

**Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт  
Государственного комитета РФ по высшему образованию**

---

**П р е п р и н т    N 393**

**НИЗКОЧАСТОТНАЯ  
МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ВОЛНА  
В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ  
ПЛАЗМЕ С КВАЗИСТАТИЧЕСКИМ ТОКОМ**

**Е.Н.Мясников    Л.М.Ерухимов**

**Нижний Новгород 1994**

**НИЗКОЧАСТОТНАЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ВОЛНА В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ С КВАЗИСТАТИЧЕСКИМ ТОКОМ.**

*Препринт N 393.* – Нижний Новгород: НИРФИ, 1994. – 26 с.

УДК 550.388

Обсуждается вопрос о формировании поляризационных квазистатических электрических полей в однородной сильно ионизованной двухкомпонентной плазме низкого давления, находящейся в сильном постоянном магнитном поле  $B_0$ , при протекании в ней регулярного тока. Рассмотрен случай, когда крупномасштабный ток однороден в одной из плоскостей, проходящей через направление  $B_0$ , и является замкнутым в другой такой же плоскости, ортогональной первой. Показано, что при больших значениях магнитного числа Рейнольдса для изотермических возмущений плотности плазмы, может существовать квазистатическое состояние равновесия, определяющее мелкомасштабный вихревой ток, приводящий к возникновению поляризационных непотенциального электрического и магнитного полей. Для низких частот возмущений, когда состояние равновесия успевает установиться, получено дисперсионное уравнение, определяющее двумерно неоднородную плоскую магнитогиродинамическую волну дрейфового типа. Приводятся соотношения для поперечных к  $B_0$  компонент электрического и магнитного полей, определяющих поляризацию волны, получены выражения для ее фазовой и групповой скоростей.

## 1. Введение

Низкочастотные магнитогидродинамические волны могут описывать достаточно широкий круг явлений, возникающих в плазме. Среди них значительный интерес представляет исследование процессов, приводящих к развитию низкочастотной турбулентности в магнитоактивной плазме. Как показывают экспериментальные данные, такая турбулентность может возбуждаться в естественных условиях в ионосфере и магнитосфере Земли [1,2], а также в солнечном ветре и плазме других космических объектов [3]. Она характеризуется наличием неоднородностей электронной концентрации и флуктуаций квазистатических электрических и магнитных полей, имеющих приблизительно степенные зависимости спектральной плотности от волновых чисел  $k_{\perp} = 2\pi/l_{\perp}$ , ортогональных направлению постоянного магнитного поля  $B_0$ . Причиной ее образования могут служить неустойчивости, приводящие к развитию мелкомасштабных флуктуаций концентрации в слабо неравновесной плазме при наличии крупномасштабных градиентов плотности, внешних электрических полей и регулярных токов.

К неустойчивостям, наиболее часто рассматриваемым применительно к условиям ионосферы относятся: градиентно-дрейфовая (Релея-Тейлора) [4], токово-конвективная [5] и

Кельвина-Гельмгольца [см. 2]. При наличии достаточно сильных регулярных токов, приводящих к нагреву электронной либо ионной компонент плазмы, возникновение неоднородностей может также являться следствием развития тепловых неустойчивостей, в частности термодиффузионной [6], нагревной [7—9] и термомагнитной [10]. Одна из основных трудностей, возникающих при согласовании теоретических оценок порогов перечисленных выше неустойчивостей с экспериментальными данными, связана с необходимостью предполагать для неоднородностей электронной концентрации экстремально большую степень вытянутости вдоль направления геомагнитного поля, составляющую  $\gamma = l_{\parallel}/l_{\perp} \gtrsim \gamma_0 = (\omega_{Be}\omega_{Bi}/\nu_e\nu_i)^{1/2} \sim 10^3 \div 10^4$ . Здесь  $\nu_{\alpha}$ —соответственно частоты соударений электронов и ионов,  $\omega_{B\alpha}$ —их гирочастоты,  $l_{\parallel}$ ,  $l_{\perp}$ —масштабы неоднородностей вдоль и поперек  $B_0$ . Последнее обстоятельство обусловлено двумя факторами. Во-первых, при  $\gamma \lesssim \gamma_0$  уменьшаются потенциальные поляризационные поля вследствие их "закорачивания" продольными флуктуационными токами. Во-вторых, при  $\gamma \sim \gamma_0$  резко уменьшается время диффузии неоднородностей в магнитоактивной плазме. Именно поэтому в термомагнитной неустойчивости учитывается нагрев флуктуаций концентрации продольными токами, вызванными непотенциальными электрическими полями, для которых эффект "закорачивания" несуществен.

Параметры анизотропии неоднородностей электронной концентрации наиболее полно исследованы в области высокоширотной ионосферы. В частности показано, что крупномасштабные структуры ( $l_{\perp} \gtrsim 10$  км) часто сильно вытянуты в направлении геомагнитной L-оболочки [11], а мелкомасштабные — квазиизотропны в плоскости, ортогональной геомагнитному полю [12]. Определена величина масштаба обрезания спектра в направлении  $B_0$  [13,14]. Согласно результатам измерений анизотропии неоднородностей в ионосфере

методом радиопросвечивания сигналами ИСЗ, степень вытянутости возмущений электронной концентрации в направлении геомагнитного поля для  $l_1 \simeq 1 \text{ км}$  не превышает  $\gamma \lesssim 10 \div 30$ . При этом пороги указанных выше неустойчивостей существенно повышаются и для их реализации требуются либо экстремально большие напряженности электрических полей, либо резкие градиенты электронной концентрации. Сделанные на основе измерений параметров неоднородной структуры F-слоя авроральной ионосферы оценки пороговых значений градиентно-дрейфового, токово-конвективного и термомагнитного механизмов неустойчивостей свидетельствуют в пользу реализации последнего [15]. Однако данная неустойчивость также имеет достаточно высокий порог возбуждения и может развиваться только при наличии сильного регулярного продольного тока, что ограничивает область ее применения.

