Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Государственного комитета РФ по высшему образованию

Препринт N 409

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП (ОБЩАЯ ТЕОРИЯ).
Часть I

Жислин Г. М.

для студентов физических
специальностей университетов

Нижний Новгород, 1995

Жислин Г. М.

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП (ОБЩАЯ ТЕОРИЯ). Часть I.
// Препринт N 409. — Нижний Новгород: НИРФИ, 1995. — 44 с.

УДК 539.18

Лекции содержат основные сведения по теории представлений конечных групп. Они ориентированы на применение к задачам квантовой механики и физики твёрдого тела и предназначены для студентов физических специальностей университетов.

Рецензент: зав. лабораторией института физики микроструктур РАН, кандидат физико-математических наук Шерешевский Илья Аронович.

ВВЕДЕНИЕ

"В науке нет широкой столбовой дороги..."

Карл Маркс (1818–1883)

Цель настоящего курса — изложить минимум сведений по теории конечных групп и их представлений, необходимый при решении многих прикладных задач физики твердого тела. Одновременно лекции могут служить началом общего курса теории представлений, включающего и представления непрерывных групп.*

Чтобы понять, какую пользу может принести данный курс, рассмотрим сначала простейший пример — задачу отыскания собственных функций и собственных значений оператора Штурма

$$h = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

на отрезке $[-\ell, +\ell]$ с нулевыми граничными условиями: Другими словами, нам надо решить уравнение

$$hu = \lambda u \tag{0.1}$$

*Список литературы для более глубокого изучения теории представлений дан в конце 2-ой части пособия. Он не является исчерпывающим, т.к. количество монографий по данной тематике очень велико.

с граничным условием

$$u(-\ell) = u(+\ell) = 0. \tag{0.2}$$

Предположим, что функция $V(x)$ — чётная:

$$V(-x) = V(x) = V(|x|). \tag{0.3}$$

Пусть $u_0(x)$ — произвольное решение задачи (0.1), (0.2), отвечающее некоторому числу $\lambda = \lambda_0$. Тогда в силу чётности функции $V(x)$, функция $u_0(-x)$ тоже является решением задачи (0.1), (0.2), отвечающим тому же $\lambda = \lambda_0$. Действительно, равенство (0.1) выполняется при $u = u_0(x)$, $\lambda = \lambda_0$ для любых $x \in [-\ell, +\ell]$. Поэтому оно будет верно при замене x на $-x$. Сделав эту замену, мы получим

$$\frac{-d^2u_0(-x)}{d(-x)^2} + V(-x)u_0(-x) = \lambda_0 u_0(-x),$$

и значит

$$\frac{-d^2u_0(-x)}{dx^2} + V(x)u_0(-x) = \lambda_0 u_0(-x),$$

т.е. $hu_0(-x) = \lambda_0 u_0(-x)$.

Задача (0.1), (0.2) — это обычная задача Штурма, для которой известно, что все собственные значения не вырождены. Поэтому все собственные функции, отвечающие любому фиксированному значению λ, имеют вид $cu(x)$, где c — произвольная константа, $u(x)$ — любое фиксированное решение задачи (0.1), (0.2), $u(x) \not\equiv 0$. Следовательно,

$$u_0(-x) = au_0(x),$$

где a — некоторая константа. Отсюда $u_0(x) = au_0(-x)$ и, значит, $u_0(-x) = a^2u_0(-x)$. Поэтому $a^2 = 1$ и, значит, все собственные функции, отвечающие данному λ_0, или чётные ($a = +1$) или нечётные ($a = -1$). Таким образом, не решая задачу (0.1), (0.2), мы узнали о некоторых свойствах её решений, а именно: мы выяснили их поведение при преобразовании инверсии ($x \to -x$) в пространстве аргументов.

