

Государственный комитет РФ по высшему
образованию
Нижегородский научно-исследовательский
радиофизический институт

П Р Е П Р И Н Т N 398

НЕЛИНЕЙНОЕ РАССЕЯНИЕ УПРУГОЙ РЕЛЕЕВСКОЙ ВОЛНЫ
НА ЛОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Заславский Ю. М.

Н. Новгород
1994.

Заславский Ю. М.

Нелинейное рассеяние упругой рэлеевской волны на локальной поверхностной неоднородности. // Препринт N 398.
-Нижний Новгород: НИРФИ, -1994. -10с.

УДК 550.834

Представлено решение задачи рассеяния волны Рэлея на поверхностной неоднородности при наличии слабой нелинейности в зависимости напряжение-деформация её материала. Моделью неоднородности служит тонкий диск, выступающий над плоской поверхностью, материал которого характеризуется "разномодульным" параметром сдвига. Данные расчёта позволяют сравнить уровень рассеянного поля на основной частоте и на второй гармонике, а также оценить компоненту разностной частоты в случае рассеяния бигармонической волны.

Подписано к печати 10.06.94г. Формат 60x84x16
Бумага писчая. Печать офсетная. Объём 0,53ц. п. л.
Заказ 5413. Тираж 50. Бесплатно

Отпечатано на ротапинтере НИРФИ

Как правило, к области исследования нелинейных акустических эффектов относятся те, которые проявляются на всём пути распространения упругих объёмных и поверхностных волн. Сравнительно реже обсуждаются явления нелинейного рассеяния акустических волн на одиночных неоднородностях, дискретно локализованных в сплошной среде. Это связано с определённым усложнением возникающих явлений, сочетающих в себе как процессы рассеяния, так и эффекты нелинейного преобразования [1]. Обычно вторичные акустические поля, появляющиеся вследствие дифракции или рассеяния, наблюдаются на тех же частотах, как и у первичных, падающих на неоднородность. Однако определённый интерес для приложений в области акустической дефектоскопии могут вызвать случаи, в которых линейно рассеянные поля будут сравнимы по интенсивности с высшими или комбинационными гармониками, порождаемыми при рассеянии [2-4]. В частности, высокой эффективностью нелинейного преобразования при рассеянии упругих волн, вероятно, обладают искусственные неоднородности, например, предметы, располагающиеся на самой или под поверхностью рыхлого земного грунта. Нелинейные волновые свойства в этом случае могут обнаружиться вследствие возникновения контактных явлений на границе двух материалов, име-

ших равную структуру [4].

Удобным средством качественного анализа и оценок степени их проявления служит модельный подход. В качестве модели механизма нелинейности рассмотрим так называемую "разномодульность" среды в области контакта. Кроме того, зададимся также некоторой моделью неоднородности, для которой удаётся получить аналитические выражения для нелинейно рассеянных упругих полей, порождаемых падающей акустической поверхностной волной Рэлея. В качестве неоднородности рассмотрим тонкую плёнку, имеющую в плане вид круглого диска радиуса R , покрывающую горизонтальную поверхность полубесконечного упругого полупространства, причём плотность и константы упругости λ и μ их материалов примем одинаковыми или весьма близкими по величине. Вместе с тем, предположим, что константа сдвиговой упругости μ для тонкого покрытия обладает некоторой особенностью, которая и обеспечивает нелинейность характеристики контакта. В отличие от линейного обобщённого закона Гука, в котором соответствующая компонента тензора сдвиговых напряжений через μ -коэффициент пропорциональности связана с компонентой тензора деформаций, примем следующую ломанную зависимость:

$$(1) \quad \mu' = \begin{cases} \mu^+, & \epsilon > 0, \\ \mu^-, & \epsilon < 0. \end{cases}$$

Зависимость (1) характерна для упомянутой выше "разномодульной" среды [5], у которой, однако, различие между μ^+ и μ^- считаем незначительным. Это позволяет говорить о том, что $(\mu^+ + \mu^-) / 2$ очень близко к μ - константе сдвига материала полубесконечной среды, а кроме того считаем, что λ -константа объёмной упругости и ρ -плотность совпадают с аналогичными параметрами для материала неоднородности. Дальнейшее рассмо-