Согласно измерениям, проведенным в высокоширотной ионосфере и магнитосфере, в областях с развитой неоднородной структурой наблюдаются низкочастотные флуктуации электрического и магнитного полей [16]. Согласно [17, 18], вектор электрического поля направлен ортогонально к  $\mathbf{B}_0$ . По результатам аналогичных измерений [19] такое же условие выполняется для флуктуаций магнитного поля. Отношение интенсивностей для одномерных спектральных компонент флуктуаций, поперечных к  $\mathbf{B}_0$  магнитного и электрического полей, по данным [20] составляет  $\langle B_{\perp}^2 \rangle / \langle E_{\perp}^2 \rangle \propto l_{\perp}$ .

Если предположить, что флуктуации электрического поля  $E_{\perp}$  являются электростатическими, а возмущения  $B_{\perp}$  вызваны протекающими поперечными токами, то при  $\gamma \gtrsim \gamma_0$  должна иметь место зависимость  $\langle B_{\perp}^2 \rangle \propto \langle E_{\perp}^2 \rangle$ , которая не согласуется с результатами измерений. При  $\gamma < \gamma_0$  потенциальные электрические поля оказываются слишком слабыми и не соответствуют наблюдаемым на эксперименте значениям.

Ряд экспериментальных результатов, важных для понима-

ния процессов образования неоднородностей в естественных условиях, был получен при исследованиях параметров искусственной турбулентности F-слоя ионосферы, возбуждаемой мощным КВ радиоизлучением. К ним относятся прежде всего измерения времен релаксации  $\tau$  искусственных неоднородностей, выполненные в диапазоне масштабов  $l_{\perp}$  от единиц метров до нескольких километров. Согласно экспериментальным данным [21], для  $l_{\perp} \gtrsim l_{10} \simeq 6 \div 10$  м наблюдается зависимость  $\tau \propto l_{\perp}^{0.5}$ . Однако по расчетам, выполненным на основе линейной теории диффузии в однородной магнитоактивной плазме [22, 23], время  $\tau$  (при степени вытянутости  $\gamma \gtrsim \gamma_0$ , соответствующей масштабу  $l_{10}$ ), должно иметь более резкую зависимость от масштаба ( $\tau \propto l_{\perp}^2$ ), а его характерное значение—быть значительно меньше экспериментально наблюдаемого.

Отметим также приведенные в [24] результаты измерений доплеровских спектров сигналов ракурсного КВ и УКВ рассеяния от области искусственной ионосферной турбулентности, согласно которым в периоды работы нагревного радиопередатчика наблюдается их расщепление. Эти данные свидетельствуют о возможности существования поляризационных электрических полей в области нагрева, приводящих к крупномасштабным вихревым движениям плазмы в возмущенной области.

Указанные выше противоречия между экспериментальными данными и следствиями линейных теорий диффузии и неустойчивостей, в основе которых положено предположение о потенциальности поляризационного электрического поля, дали основание для поиска решения в приближении двухжидкостной магнитной гидродинамики, описывающего возможность возникновения непотенциального электрического поля. В основу его было положено предположение о том, что при превышении электронным числом Рейнольдса некоторого критического значения, определяемого отношением в

квазигидродинамическом уравнении движения для электронов нелинейной силы Лоренца к эффективной силе трения (обусловленной столкновениями частиц), регулярный ток может распадаться на вихри более мелких масштабов. Из условия равновесия мелкомасштабного двумерного замкнутого тока, протекающего вдоль линий равной концентрации в плоскости, проходящей через направления  $\mathbf{B}_0$ , получено выражение для непотенциального электрического поля. Для характерных времен изменения возмущений концентрации, электрического и магнитного полей, когда выполняется данное состояние квазистатического равновесия, получено решение, отвечающее низкочастотной магнитогидродинамической дрейфовой волне. Определены соотношения между компонентами полей в волне, ее фазовая и групповая скорости.

## 2. Основные соотношения

### *Используемое приближение*

Будем описывать движение частиц в двухкомпонентной магнитоактивной плазме на основе квазигидродинамических уравнений для электронов и ионов, которые имеют следующий вид:

$$m_\alpha N \left( \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \nabla \mathbf{v}_\alpha \right) = e_\alpha N \mathbf{E} + e_\alpha N \frac{[\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}]}{c} - \nabla p_\alpha - \frac{\nu_{ei} m_e}{e_\alpha} \mathbf{j} - m_\alpha N \nu_{\alpha n} \mathbf{v}_\alpha. \quad (1)$$

Здесь  $e_\alpha$ —заряд (для электронов  $\alpha = e$  он считается отрицательным, для ионов  $\alpha = i$ —положительным),  $m_\alpha$ —масса,  $\nu_{\alpha n}$ ,  $\nu_{ei}$ —частоты соударений заряженных частиц с нейтрами и между собой,  $\mathbf{v}_\alpha$ —скорость,  $N$ —концентрация,  $p_\alpha = NT_\alpha$ —давление,  $T_\alpha$ —температура,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ —напряженности электрического и магнитного полей,  $\mathbf{j} = eN(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$ —плотность электрического тока.

Систему (1) следует дополнить уравнениями Максвелла для магнитного и электрического полей:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (3)$$

Уравнение (2) записано в пренебрежении током смещения. Последнее справедливо, если все происходящие в плазме движения являются медленными по сравнению со скоростью света. Если направленные скорости частиц каждого сорта меньше их тепловых скоростей  $v_\alpha^2 \ll T_\alpha/m_\alpha$ , то в уравнениях (1) можно пренебречь нелинейными слагаемыми  $\mathbf{v}_\alpha \nabla \mathbf{v}_\alpha$  по сравнению с инерционными  $\partial \mathbf{v}_\alpha / \partial t$ .