Рассмотренная задача — это задача о связанных состояниях одной одномерной частицы в потенциальном поле $V(x)$. Перейдём теперь к общему случаю. Связанные состояния многочастичных квантовых систем (атомы, молекулы, кристаллы) описываются собственными функциями соответствующего системе гамильтониана H:

$$Hu = \lambda u \tag{0.4}$$

с граничными условиями вида

$$u(r) = 0, \qquad r \in F \subset R \tag{0.5}$$

или вида

$$\int_R |u(r)|^2 dr < +\infty, \tag{0.6}$$

где R — конфигурационное пространство изменения аргументов r, F — некоторая поверхность в R.

Вид гамильтониана H зависит от характера взаимодействия частиц системы между собой и с внешними полями. Пусть оператор H и поверхность F (в случае условия (0.5)) инвариантны относительно каких-то линейных преобразований g в трёхмерном пространстве*. Мы называем эти преобразования преобразованиями симметрии физической системы, которой отвечает оператор H, поскольку все свойства системы, описываемые решениями задачи (0.4), (0.5) (или (0.4), (0.6)), одинаковы для исходной системы и для системы, полученной после преобразования g.

*Эти преобразования порождают преобразования в R, и именно относительно них оператор H и поверхность F являются инвариантными. Иногда такие преобразования рассматривают как переход к новой системе координат.

Возникает вопрос: какие свойства собственных функций оператора H будут следовать из инвариантности этого оператора относительно преобразований симметрии? Для задачи (0.1), (0.2), являющейся частным случаем задачи (0.4), (0.5), такими свойствами являются чётность (нечётность) собственных функций. В общем случае уравнения (0.4) ответ на заданный вопрос даёт теория представлений групп симметрии, являющаяся основной частью данного курса.

Отметим, что классификация состояний атомов, молекул и кристаллов, а также решение для этих систем вопроса о запрещённых и разрешённых переходах под воздействием внешних полей практически целиком основываются на свойствах симметрии собственных функций соответствующих гамильтонианов, описываемых теорией представлений.

Содержание данного пособия соответствует первой половине курса лекций, читавшегося автором студентам Высшей школы общей и прикладной физики при Нижегородском государственном университете имени Н.И.Лобачевского.

Теория представлений точечных групп и групп пространственной симметрии кристаллов, составлявшая вторую половину курса, в данное пособие не включена. Автор предполагает изложить этот материал в отдельной брошюре.

Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

"Когда сомневаешься — говори правду".

Марк Твен (1835–1910)

§ 1.1. Группа. Примеры групп

Пусть $G = \{g\}$ — множество всех преобразований в пространстве $R^3 = \{r\,|r = (x, y, z)\}$, переводящих некоторую квантовую систему саму в себя. Ясно, что множество G содержит единичное (тождественное) преобразование и для каждого $g \in G$ обратное преобразование g^{-1} также принадлежит G. Наконец, ясно, что если $g', g'', g''' \in G$, то $g'g'' \in G$ и $(g'g'')g''' = g'(g''g''')$.

В качестве примеров подобных множеств G можно рассмотреть:

1. множество трансляций $T(a)$: $T(a)r = r + a$, где a пробегает множество всех векторов из R^3;
2. множество движений равностороннего треугольника, совмещающих его с самим собой;
3. множество перестановок S тождественных частиц системы между собой.

Мы видим, что элементами, входящими в G, могут быть объекты различной природы. Поэтому для изучения свойств G целесообразно отвлечься от "внутренних" характеристик элементов из G и рассматривать только те их свойства, которые являются общими для различных множеств G и которые мы упомянули в начале параграфа. Так мы приходим к понятию абстрактной группы.

Определение. Множество элементов $G = \{a, b, c, \ldots\}$ называется группой, если любым двум элементам a, b из G по определенному закону ставится в соответствие какой-либо элемент c из G и этот закон — "групповое произведение" — обладает следующими свойствами:

I. для $\forall a, b \in G \qquad c := ab \in G$;

II. для $\forall a, b, c \in G \qquad (ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения);

III. $\exists e \in G$ такой, что $ea = ae$ для $\forall a \in G$ (существование единичного элемента);

IV. для $\forall a \in G \ \ \exists a^{-1}$ такой, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ (существование обратного элемента).