трение проведём по классической схеме, в которой гармоническая во времени рэлеевская волна, спадающая вглубь упругого полупространства (по оси Z), распространяясь вдоль её горизонтальной поверхности (по оси X), рассеивается на неоднородности. Вычисление высших или комбинационных гармоник (случай бигармонического режима для падающего поля) рассеянных неоднородностью полей и является целью настоящей работы. Необходимые для решения поставленной задачи вычисления будем основывать на возможности эквивалентной, замены тонкого покрытия, "наклеенного" на почти всюду свободную границу упругого полупространства фиктивными напряжениями, действующими по области поверхности, занятой неоднородностью. Используя установленные в работе [3] соотношения, справедливые в линейном приближении по малому параметру h/λ , представим фиктивные напряжения следующим образом:

$$(2) \sigma_{zz} = h\rho\ddot{u}_z, \quad \sigma_{xz} = h\rho\ddot{u}_x - h\mu' \frac{4(\lambda' + \mu')}{\lambda' + 2\mu'} \cdot \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2},$$

где h — высота покрытия, λ — длина волны Рэлея, u_x , u_z компоненты упругих смещений вдоль осей X и Z, порождаемые падающим рэлеевским полем, частные производные по времени и пространственной координате X записаны в общепринятых обозначениях. Для пояснения отметим, что граница без тонкого покрытия (располагающаяся на уровне $Z=0$), очевидно, и при наличии бегущей по полупространству волны Рэлея, свободна от напряжений, между тем, присутствие неоднородности нарушает это условие и приводит к возникновению напряжений (при $Z=0$), описываемых формулами (2). Для того, чтобы вычислить высшие спектральные гармоники фиктивных напряжений (для простейшего случая гармонической падающей волны), воспользуемся зависимостью (1), подставив её в формулу

(2). При этом нетрудно видеть, что деформация e , фигурирующая в соотношении (1) и выражаемая дифференциальной операцией от смещения в волне ($e = dU_x/dX$), входит лишь во второе слагаемое в формуле для напряжения \hat{b}_{xz} . Таким образом, имен-

но член $\hat{b}_{xz} = -h_m \frac{4(\lambda' + \mu')}{(\lambda' + 2\mu')} de/dx$, где знак $\hat{}$ указывает на соответствие второму слагаемому, является тем вынужденным воздействием, обуславливающим генерацию высших гармоник. Принимая далее для смещения U_x пространственно-временную зависимость: $U_x = A \cos(\omega t - \alpha X)$, где $\alpha = w/c_R$ - волновое число рэлеевской волны, указанный член, в соответствии с (1), запишем в виде:

$$(3) \hat{b}_{xz} = 4h \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^2 A \begin{cases} \mu^+ \cos(\omega t - \alpha X), & -\frac{\pi}{2} \leq \omega t - \alpha X \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\mu^- \cos(\omega t - \alpha X), & \frac{\pi}{2} \leq \omega t - \alpha X \leq \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$$

где штрихи у констант упругости λ' , μ' опущены ввиду ранее указанного условия совпадения их количественных значений с λ , μ .

Ряд Фурье выписанной функции характеризуется следующими значениями коэффициентов при гармониках:

$$(4) \hat{b}_n = 4h \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \alpha^2 A \begin{cases} (\mu^+ + \mu^-) / 2 & \text{при } n=1 \\ \mu^+ - \mu^- \left[\frac{\sin(n-1)\frac{\pi}{2}}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2}}{n+1} \right], & n \neq 1 \end{cases}$$

Отсюда нетрудно видеть, что постоянная составляющая и вторая гармоника в этом ряду с точностью до множителя перед фигурной скобкой по уровню соответственно равны: $\hat{b}_0 = 2(\mu^+ - \mu^-) / \pi$, $\hat{b}_2 = 2(\mu^+ - \mu^-) / 3\pi$. Теперь легко сопоставить эти значения с величиной \hat{b}_1 и оценить степень малости представленных коэффициентов при условии незначительности различия μ^+ и μ^- , которое ранее было сформулировано. Дальнейшее решение состоит в отыскании рассеяных упругих рэлеев-