Будем полагать, что плазма находится в постоянном магнитном поле  $B_{0z}$ , направленном вдоль оси  $\mathbf{z}$ , и между частотами соударений частиц и их гирочастотами  $\omega_{B\alpha} = eB_{0z}/m_\alpha c$  выполнены следующие соотношения:

$$\frac{\nu_e}{\omega_{Be}} \simeq \frac{\nu_{ei} + \nu_{en}}{\omega_{Be}} \ll 1, \quad \frac{\nu_i}{\omega_{Bi}} \simeq \frac{\nu_{in} + \nu_{ei} m_e / m_i}{\omega_{Bi}} \ll 1. \quad (4)$$

Условия (4) характеризуют степень замагниченности частиц каждого сорта. В случае, когда

$$m_e \nu_e \simeq m_e \nu_{ei} \gg m_i \nu_{in}, \quad (5)$$

степень замагниченности электронов и ионов одинакова. Это соответствует предельному переходу к приближению полностью ионизованной плазмы. Если условие (5) не выполнено, то соударениями с нейтралами пренебрегать нельзя, и степень замагниченности у электронной компоненты оказывается существенно выше, чем у ионной

$$\frac{\nu_e}{\omega_{Be}} \ll \frac{\nu_{in}}{\omega_{Bi}} \ll 1. \quad (6)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением плазмы низкого давления, когда давление постоянного магнитного поля значительно превышает гидродинамическое:

$$\frac{B_{0z}^2}{8\pi} \frac{1}{N(T_e + T_i)} = \frac{1}{\beta} \gg 1.$$

*Условия квазистатического равновесия плазмы*

Рассмотрим стационарные состояния, определяемые исходной системой (1-3). Если в (3) положить  $\partial V/\partial t = 0$ , то электрическое поле является потенциальным  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ . При  $\partial \mathbf{v}_\alpha/\partial t = 0$  система уравнений (1) может быть разрешена относительно скоростей и при выполнении условий (6) записана в виде

$$N\mathbf{v}_\alpha = \frac{c}{e_\alpha B_{0z}} \{T_\alpha [\mathbf{z} \times \nabla N] + e_\alpha N [\mathbf{z} \times \nabla \varphi] + \frac{m_e \nu_{ei}}{e_\alpha} [\mathbf{z} \times \mathbf{j}]\} - \frac{D_{\alpha\perp}}{T_\alpha} (T_\alpha \nabla N + e_\alpha N \nabla \varphi + \frac{m_e \nu_{ei}}{e_\alpha} \mathbf{j}) - \frac{D_{\alpha\parallel}}{T_\alpha} [T_\alpha (\nabla N \cdot \mathbf{z}) + e_\alpha N (\nabla \varphi \cdot \mathbf{z}) + \frac{m_e \nu_{ei}}{e_\alpha} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{z})]. \quad (7)$$

В правые части уравнений (7) входят плотности сил, приводящие к возникновению стационарных движений заряженных частиц. При этом плотность тока  $\mathbf{j}$  наряду с градиентом давления и электрическим полем также можно рассматривать, как эффективную силу, действующую на частицы. В (7) введены электронный и ионный коэффициенты диффузии соответственно в поперечном и продольном направлениях относительно постоянного магнитного поля. Их значения при выполнении (6) равны

$$D_{\alpha\perp} = \frac{T_\alpha \nu_{\alpha n}}{m_\alpha \omega_{B\alpha}}, \quad D_{\alpha\parallel} = \frac{T_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}}.$$

Воспользовавшись (7), можно определить потенциальное электрическое поле, уравнение для которого получается из

условия

$$\operatorname{div} N(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = \operatorname{div} j = 0. \quad (8)$$

Если внешние электрические поля и токи отсутствуют, то можно показать, что в зависимости от отношения характерных масштабов  $L_{N\perp}/L_{N\parallel}$  изменения концентрации соответственно поперек и вдоль постоянного магнитного поля возможно установление двух различных решений для электростатического поля. А именно, при  $L_{N\perp}^2/L_{N\parallel}^2 \gg \mu = \nu_e \nu_{in}/\omega_{Be}\omega_{Bi}$  имеем

$$\mathbf{E} \simeq -\frac{T_e}{eN} \nabla N. \quad (9)$$

Соотношение (9) является условием равновесия Больцмана для электронной компоненты плазмы. В обратном предельном случае  $L_{N\perp}^2/L_{N\parallel}^2 \ll \mu$  электрическое поле определяется аналогичным условием равновесия для ионной компоненты

$$\mathbf{E} \simeq \frac{T_i}{eN} \nabla N. \quad (10)$$

Общее решение для электростатического потенциала может быть получено в линейном приближении, если рассмотреть малые возмущения концентрации плазмы  $N_1$  на фоне пространственно однородного распределения  $N_0 = \text{const}$ . При  $N_1 \ll N_0$  исходные уравнения могут быть линеаризованы и для Фурье-компонент возмущений  $\varphi_1 \propto N_1 \propto \exp\{ik_x x + ik_y y + ik_z z\}$  получим

$$\varphi_1 = \frac{k_z^2 - \mu k_{\perp}^2}{\mu k_{\perp}^2 e/T_i + k_z^2 e/T_e} \frac{N_1}{N_0}, \quad (11)$$

где  $k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ,  $k_z$ —волновые числа неоднородностей соответственно поперек и вдоль постоянного магнитного поля.

Подставляя (11) в исходные уравнения (7), можно убедиться, что при наличии поляризаационного поля движение частиц происходит приблизительно с одинаковыми скоростями

$v_e \simeq v_i$  и возмущения концентрации оказываются квазинейтральными  $N_{1e} \simeq N_{1i}$ . Такое движение, как известно, определяет диффузию неоднородностей электронной концентрации в магнитоактивной плазме [22].

Возникновение диффузионного поляризованного поля (11) происходит вследствие локального нарушения нейтральности плазмы и определяется условием равновесия для наиболее подвижной компоненты плазмы. Характерное время установления поля, согласно [17], равно минимальному из времен диффузии частиц:

$$\tau \lesssim \min\left\{\tau_{\alpha\perp} \simeq \frac{l_{\perp}^2}{D_{\alpha\perp}}, \quad \tau_{\alpha\parallel} \simeq \frac{l_{\parallel}^2}{D_{\alpha\parallel}}\right\}.$$

Однако следует отметить, что нестационарные процессы, связанные с нарушением квазинейтральности, не описываются исходной системой квазигидродинамических уравнений движения. При выводе уравнений (1) считались выполненными условия больцмановского равновесия для каждой из компонент плазмы. Как мы видели, возмущения концентрации становятся равновесными только при наличии внутреннего поляризованного электрического поля.