Умножение в группе может быть не коммутативным, т.е., вообще говоря, $ab \neq ba$; если $ab = ba$ для $\forall a, b \in G$, то группа называется коммутативной или абелевой. Число элементов в группе называется её порядком и обозначается $|G|$. Если $|G| < +\infty$, то группа называется конечной. Мы будем изучать, в основном, конечные группы.

Из аксиом I–IV вытекает, что единичный элемент e и обратный элемент a^{-1} для каждого a — единственные. Действительно, если $e'a = ae' = a$ для $\forall a \in G$, то при $a = e$

$$e'e = ee' = e = e'.$$

Далее, если $aa' = e$, то, умножив слева на a^{-1}, получим

$$a' = a^{-1}e = a^{-1}$$

и т.д.

ЗАДАНИЕ. Показать, что $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Отметим, что групповая операция, которая традиционно называется "умножением", на самом деле может не быть умножением в обычном смысле. Так, например, n–мерное векторное пространство $R^n = \{r|r = (x_1 \ldots x_n)\}$ является группой по сложению: единичный элемент — это нуль-вектор, обратный элемент для r есть $-r$ и т.д. Рассмотрим примеры групп.

1. Корни n-ой степени из 1 — числа $e^{2\pi ik/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ — образуют абелеву группу по умножению, порядок групп равен n.

2. Все рациональные числа — кроме числа 0 — образуют абелеву группу по умножению, группа бесконечная.

3. Группа $O^+(3)$ вращений трёхмерного пространства на любые углы около осей, проходящих через начало координат.

   Из курса механики известно (см. также [2]), что произведение вращения g_1 около оси ℓ_1 на угол φ_1 и вращения g_2 около оси ℓ_2 на угол φ_2 есть вращение g_3 на некоторый угол φ_3 около оси ℓ_3. Каждое вращение можно задать 3-мя параметрами: углами θ, ψ, задающими положение оси вращения, и величиной угла φ поворота вокруг этой оси. Углы φ, ψ отсчитываются против часовой стрелки, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \psi < 2\pi$. Таким образом, группа $O^+(3)$ есть бесконечная трёхпараметрическая группа. Так как параметры φ, θ, ψ, определяющие элементы группы, меняются *непрерывно*, то группа называется непрерывной.

   Отметим, что вращения являются ортогональными операторами в R^3, т.к. сохраняют скалярное произведение. В то же время, они не исчерпывают всё множество ортогональных операторов, ибо определитель матрицы, отвечающей произвольному вращению, равен 1 (см. [2]), а для ортогональной матрицы детерминант может быть равен ± 1.

4. Полная группа вращений $O(3)$. Элементами этой группы являются все вращения из $O^{+}(3)$ и их произведения на инверсию i: $i\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{r}$.

5. Группа S_n перестановок n-ой степени: элементы группы-перестановки g, $g_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$, где $b_1, \dots, b_n$ — это числа $1, 2, \dots, n$, переставленные произвольным (но фиксированным для данного g_b) способом. Если имелось n объектов, расположенных на занумерованных местах $1, 2, \dots, n$ (или в "ящиках" с номерами $1, 2, \dots, n$), то перестановка g_b перемещает объект с k-ого места (из k-ого ящика) на место (в ящик) с номером b_k. Произведением двух перестановок $g_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ и g_b является перестановка $g_a g_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ b_{a_1} & b_{a_2} & \dots & b_n \end{pmatrix}$, единичный элемент группы S_n — это тождественная перестановка $e = = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, обратный элемент для g_b есть перестановка $g_b^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$. Легко проверить, что для перестановок g_a, g_b и $g_c = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ c_1 & \dots & c_n \end{pmatrix}$ выполняется $(g_a g_b) g_c = g_a (g_b g_c)$. Таким образом, множество S_n действительно образует группу. Очевидно $|S_n| = n!$

6. Группа D_3 движений, совмещающих равносторонний треугольник сам с собой.

