n) =$$

$$=\left|\prod_{k=0}^{n}\frac{g^{-1}(h_k\Delta\tau_k)}{h_k^2}\left[\frac{\partial g^{-1}(h_k\Delta\tau_k)}{\partial(h_k\Delta\tau_k)}\right]\right|\frac{1}{\sigma_R^{n+1}\sigma_C^{n+1}(2\pi)^{n+1}}\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\sum_{k=0}^{n}\frac{[R-g^{-1}(h_k\Delta\tau_k)/h_k y_k]^2}{2\sigma_R^2}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\sum_{k=0}^{n}\frac{[C-y_k]^2}{2\sigma_C^2}\right\}\frac{dy_0dy_1\ldots dy_n}{|y_0y_1\cdots y_n|}. \quad (43)$$

3. Пусть $C(t) = C = \text{const}$. Тогда $\sigma_C = 0$ и из (4) следует, что

$$\omega_{n+1}(y_0,y_1,\ldots,y_n;t_0,t_1,\ldots,t_n)_C = \prod_{k=0}^{n}\delta(y_k - C). \quad (44)$$

Подставляя (44) в (43) и используя фильтрующее свойство дельта-функции, получим:

$$W_{n+1}(h_0, h_1, \dots, h_n; t_0, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \left| \prod_{k=0}^{n} \frac{g^{-1}(h_k \Delta\tau_k)}{h_k^2 C} \left[\frac{\partial g^{-1}(h_k \Delta\tau_k)}{\partial (h_k \Delta\tau_k)} \right] \right| \frac{1}{\sigma_R^{n+1} \sqrt{(2\pi)^{n+1}}} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\sum_{k=0}^{n} \frac{\left[R - \frac{g^{-1}(h_k \Delta\tau_k)}{h_k C} \right]^2}{2\sigma_R^2} \right\}. \tag{45}$$

Преобразуя (45) к стандартному виду, получим:

$$W_{n+1}(h_0, h_1, \dots, h_n; t_0, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \left| \prod_{k=0}^{n} \frac{g^{-1}(h_k \Delta\tau_k)}{h_k^2 C} \left[\frac{\partial g^{-1}(h_k \Delta\tau_k)}{\partial (h_k \Delta\tau_k)} \right] \right| \times$$

$$\times \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{\sigma_R \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{\left[h_k - \frac{1}{RC} g^{-1}(h_k \Delta\tau_k) \right]^2}{2\left(\frac{\sigma_R}{R} h_k \right)^2} \right\}. \tag{46}$$

4. Рассмотрим случай $R(t) = R = \mathrm{const}$, т.е. $\sigma_R = 0$. Преобразуем предварительно (43), введя новую переменную:

$$\frac{g^{-1}(h_k \Delta\tau_k)}{h_k\, y_k} = S_k . \tag{47}$$

Из (47) следует, что

$$y_\kappa = \frac{g^{-1}(h_\kappa \Delta\tau_\kappa)}{h_\kappa} \frac{1}{s_\kappa}, \quad \frac{dy_\kappa}{ds_\kappa} = \frac{g^{-1}(h_\kappa \Delta\tau_\kappa)}{h_\kappa} \left(-\frac{1}{s_\kappa^2}\right),$$

$$dy_\kappa = - \frac{g^{-1}(h_\kappa \Delta\tau_\kappa)}{h_\kappa s_\kappa^2} ds_\kappa . \tag{48}$$

Подставляя (48) в (43) и учитывая, что при этом вместо производных подставляются их модули, после необходимых преобразований получим:

$$W_{n+1}(h_0, h_1, \dots, h_n; t_0, t_1, \dots, t_n) =$$

$$= \left| \prod_{\kappa=0}^{n} \frac{g^{-1}(h_\kappa \Delta\tau_\kappa)}{h_\kappa^2} \left[\frac{\partial g^{-1}(h_\kappa \Delta\tau_\kappa)}{\partial (h_\kappa \Delta\tau_\kappa)} \right] \right| \frac{1}{\sigma_R^{n+1} \sigma_c^{n+1} (2\pi)^{n+1}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ - \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{\left[c - \frac{g^{-1}(h_\kappa \Delta\tau_\kappa)}{h_\kappa s_\kappa} \right]^2}{2 \cdot \sigma_c^2} \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ - \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{R - s_\kappa}{2\sigma_R^2} \right\} \frac{ds_0 \, ds_1 \dots ds_n}{|s_0 s_1 \dots s_n|} . \tag{49}$$

Из (3) и (49) следует, что при $\sigma_R = 0$

$$\omega_{n+1}(x_0, x_1, \dots, x_n; t_0, t_1, \dots, t_n)_R = \prod_{\kappa=0}^{n} (x_\kappa - R),$$

а (49) принимает вид

$$W_{n+1}(h_0,h_1,\dots,h_n;t_0,t_1,\dots,t_n)=$$

$$=\left|\prod_{k=0}^{n}\frac{g^{-1}(h_k\Delta\tau_k)}{h_k^2}\left[\frac{\partial g^{-1}(h_k\Delta\tau_k)}{\partial(h_k\Delta\tau_k)}\right]\right|\frac{1}{\sigma_c^{n+1}\sqrt{(2\pi)^{n+1}}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\sum_{k=0}^{n}\frac{\left[C-g^{-1}(h_k\Delta\tau_k)/h_k s_k\right]^2}{2\sigma_c^2}\right\}\times$$

$$\times\prod_{k=0}^{n}\delta(s_k-R)\frac{ds_0\,ds_1\dots ds_n}{|s_0 s_1\dots s_n|}\,. \qquad (50)$$