Из системы уравнений (7) следует выражение для плотности стационарного диамагнитного тока

$$j_{\perp} = \frac{c(T_e + T_i)}{B_{0z}} [\mathbf{z} \times \nabla N], \quad (12)$$

который протекает ортогонально к постоянному магнитному полю и градиенту концентрации плазмы. Согласно (7), диамагнитный ток имеет электронную и ионную составляющие, причем скорости заряженных частиц при  $T_e \simeq T_i$  равны по абсолютной величине  $|v_e| \simeq |v_i|$  и имеют противоположное направление. Потоки частиц в направлении градиента концентрации определяют амбиполярную диффузию полностью ионизованной плазмы [25]. Подставляя (12) в каждое

из уравнений (1) и взяв дивергенцию, получим

$$\nabla_{\perp} N v_{e\perp} = \nabla_{\perp} N v_{i\perp} = -\frac{\nu_{ei}(T_e + T_i)}{m_e \omega_{Be}^2} \Delta_{\perp} N = -D_{a\perp} \Delta_{\perp} N.$$

Пусть в плазме имеется внешнее постоянное электрическое поле  $E_{0y}$ , направленное вдоль оси  $y$ . Как следует из (7), оно вызывает дрейф плазмы в направлении  $x$  со скоростью  $v_{0x} = cE_{0y}/B_{0z}$  и ток проводимости, направленный вдоль  $y$ . Последний обусловлен различием в степени замагниченности электронов и ионов. Поэтому в полностью ионизованной плазме постоянное электрическое поле не приводит к образованию тока проводимости и вызывает только нейтральный ток, при котором электроны и ионы движутся с одинаковыми скоростями  $v_{i0x} = v_{e0x} = v_{0x}$ , равными скорости дрейфа плазмы.

В линейном приближении соотношение между поляризационным полем и флуктуациями электронной концентрации имеет вид :

$$E_{\perp} = -k \frac{\mu k_y E_{0y}}{\mu k_{\perp}^2 + k_z^2} \frac{N_1}{N_0}. \quad (13)$$

Соотношение (13) получено в пренебрежении градиентом давления после линеаризации уравнений (7) и подстановки их в (8). Механизм образования поляризационного поля (13) связан с частичным запиранием регулярного тока проводимости флуктуациями плотности плазмы. Как следует из (13), при  $l_{\perp}/l_{\parallel} \gg \sqrt{\mu}$  происходит резкое уменьшение электрического поля. Последнее связано с эффектом закорачивания поперечных флуктуационных электрических полей продольными токами вследствие высокой проводимости плазмы. В полностью ионизованной плазме поле (13) обращается в нуль.

Пусть в однородной плазме существует квазистационарный крупномасштабный ток. Как уже было отмечено, если ее степень ионизации высока, то наличие тока, отличного

от нейтрального, может быть обусловлено только силами неэлектрической природы. В частности он может быть вызван крупномасштабным градиентом давления в поперечном к  $z$  направлении, что соответствует диамагнитному току (12).

Рассмотрим более общий случай, когда плотность тока имеет компоненты  $j_{0y}(y, z)$ ,  $j_{0z}(y, z)$ , независящие от  $x$ . Тогда в соответствии с (2) такой ток вызывает только одну компоненту магнитного поля  $B_{0x} \ll B_{0z}$ :

$$j_{0y} = \frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_{0x}}{\partial z}, \quad j_{0z} = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B_{0x}}{\partial y}. \quad (14)$$

Допустим, что абсолютные значения скоростей электронов и ионов, входящие в (14), близки  $|v_{i0}| \simeq |v_{e0}| \sim |\Delta v_0|$ , как это имеет место в случае диамагнитного тока (12). Подставляя эти скорости в каждое из уравнений (1), сравним по модулю нелинейные слагаемые, обусловленные силой Лоренца  $F_L = eB_{0x}[v_{\alpha 0} \times x]/c$ , с соответствующими линейными столкновительными. Тогда для отношения этих величин получим следующие выражения:

$$R_e = \frac{B_{0x}}{B_{0z}} \frac{\omega_{B_e}}{\nu_{ei} + \nu_{en}}, \quad R_i = \frac{B_{0x}}{B_{0z}} \frac{\omega_{B_i}}{\nu_{in} + \nu_{ei} m_e/m_i}, \quad (15)$$

которые имеют смысл электронного и ионного чисел Рейнольдса. Для полностью ионизованной плазмы выражения (15) могут быть преобразованы к виду

$$R_e \simeq R_i \simeq R_m \simeq \Delta v_{0y} L_z / D_m \simeq \Delta v_{0z} L_y / D_m. \quad (16)$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $\Delta v_{0y}$  и  $\Delta v_{0z}$  — соответствующие разности скоростей ионов и электронов, определяющие плотность регулярного тока (14),

$$L_z = B_{0x} (\partial B_{0x} / \partial y)^{-1}, \quad L_y = B_{0x} (\partial B_{0x} / \partial z)^{-1}$$

— масштабы неоднородности магнитного поля,  $D_m = c^2 / 4\pi\sigma = c^2 / \omega_{pe}^2 \nu_e$  — коэффициент диффузии магнитного поля ( $\sigma =$

$e^2 N_0 / m_e \nu_e$  — проводимость плазмы,  $\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 N_0 / m$  — квадрат плазменной частоты). Величина  $R_m$  соответствует введенному в [26] магнитному числу Рейнольдса. Из (16) видно, что параметр  $D_m$  аналогичен кинематической вязкости в уравнении Навье-Стокса.

Воспользовавшись аналогией с гидродинамической турбулентностью, предположим, что при  $R_m \gg 1$  может происходить дробление крупномасштабного вихря тока и образование циркуляций более мелких масштабов. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока ему не станет препятствовать эффективная вязкость среды. В [26] показано, что случай сильной вязкости ( $R_m \ll 1$ ) соответствует приближению, при котором электрическое поле можно считать потенциальным.