ЗАДАНИЕ. Выписать элементы группы D_3, проверить аксиомы I–IV и написать таблицу умножения для этой группы.

Лемма о сдвиге. *Пусть $g_1, \ldots, g_N$ — все элементы группы G порядка N, записанные в произвольной последовательности. Тогда для любого элемента $g \in G$ элементы $gg_1, \ldots, gg_N$ различны и с точностью до порядка записи совпадают с $g_1, \ldots, g_N$.*

Доказательство. Так как $|G| = N$, то достаточно доказать, что $gg_i \neq gg_j$ при $i \neq j$. Но это очевидно, т.к. при $gg_i = gg_j$ мы получили бы, умножив это равенство слева на g^{-1}, что $g_i = g_j$. Δ

Замечание. Аналогичный результат справедлив и для правого сдвига, т.е. для множества $g_1 g, \ldots, g_N g$.

ЗАДАНИЕ. Доказать лемму о сдвиге для бесконечных групп.

§ 1.2. Подгруппа. Смежные классы

Определение. Подгруппа — это такое подмножество элементов группы G, которое само образует группу относительно групповой операции в G.

Простейшие подгруппы: единичный элемент и сама группа. Их называют несобственными, и когда говорят о подгруппах, обычно имеют в виду остальные (собственные) подгруппы, если они есть. Поскольку нас будут интересовать конечные группы, дадим достаточное (и необходимое) условие того, что множество $G' \subset G$ является подгруппой. Это условие таково:

(A) Для любых g_1, g_2 из G' произведение g_1, g_2 должно принадлежать G'.

Покажем, что если (A) выполняется, то G' — подгруппа. Так как $G' \subset G$, нам надо проверить только наличие в

G' единичного элемента и для каждого $g \in G'$ наличие в G' обратного элемента g^{-1}. Пусть $g \in G'$. Тогда в последовательности g^k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, все члены которой принадлежат G', все элементы не могут быть различны, ибо $|G'| < +\infty$. Пусть m есть наименьшее значение k, для которого $g^m = g^p$ для какого-либо $p < m$. Умножая обе части этого равенства на g^{-p}, мы получим, что $g^{m-p} = e$, где $m - p > 0$. Таким образом, $e = g^{m-p} \in G'$. Далее $g^{m-p} \equiv g \cdot g^{m-p-1} = e$ и $g^{m-p-1} \cdot g = e$, поэтому $g^{m-p-1} = g^{-1} \in G'$.

ЗАДАНИЕ. Построить пример, показывающий, что если группа G и множество G' бесконечны, то условие (A) не является достаточным для того, чтобы G' было подгруппой.

Примеры подгрупп: В группе корней из единицы степени $2n$ — множество $G' = \{e^{(\pi i/n)k}$, k — чётное$\}$, в группе $O^+(3)$ — множество C_n вращений около оси z на углы, кратные $\frac{2\pi}{n}$, в группе C_{3n} — вращения C_3.

Подгруппа G', образованная степенями $e = g^0, g, g^2, \ldots, g^k$ одного и того же элемента, называется циклической; наименьший показатель k, для которого $g^k = e$, называется порядком элемента g. Ясно, что $|G'| = k$.

Определение. Пусть G' — произвольная подгруппа группы G, g — фиксированный элемент из G. Множество элементов $G'g = \{g'g | g' \in G'\}$ называется правым смежным классом по подгруппе G'.

Образуем все возможные правые смежные классы по подгруппе G', перебирая все элементы $g \in G$: $G'g_1, G'g_2, \ldots, G'g_N$, и покажем, что два любых смежных класса или совпадают, или не имеют общих элементов.