ских волн, т. е. вторичных полей, возбуждаемых выше описанной нагрузкой \tilde{b} , в которых для дальнейшего анализа будут представлять интерес высшие гармоники, в частности, Z-компоненты смещения на удвоенной частоте (выбор Z-компоненты смещения достаточно условен и связан с удобной для измерения на практике характеристикой). Вообще говоря, известно, что линейно рассеянные поверхностные волны исследовались в ряде работ, а методы их анализа и сами многочисленные характеристики описаны в литературе [2]. Обзор изложенных методов показывает, что для получения количественных выражений поля рассеяния весьма удобен способ интегральных преобразований упругих полей и силовых источников, действующих на поверхности деформируемого полупространства. Ввиду широкого применения аппарата интегральных преобразований, мы не останавливаемся здесь на всём многообразии его применения к линейным задачам рассеяния акустических поверхностных волн, а заметим только, что с его помощью также вычисляются переизлучаемые неоднородностью поля на высших гармониках. Так, с использованием указанного метода для вертикальной компоненты смещений в рэле-евской волне удвоенной частоты при $Z=0$ можно получить следующую формулу, описывающую рассеянное поле в зоне Фраунгофера:

$$\begin{aligned}
 U_z^{2\omega}(r, z=0) &= \frac{32}{3} \frac{1}{2} A(\alpha R_0)^2 \frac{(\mu^+ - \mu^-)(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{(2\alpha)^4 (2 - 2\sqrt{1 - \frac{C_R^2}{C_t^2}})}{\sqrt{\pi \alpha r} D'(2\alpha)} \\
 (5) \quad & \frac{\sqrt{1 - \frac{C_R^2}{C_t^2} - \frac{C_R^2}{C_t^2}}}{1} \frac{J_1(4\alpha R_0 \sin \frac{\varphi}{2})}{4\alpha R_0 \sin \frac{\varphi}{2}} \cos \varphi \cos \left(2(\omega t - \alpha r) - \frac{\pi}{4} \right),
 \end{aligned}$$

где r — радиус в полярной системе координат, свя-

занной с центром круговой неоднородности (радиуса R_0) на границе, φ — азимутальный угол, от-

считываемый от оси X , $D'(2x) \approx -4(2x)$ — представляет собой производную от функции Рэлея по волновому числу в точке $k = 2x$. Отметим, что линейно рассеянное поле R -волны имеет иную зависимость от угла, чем та, которая присуща второй и высшим гармоникам, поскольку источники его возбуждения поляризованы как в X , так и в Z -направлении, а последние обуславливают переизлучение, осесимметричное по углу азимута. Вместе с тем, форм-фактор для полей рассеяния на основной частоте и высших гармониках имеет одинаковую структуру. Для сравнения выпишем выражение, соответствующее линейно рассеянной R -волне:

$$U_z(r, z=0) = \pi h A \frac{c_R^2}{c_t^2} \frac{x^2(xR_0)^2}{D'(x)} \frac{J_1(2xR_0 \sin \frac{\varphi}{2})}{2xR_0 \sin \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi x r}} \left[(2-2 \cdot \right.$$

$$(6) \left. \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_t^2}} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_t^2} - \frac{c_R^2}{c_t^2}} \left(1 - \frac{c_t^2 4(\lambda + \mu)}{c_R^2 (\lambda + 2\mu)} \right) \cos \varphi + \right.$$

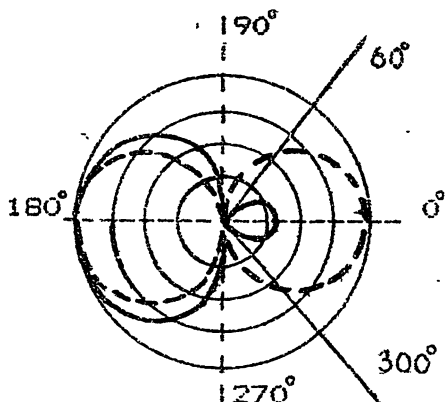
$$\left. + \frac{B}{A} \frac{c_R^2}{c_t^2} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_t^2}} \right] \cos(\omega t - x r - \frac{\pi}{4}),$$