Рассмотрим вопрос об образовании непотенциальных квазистатических полей. Для этого получим условие равновесия для мелкомасштабных возмущений концентрации в сильно ионизованной плазме при наличии регулярного тока. Будем считать, что возмущения электронной концентрации, электрического и магнитного полей, также как и регулярный ток, зависят только от переменных  $y, z$  и однородны в направлении  $x$ . Взяв сумму стационарных уравнений движения (1) при учете, что члены, связанные с электрическим полем и столкновениями частиц сокращаются, получим следующее нелинейное уравнение, определяющее состояние равновесия в плоскости  $(y \cdot z)$ :

$$\nabla \left\{ \frac{B_x^2(y, z)}{8\pi} + N_1(T_e + T_i) \right\} = 0. \quad (17)$$

Представим магнитное поле в виде

$$B_x = B_{0x}(y, z) + B_{1x}(k_y, k_z) \quad (18)$$

и, подставив его в (17) при учете

$$(k_y L_y)^{-1} \ll 1, \quad (k_z L_z)^{-1} \ll 1, \quad (19)$$

вынесем крупномасштабное поле  $B_{0z}$  за знак градиента. Тогда условие равновесия для возмущений первого порядка имеет вид

$$B_{1z} = -\frac{4\pi(T_e + T_i)}{B_{0z}} N_1. \quad (20)$$

Согласно (4) имеем следующие выражения для компонент мелкомасштабных возмущений плотности тока, протекающего в плоскости  $(y \cdot z)$ , определяющего магнитное поле (20):

$$\begin{aligned} j_{1z} &= eN_0(v_{1iz} - v_{1ez}) = -ik_y c \frac{(T_e + T_i)}{B_{0z}} N_1 \\ j_{1y} &= eN_0(v_{1iy} - v_{1ey}) = ik_z c \frac{(T_e + T_i)}{B_{0z}} N_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Выполнение условия (20) не является достаточным для равновесия заданного нами возмущения концентрации плазмы. Легко видеть из (7), что ток  $j_{1y}$ , направленный ортогонально к постоянному магнитному полю, создает силу Ампера  $F_{Az} = j_{1y} B_{0z} / c$ , которая при отсутствии градиента давления может быть уравновешена только за счет возникновения в направлении  $x$  электрического поля  $E_{1x}$ . Для определения этого поля воспользуемся стационарным уравнением движения для электронной компоненты ( $\partial v_e / \partial t \simeq 0$ ), которое в приближении двухжидкостной магнитной гидродинамики можно рассматривать как обобщенный закон Ома, устанавливающий связь между протекающим в плазме током и электрическим полем [27]:

$$T_e \nabla N_1 = -eN_0 E_1 - \frac{eN_0 B_{0z}}{c} [v_{1e} \times z] - \frac{eN_0 j_1}{\sigma}. \quad (22)$$

Взяв проекцию этого уравнения на ось  $x$  при  $k_x = 0$  и в пренебрежении столкновениями заряженных частиц ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), получим следующее выражение для квазистационарного электрического поля  $E_{1x} = -v_{1ey} B_{0z} / c$ . Положив в (21)  $v_{1iy} =$

0 и выразив флуктуационное электрическое поле  $E_{1x}$  через возмущения тока, окончательно получим

$$E_{1x} = \frac{B_{0z} j_{1y}}{ceN_0} = ik_x \frac{(T_e + T_i)}{e} \frac{B_{0z}}{B_{0z}} \frac{N_1}{N_0}. \quad (23)$$

Согласно (23) плотность тока (21) в системе координат, где ионы покоятся, определяется возмущением скорости только электронной компоненты плазмы. Как следует из полученных выражений (20), (23), такой ток приводит к возмущениям как непотенциального электрического, так и магнитного полей. Поле (23) связано с плотностью тока (21) соотношением

$$E_{1x} = \frac{m_e \omega B_e}{e^2 N_0} j_{1y} = \frac{j_{1y}}{\sigma_H},$$

где  $\sigma_H$  — холловская проводимость. В приближении заданного тока данный механизм образования электрического поля известен как эффект Холла [см. 27].

Мы показали, что возникновение непотенциального поляризованного поля (23) связано с нарушением нейтральности флуктуационного тока  $j_{1y}$ . Однако в случае, когда поле  $E_{1x}$  можно считать заданным, из (7) следует, что  $v_{1ey} \approx v_{1iy} \approx -cE_{1x}/B_{0z}$ , то есть флуктуационный ток в направлении  $y$  отсутствует.

Таким образом можно считать, что существует определенная аналогия между механизмами образования потенциального (11) и непотенциального (23) поляризованных полей. Как известно, диффузионное потенциальное поле образуется вследствие зашпираживания тока наиболее подвижных частиц, вызванного градиентом давления. При этом процесс диффузии определяется частицами, обладающими наименьшей подвижностью, а внутреннее поляризованное поле обеспечивает квазинейтральность возмущений концентрации  $N_{1i} \approx N_{1e}$ . В случае непотенциального поляризованного поля (23) квазинейтральным оказывается флуктуационный ток, определяемый соотношением (21). Характерное время

$\tau_E$  установления непотенциального поля (также как и потенциального) может определяться скоростью движения в направлении постоянного магнитного поля наиболее подвижных частиц—электронов.

Сопоставим величину поляризационных полей (11) и (23). Для рассматриваемого класса возмущений концентрации  $N_1(k_y, k_z)$  и при выполнении условия сильно ионизованной плазмы (6) сравним по абсолютной величине компоненты потенциального и непотенциального полей. Из соотношений (11) и (23) при  $k_z^2/k_y^2 \gg \mu$  следует

$$\frac{k_y \varphi_1}{E_{1z}} = \frac{k_y \nu_e}{k_z \omega_{Be}} R_m \qquad \frac{k_z \varphi_1}{E_{1z}} = \frac{\nu_e}{\omega_{Be}} R_m,$$

откуда видно, что при выполнении условий (4) для  $R_m \gtrsim 1$  возмущения непотенциального поля  $E_{1z}$  могут быть существенно больше, вызванных теми же флуктуациями плотности плазмы поперечной и продольной к  $B_{0z}$  компонент потенциального поляризационного поля.

#### *Вывод дисперсионного уравнения*

Таким образом, при условии  $R_m \simeq R_e \gg 1$  нами были получены выражения для электрического и магнитного полей, соответствующих состоянию квазистатического равновесия для мелкомасштабного возмущения концентрации. Предположим, что характерное время изменения возмущений концентрации и полей удовлетворяет условию  $(\partial/\partial t)^{-1} \gg \tau_E$ , так что полученное выше состояние равновесия всегда успевает устанавливаться. Получим нестационарное уравнение, определяющее движение возмущений плазмы.