Используя в (50) фильтрующее свойство дельта-функции, получим:

$$W_{n+1}(h_0,h_1,\dots,h_n;t_0,t_1,\dots,t_n)=$$

$$=\left|\prod_{k=0}^{n}\frac{g^{-1}(h_k\Delta\tau_k)}{h_k^2 R}\left[\frac{\partial g^{-1}(h_k\Delta\tau_k)}{\partial(h_k\Delta\tau_k)}\right]\right|\times$$

$$\times\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{\sigma_c\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\left[h_k-\frac{1}{RC}g^{-1}(h_k\Delta\tau_k)\right]^2}{2\left(\frac{\sigma_c}{C}h_k\right)^2}\right\}. \qquad (51)$$

5. Переходя в (46) и (51) к пределам при $\sigma_R\to 0$ и $\sigma_c\to 0$ соответственно, получим один и тот же результат:

$$W_{n+1}(h_0,h_1,\dots,h_n;t_0,t_1,\dots,t_n)=\prod_{k=0}^{n}\delta\left[h_k-\frac{1}{RC}g^{-1}(h_k\Delta\tau_k)\right]. \qquad (52)$$

Выражение (52) есть многомерная ПРВ мгновенных значений импульсной характеристики РС-интегратора с постоянными параметрами.

Действительно, в соответствии с (37)-(40)

$$g^{-1}(h_K \Delta\tau_K) = \eta_K ,$$

а в соответствии с (27)

$$\eta_K = e^{-\hat{z}_K}.$$

Тогда с учетом (23), (I9) и (I4)

$$g^{-1}(h_K \Delta\tau_K) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{K} \frac{1}{a_{1j}} \Delta\tau_j\right), \qquad (53)$$

что точно совпадает с экспонентой в (2) при замене t на t_K, а n и K соответственно на K и j.

Принимая во внимание, что для РС-интегратора с постоянными параметрами $a_0 \equiv$ I, $a_1(t) = const$ = RC, а зависимость $h(\cdot)$ от исчезает, имеем с учетом (53)

$$\frac{1}{RC} g^{-1}(h_K \Delta\tau_K) = \frac{1}{RC} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{K} \frac{1}{RC} \Delta\tau_j\right\} = h_p(t_K),$$

где индекс "р" указывает на регулярность (детерминированность) импульсной характеристики.

Таким образом, окончательно получаем:

$$W_{n+1}(h_0, h_1, \dots, h_n; t_0, t_1, \dots, t_n) = \prod_{K=0}^{n} \left[h_K - \frac{1}{RC} \exp\left(-\sum_{j=1}^{K} \frac{\Delta\tau_j}{RC}\right)\right].$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполненных в работе исследований:

I) приведена методика отыскания совместной многомерной плотности распределения вероятности случайных параметров линейной системы первого порядка;

2) получена многомерная плотность распределения вероятности мгновенных значений импульсной характеристики РС-интегратора с о

случайными гауссовскими параметрами;

3) рассмотрены предельные случаи, когда один из параметров RC-интегратора (R или C) является постоянной величиной;

4) получена многомерная плотность распределения вероятности мгновенных значений импульсной характеристики RC-интегратора с постоянными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов П.И., Стратонович Р.Л., Тихонов В.И. Прохождение некоторых случайных функций через линейные системы//Автоматика и телемеханика, 1953. - Т.14, № 2.

2. Кузнецов П.И., Стратонович Р.Л., Тихонов В.И. Прохождение случайных функций через нелинейные системы//Автоматика и телемеханика, 1953. - Т.14, № 4.

3. Кузнецов П.И., Стратонович Р.Л., Тихонов В.И. Квазимоментные функции в теории случайных процессов//Теория вероятностей и ее применения. - 1960. - Т.5, № 1.

4. Meyer M.A., Middleton D. On the distributions of signals and noise after rectifications and filtering // J. Appl. Phys., - 1954. - V.25, N.8.

5. Emerson R.C. First probability of receiver with square law detectors // J. Appl. Phys., - 1953. - V.24, N.9.

6. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. - М.: Сов.радио, 1978. - С.376.

7. Чабдаров Ш.М., Трофимов А.Т. Полигауссовы представления произвольных помех и прием дискретных сигналов//Радиотехника и электроника. - 1975. - Т.20, № 4.

8. Теория автоматического регулирования. Кн.2/Под ред.В.В.Солодовникова. - М.: Машиностроение, 1967. - С.680.

9. Есипенко В.И. Вероятностные характеристики линейных систем и "прямой" метод их статистического анализа//Тезисы докладов Шестой Всероссийской научно-технической конференции "Радио -

прием и обработка сигналов". - Нижний Новгород, 1993.

10. Есипенко В.И. Многомерная плотность распределения вероятности мгновенных значений импульсной характеристики линейной системы первого порядка со случайными параметрами//Препринт № 391. - Нижний Новгород: НИРФИ, 1994. - 20 с.

11. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. - М.: Сов. радио, 1964. - С.696.

12. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи.-М.: Сов. радио, 1962. - Т.1. - С.783.

13. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. - М.: Сов.радио, 1966. - С.680.

14. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики.- - М.: Наука, 1965. - С.616.

Дата поступления статьи
7 мая 1994 г.