где $B/A \approx 1.463$ — отношение вертикальной и горизонтальной компонент смещения в R -волне ($Z=0$). Легко видеть разницу в азимутально-угловой зависимости для линейно и нелинейно рассеянных рэлеевских волн. Уже на низких частотах, когда длина волны значительно превышает размер неоднородности, линейно рассеянное поле в основном отражается обратно, в то время как на гармониках переизлучение одинаково как вперед, так и назад (см. рис. 1):

Индикатрисса
 рассеяния
 R-волны

Рис. 1

----- вторая гармоника
 - - - - частота



Аналогичный расчёт, соответствующий режиму бигармонического падающего поля с частотами ω_1 и ω_2 (смещение в волне: $U = A \cos(\omega_1 t - k_1 X) + A \cos(\omega_2 t - k_2 X)$), осуществляется на основе вывода выражения для компоненты фиктивных источников на разностной частоте. Элементарный расчёт для упомянутой компоненты тензора деформаций позволяет получить формулу:

$$(7) \quad \hat{G}_- \approx \frac{2}{3\pi} h A \alpha_-^2 \frac{(\mu^+ - \mu^-)(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$$

Её использование для подсчёта смещения в волне Рэлея на разностной частоте приводит к интересной зависимости:

$$(8) \quad U_z^{\omega_1 - \omega_2}(r, z=0) = \frac{2}{3} h A (\alpha R_0)^2 \frac{(\mu^+ - \mu^-)(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\alpha_-^4}{D(\alpha_-)} \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha r}} \times$$

$$\times \frac{J_1(2\alpha_- R_0 \sin \varphi/2)}{2\alpha_- R_0 \sin \varphi/2} \left(2 - 2\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_t^2}} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_e^2}} = \frac{c_R^2}{c_t^2} \right) \times$$

$$\cos \varphi \cos \left(\omega t - \alpha r - \frac{\pi}{4} \right),$$

где $\alpha_- = \omega_- / c_R$, $\omega_- = \omega_1 - \omega_2$.

С помощью выведенных формул легко получить

оценки уровня линейно и нелинейно рассеянного поля R-волны, для чего примем: $x_h = 0.1$, $x_r = 10$, $x_{R_0} = 0.5$, $\Phi = \pi$. Так, амплитуда смещений при линейном рассеянии ниже амплитуды падающей на 20 дБ. Считая, что $\mu^+ - \mu^- / \mu = 0.01$, и принимая абсолютные значения частот $\omega_1 = 2\pi \cdot 3000 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 2\pi \cdot 3300 \text{ с}^{-1}$, относительное значение разностной частоты $\omega_- = \omega_1 - \omega_2 / \omega_1 = 0.1$ (при этом $x_{-h} = 0.01$; $x_{-r} = 1$), найдем, что уровни второй гармоники и разностной компоненты ниже падающей на 60 дБ и 100 дБ соответственно.

В заключение заметим, что для получения адекватных реальным экспериментам оценок уровня рассеянных сигналов на основной, а также разностной частотах, необходимо учесть линейные диссипативные потери в среде. В частности, следует принять во внимание пропорциональное частоте нарастание коэффициента затухания упругих волн, имеющее место в поликристаллических веществах, в твердых материалах и в сыпучих, гранулированных средах — почвенных грунтах. Именно вследствие значительной разницы коэффициентов затухания на высоких и низких частотах, как показывает элементарный расчёт, уже после пробега дистанции в $B \dots 10 \cdot \lambda_g$ (от центра неоднородности) происходит выравнивание уровней компонент рассеянного поля на высоких и на разностной частотах. Если снижение уровня компоненты разностной частоты сравнительно мало, то величина спада по высокой частоте для указанной дистанции составит 80 дБ. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 94-01-01208-а.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Наугольных К. А., Островский Л. А. Нелинейные волновые процессы в акустике. М. : Наука 1990, 237с.
2. Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М. : Наука Гл. ред. Физмат. лит. 1991, 416с.
3. Tiersten H. F. Elastic surface waves guided by thin films. // Jour. Appl. Phys. 1969, Febr., v. 40, p. 770-789.
4. Руденко О. В. Нелинейные методы в акустической диагностике. // Дефектоскопия 1993, №8, с. 24-32
5. Назаров В. Е., Сүтин А. М. Генерация гармоник при распространении упругих волн в твёрдых нелинейных средах. // Акуст. ж. 1989, т. 35, N1, с. 711-716.