Для этого запишем проекцию на ось  $x$  уравнения движения (1) для ионной компоненты плазмы в пренебрежении электрон-ионными соударениями:

$$m_i N_0 \frac{\partial v_{1ix}}{\partial t} = \frac{v_{0iy} B_{1z}}{c} - \frac{v_{0iz} B_{1y}}{c}. \qquad (24)$$

При получении (24) предполагалось, что электрическое поле  $E_{1x}$  является заданным, поэтому выполняется соотношение  $E_{1x} = -v_{1iy}B_{0z}/c$ , которое определяет условие квазинейтральности флуктуационного тока в плазме.

Движение ионов в направлении  $x$  определяет поперечное электрическое поле  $E_{1y} = v_{1ix}B_{0z}/c$ . Учитывая, что компоненты магнитного поля при  $k_x = 0$  связаны соотношением

$$\operatorname{div} B = k_y B_{1y} + k_z B_{1z} = 0, \quad (25)$$

окончательно получим следующее нестационарное уравнение, связывающее  $y$ -компоненты электрического и магнитного полей:

$$\frac{c^2 m_i}{e B_{0z}} \frac{\partial E_{1y}}{\partial t} = -k_y \left( \frac{v_{0iy}}{k_x} + \frac{v_{0iz}}{k_y} \right) B_{1y}. \quad (26)$$

Два других уравнения являются следствием непотенциальности поперечного к  $z$  электрического поля. Согласно (3) имеем

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial t} = i k_z c E_{1y} \quad (27)$$

$$\frac{\partial B_{1y}}{\partial t} = -i k_z c E_{1x}. \quad (28)$$

Если к уравнениям (26)—(28) добавить следующее из (20) и (23) соотношение между  $x$ -компонентами электрического и магнитного полей

$$E_{1x} = -\frac{i k_z B_{0z}}{4\pi e N_0} B_{1x}, \quad (29)$$

то система уравнений (26)—(29) оказывается полной. Положив все переменные зависящими от времени по закону  $\propto \exp\{-i\omega t\}$  и приравнявая к нулю детерминант этой системы, получим дисперсионное уравнение

$$\omega^3 = k_z^3 k_y \frac{B_{0z} c_A^4}{B_{0z} \omega_{Bi}} \left( \frac{1}{k_z L_x} - \frac{1}{k_y L_y} \right), \quad (30)$$

Здесь  $c_A = B_{0z} / \sqrt{4\pi m_i N_0}$  — скорость Альфвена. При выводе (30) были учтены соотношения (14), определяющие связь между плотностью крупномасштабного тока  $j_0$  и градиентами в  $y$  — и  $z$  — направлениях магнитного поля  $B_{0z}$ . Дополнительно предполагалось, что регулярный ток обусловлен движением только ионной компоненты плазмы. Последнее при выполнении условия  $L_{N\perp}^2 / L_{N\parallel}^2 \gg \mu$  не противоречит известным решениям квазигидродинамических уравнений (1).

### *Низкочастотная магнитная волна*

Действительный корень дисперсионного уравнения (30) соответствует низкочастотной магнитогидродинамической волне. Отметим, что в (30) входят малые параметры (19), использованные при нахождении квазистационарного состояния равновесия для мелкомасштабных возмущений плазмы, поэтому данная волна является дрейфовой и может существовать только при наличии крупномасштабных градиентов  $L_y, L_z$  магнитного поля. Она распространяется в плоскости  $(y \cdot z)$ , причем направление потока энергии зависит как от знаков волновых чисел  $k_y, k_z$ , так и знаков  $L_y, L_z$ . Нетрудно видеть, что замена

$$\{k_x = -k_x, L_y = -L_y\}, \quad \{k_y = -k_y, L_z = -L_z\}$$

не изменяет знака корня дисперсионного уравнения (30). Поэтому волна, распространяющаяся в плоскости  $(y \cdot z)$  в заданном направлении, и волна, соответствующая противоположному знаку  $k$  и градиента магнитного поля, отвечают одному корню дисперсионного уравнения.

В рассматриваемой волне содержатся возмущения трех пространственных компонент магнитного поля  $B_{1\perp} \{B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}\}$ , двух, поперечных к  $z$ , компонент непотенциального электрического поля  $E_{1\perp} \{E_{1x}, E_{1y}\}$  и возмущения электронной концентрации  $N_1$ . Заметим, что возмущения  $N_1$  фактически определяют квазистационарное потенциальное электрическое поле (9).

Полученное решение можно рассматривать как пространственно неоднородную плоскую электромагнитную волну. Приведем соотношения между компонентами электрического и магнитного полей в этой волне. Для компонент полей, ортогональных к  $z$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{B_{1x}}{E_{1y}} &= -n_M, & \frac{B_{1x}}{E_{1z}} &= i\eta_M, & \frac{B_{1z}}{B_{1y}} &= i\frac{\eta_M}{n_M} \\ \frac{B_{1y}}{E_{1z}} &= n_M, & \frac{B_{1y}}{E_{1x}} &= i\frac{n_M^2}{\eta_M}, & \frac{E_{1z}}{E_{1y}} &= i\frac{n_M}{\eta_M}. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (31) следует условие

$$E_{1z}B_{1z} + E_{1y}B_{1y} = 0,$$

которое совпадает с известным соотношением для электромагнитных полей, распространяющихся вдоль оси  $z$  в волноводе, проводящие боковые стенки которого ортогональны осям  $x$  и  $y$  [28]. Поскольку  $B_{1z} \gg E_{1z}$ , то согласно терминологии, принятой в электродинамике волноводных мод, рассматриваемая нами волна является *магнитной*. Такая аналогия представляется оправданной поскольку известно, что для низкочастотных волн в магнитоактивной плазме постоянное магнитное поле выполняет роль направляющей структуры. В отличие от волноводных мод магнитная волна имеет непрерывный спектр по частотам и волновым числам  $\omega = \omega_M(k_y, k_z)$ . Параметр  $n_M$  удовлетворяет соотношению

$$n_M^2 = (ck_z/\omega_M)^2 = -\frac{B_{1z}B_{1y}}{E_{1z}E_{1y}} \quad (32)$$

и соответствует показателю преломления магнитной волны, распространяющейся вдоль  $z$ . Параметр  $\eta_M$  равен

$$\eta_M = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_B \omega_M n_M} = \frac{\omega_B \omega_M n_M}{\omega_A^2} = \frac{4\pi e N_0}{k_z B_{0z}} \quad (33)$$

и, как видно из (31), определяет отношение амплитуд магнитного  $B_{1x}$  и электрического  $E_{1x}$  полей. Здесь  $\omega_A = c_A k_z$  — частота альфвеновской волны.

Из (32), (33) следует, что при  $n_M = \eta_M$  выполняются соотношения  $E_{1x} = E_{1y}$  и  $B_{1x} = B_{1y}$ , то есть магнитная волна имеет круговую поляризацию. В этом случае для частоты волны имеет место условие  $\omega_M^{circ} = \omega_A^2 / \omega_{Bi}$ , из которого видно, что она всегда меньше частоты альфвеновской волны. При  $\omega_M \ll \omega_M^{circ}$  выполняется условие  $n_M \gg \eta_M$  и магнитная волна имеет линейную электрическую  $x$ -поляризацию и магнитную  $y$ -поляризацию, то есть  $E_{1x} \gg E_{1y}$  и  $B_{1y} \gg B_{1x}$ . В высокочастотном случае  $\omega_M \gg \omega_M^{circ}$  соответственно имеем обратные соотношения.

Согласно (31), выражение для фазовой скорости магнитной волны имеет вид

$$V_{pM} = c_A \cos\theta \left[ \frac{B_{0z} c_A}{B_{0z} \omega_{Bi} L_z} (\operatorname{tg}\theta - L_z/L_y) \right]^{1/3}, \quad (34)$$

где  $\theta$  — угол между волновым вектором возмущений и постоянным магнитным полем.

Из (34) следует, что в диапазоне углов  $\theta \ll L_z/L_y \lesssim 1$ , ( $k \simeq k_z$ ) реализуется квазипродольное к направлению регулярного тока распространение; абсолютная величина фазовой скорости магнитной волны равна  $V_{pM\parallel} = (c_A^2 \Delta v_{0z})^{1/3}$ , где  $\Delta v_{0z}$  — разность скоростей заряженных частиц, определяющая величину регулярного продольного тока. Поскольку  $\Delta v_{0z} \ll c_A$ , то магнитная волна является более медленной по сравнению с альфвеновской. Можно показать, что в рассматриваемом случае групповая скорость магнитной волны  $V_{gM} = \partial\omega_M/\partial k$  направлена приблизительно вдоль  $z$  и имеет величину  $V_{gMz} \simeq V_{pM\parallel}$ .

В другом предельном случае  $\theta \simeq \pi/2$ , ( $k \simeq k_y \gg k_z$ ) имеет место квазипоперечное распространение; фазовая скорость волны приблизительно равна  $V_{pM\perp} = (c_A^2 \Delta v_{0y})^{1/3} (k_z/k)^{2/3}$ , где значение  $\Delta v_{0y}$  определяет поперечный регулярный ток.

В этом предельном случае групповая скорость также имеет наибольшую компоненту, направленную вдоль  $z$ , величина которой равна  $V_{gMz} \simeq 2/3[c_A^2 \Delta v_{0y}(k/k_z)]^{1/3}$ . Таким образом, фазовая скорость возмущений, вытянутых вдоль  $z$ , уменьшается, а групповая—возрастает.

В рассмотренных приближениях квазипродольного и квазипоперечного по отношению к регулярному току распространения магнитной волны ее групповая скорость всегда направлена вдоль  $B_0$ . Кроме того, из приведенных оценок следует соотношение

$$\omega_M^3 = \omega_A^2 \Delta \Omega_D, \quad (35)$$

где  $\Delta \Omega_D = \Delta v_0 \cdot k$ —эффективная доплеровская частота, связанная со скоростью перемещения зарядов при наличии регулярного тока в плазме. Если последний определяется их движением, продольным к  $B_0$ , то  $\Delta \Omega_D \simeq \Delta v_{0z} k_z$ . В случае поперечного к  $B_0$  движения зарядов имеем  $\Delta \Omega_D \simeq \Delta v_{0y} k_y$ . Соотношение (35) достаточно наглядно отражает изменение параметров магнитной волны при изменении направления и величины крупномасштабного регулярного тока и в дальнейшем по-видимому может быть использовано для ее экспериментального обнаружения.

Укажем также, что существует условие, при котором частота  $\omega_M$  стремится к нулю, а отношение поперечного к продольному волновых чисел возмущений составляет  $k_y/k_z \simeq L_z/L_y$ . При этом фазовая скорость волны стремится к нулю, а показатель преломления и групповая скорость неограниченно возрастают. В соответствии с (31) компонента электрического поля  $E_{1y}$  стремится к нулю, а магнитное поле  $B_{1y}$ —к бесконечности. Очевидно, что при этом нарушаются использованные нами при выводе дисперсионного уравнения предположения о малости скорости волновых возмущений по сравнению со скоростью света. Для получения решения в этом случае необходимо ограничить скорость распространения возмущений вдоль  $z$ . Можно показать, что к этому

должен привести учет в уравнениях движения (1) конечной проводимости плазмы.

### 3. Заключение

Полученное решение описывает низкочастотную магнитоги-  
дродинамическую волну в магнитоактивной плазме при проте-  
кании в ней регулярного тока. Главной особенностью, от-  
личающей магнитную волну от известных типов магнитоги-  
дродинамических волн в одножидкостной идеальной плазме,  
является наличие состояния квазистатического равновесия,  
которое определяет возмущения непотенциального электри-  
ческого и магнитного полей. Возможность существования  
такого состояния равновесия связана с двухжидкостной при-  
родой плазмы, а его учет важен для низких частот возмуще-  
ний.

Соотношения между переменными в магнитной волне мо-  
гут быть использованы для интерпретации многочисленных  
измерений низкочастотных флуктуаций электронной концен-  
трации, электрических и магнитных полей в ионосфере и  
магнитосфере Земли и других планет, а также межпланет-  
ной плазме. Отметим, что данные соотношения между воз-  
мущениями полей и концентрации определяются только ли-  
нейными уравнениями и не зависят от нелинейных процес-  
сов, приводящих к формированию степенных спектров тур-  
булентности.

Неэлектростатические поляризационные электрические по-  
ля должны играть важную роль при формировании анизо-  
тропных трехмерных спектров низкочастотной турбулент-  
ности плазмы, а также при диффузии возмущений концен-  
трации в магнитоактивной плазме. Эта проблема приме-  
нительно к неоднородной структуре верхней ионосферы как  
естественного, так и искусственного происхождения, будет  
рассмотрена в дальнейшем.

*Данная работа выполнена при поддержке Российского Фонда*

## Литература

1. Kelley, M. C. "The Earth's Ionosphere: Plasma Physics and Electrodynamics", Int. Geophys. Ser., Vol. 43. Academic Press, New York, 1989.
2. Kintner, P. M., and C. E. Seyler The status of observations and theory of high latitude ionospheric and magnetospheric plasma turbulence. *Space Science Reviews* 41, p.91, 1985.
3. Erukhimov, L. M., and L. G. Genkin, Interplanetary plasma irregularities and ion acoustic turbulence, *Phys. Reports* 186, n 3, 1990.
4. Dungey, J. W., Cosmic Electrodynamics. Cambridge University Press, London, 1958.
5. Ossakow, S. L., and P. K. Chaturvedi, Current convective instability in the diffuse aurora. *Geophys. Res. Lett.* 6, 332, 1979.
6. Поляков С. В., В. Г. Яхно, О термодиффузионном механизме генерации неоднородностей электронной концентрации в F-слое ионосферы. *Физика плазмы*, 6, с.383, 1980.
7. Ерухимов Л. М., Л. М. Каган, Е. Н. Мясников, О нагревом механизме происхождения неоднородностей F-слоя ионосферы. *Геомагнетизм и аэронавтика*, 22, с.721, 1982.
8. Гуревич А. В., А. Н. Караштин, Мелкомасштабная термодиффузионная неустойчивость в нижней ионосфере, *Геомагнетизм и аэронавтика*, 26, с.885, 1984.
9. Караштин А. Н., М. Ш. Цимринг, Низкочастотные токовые неустойчивости в неизотермической магнитоактивной плазме. *Известия Вузов Радиофизика*, 36, с.25, 1993.
10. Erukhimov, L. M., L. M. Kagan, Thermomagnetic effects in ionospheric plasma. *J. Atm. Terr. Phys.*, 56, p.133, 1994.
11. Livingston R. C., C. L. Rino, J. Owen, and R. T. Tsunoda,

The anisotropy of high-latitude nighttime F region irregularities, *J. Geophys. Res.*, **87**, p.10519, 1982.

12. Боголюбов А. А., Л. М. Ерухимов, В. А. Кряжев, Е. Н. Мясников, Об измерениях анизотропии неоднородностей авроральной ионосферы с помощью сигналов ИСЗ. *Известия вузов "Радиофизика"*, **27**, с.1497, 1984.

13. Erukhimov, L. M., V. I. Kosolapenko, A. M. Lerner, and E. N. Myasnikov, The spectral form of small-scale plasma turbulence in auroral ionosphere. *Planet. Space Sci.*, **29**, 931, 1981.

14. Ерухимов, Л. М., Н. В. Муравьева, Е. Н. Мясников, В. И. Косолапенко, В. А. Черемный, О форме спектра неоднородностей высокоширотной ионосферы. *Геомагнетизм и аэронавигация*, **30**, 948, 1990.

15. Kagan, L. M., E. N. Myasnikov, V. I. Kosolapenko, V. A. Krjazhev, V. A. Cheremnyj, M. S. V. Persson, F-layer irregularities formation at auroral latitudes: radio wave scintillation and EISCAT observations, *J. Atm. Terr. Phys.*, 1994 in press.

16. Kelley, M. C. and F. S. Mozer, A Satellite survey of vector electric fields in the ionosphere at frequencies of 10 to 500 Hertz. 1: isotropic, high latitude emissions. *J. Geophys. Res.*, **77**, p.4158, 1972.

17. Temerin, M., The polarization, frequency, and wavelengths of high-latitude turbulence. *J. Geophys. Res.*, **83**, p.2609, 1978.

18. Temerin, M., Polarization of high latitude turbulence as determined by analysis of data from the OV1-17 satellite. *J. Geophys. Res.*, **84**, p.5935, 1979.

19. Berthelier, A., J.-C. Cerisier, J. J. Berthelier and L. Rezeau, Low-frequency magnetic turbulence in the high-latitude topside ionosphere: low-frequency waves or field-aligned currents? *J. Atm. Terr. Phys.* **53**, p.333, 1991.

20. Kintner, P. M., Observations of velocity shear turbulence. *J. Geophys. Res.*, **81**, p.5114, 1976.

21. Ерухимов, Л. М., С. А. Метелев, Е. Н. Мясников, Н. А. Митяков, В. Л. Фролов. Искусственная ионосферная

турбулентность (обзор). *Изв. вузов Радиофизика*, 30, с.208, 1987.

22. Гуревич, А. В., Е. Е. Цедилина Движение и расплывание неоднородностей в плазме. *Успехи физических наук*, 91, 609, 1967.

23. Рожанский, В. А., Л. Д. Цендин, Столкновительный перенос в частично ионизованной плазме. М.: "Энергоиздат", 1988.

24. Авдеев, В. Б., В. С. Белей, А. Ф. Беленов, В. Г. Галушко, Л. М. Ерухимов, Е. Н. Мясников, П. В. Пономаренко, Е. Н. Сергеев, В. Г. Синицин, Ю. М. Ямпольский, А. П. Ярыгин, Обзор результатов рассеяния коротких радиоволн искусственной ионосферной турбулентностью, полученных с помощью ФАР УТР-2. *Изв. вузов Радиофизика*, 1994, (в печати).

25. Голант, В. Е., Диффузия заряженных частиц плазмы в магнитном поле. *Успехи физических наук*, 79, с.377, 1963.

26. Ландау, Л. Д., Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М. "Наука", 1982.

27. Кадомцев, Б. Б. Коллективные явления в плазме, М."Наука", 1988.

28. Вайнштейн, Л. А. Электромагнитные волны, М. "Радиосвязь", 1988.