Действительно, если классы $G'g_i$ и $G'g_j$ имеют общий элемент $g'g_i = g''g_j$ (где $g', g'' \in G'$), то отсюда следует, что

$g_i = g'^{-1} g'' g_j$. Но тогда $G' g_i = G' g'^{-1} g'' g_j$, и т.к. в силу леммы о сдвиге $G' g'^{-1} g'' = G'$, то $G' g_i = G' g_j$, т.е. смежные классы $G' g_i$ и $G' g_j$ совпадают.

Так как любой элемент группы G принадлежит одному из смежных классов, то группу G можно представить в виде суммы смежных классов по подгруппе G':

$$G = \sum_i G' g_i , \tag{1.1}$$

где суммирование ведётся только по тем i, для которых классы $G' g_i$ различны. Обозначим число различных смежных классов в (1.1) через q. Так как смежные классы не содержат общих элементов и так как число элементов каждого из классов $G' g_i$ равно $|G'|$, то из (1.1) следует, что

$$|G| = |G'| q , \tag{1.2}$$

т.е. порядок подгруппы является делителем порядка группы.

Подобно правым смежным классам мы можем определить левые смежные классы $g_i G'$, которые обладают аналогичными свойствами.

ЗАДАНИЯ. 1. Пусть $|G|$ — простое число. Доказать, что для любого элемента $g \in G$, $g \neq e$, множество $g, g^2, g^3, \ldots, g^k$ (k — порядок элемента g) совпадает с G.

2. Доказать, что разложение группы на правые смежные классы единственно.

3. Написать разложение группы D_3 (см. ЗАДАНИЕ в § 1.1.) по подгруппе C_3.

§ 1.3. Классы сопряжённых элементов

<u>*Определение.*</u> Будем говорить, что элементы g_1 и g_2 сопряжены между собой, и писать $g_1 \sim g_2$, если найдётся такой элемент $g \in G$, что $g_1 = g g_2 g^{-1}$.

Ясно, что каждый элемент сопряжен самому себе ($g_i \sim g_i$). Кроме того, если $g_1 \sim g_2$ и $g_2 \sim g_3$, то $g_1 \sim g_3$ (транзитивность понятия сопряжения). Действительно, если $g_1 \sim g_2$ и $g_2 \sim g_3$, то для некоторых $f, g \in G$ $g_1 = gg_2g^{-1}$, $g_2 = fg_3f^{-1}$ и поэтому $g_1 = gfg_3g^{-1}f^{-1} = hg_3h^{-1}$, где $h = gf \in G$, т.е. $g_1 \sim g_3$. Следовательно, группу G можно разбить на не пересекающиеся между собой классы сопряжённых элементов. Заметим, что один из этих классов всегда совпадает с единичным элементом группы.

ЗАДАНИЯ. 1. Пусть $C_1, ..., C_m$ — классы сопряжённых элементов данной группы G. Показать, что совокупность произведений элементов классов C_i и C_j состоит из целых классов C_k, т.е. что

$$C_iC_j = \sum_{k=1}^{m} a_{ij,k}C_k,$$

где $a_{ij,k}$ — целые числа.

2. Показать, что для абелевых групп число классов сопряжённых элементов равно порядку группы.

Проиллюстрируем смысл понятия "сопряжённый элемент" для группы G, элементами которой являются какие-либо линейные обратимые преобразования (операторы) в эвклидовом пространстве R^3. (Можно взять, скажем, $G = \mathrm{O}^+(3)$ или $G = \mathrm{O}(3)$). Если элементы (преобразования) f и g из G сопряжены, то найдётся такое преобразование $h \in G$, что

$$f = hgh^{-1}. \tag{1.3}$$

Из операторного равенства (1.3) следует матричное равенство

$$||f|| = ||h|| \cdot ||g|| \cdot ||h||^{-1}.^*$$

---

*Здесь $||f||$, $||g||$ и т.д. — матрицы соответствующих операторов в каком-либо фиксированном базисе в R^3.

Положим $||h_0|| = ||h||^{-1}$. Тогда

$$||f|| = ||h_0||^{-1}\,||g||\,||h_0||\,. \tag{1.4}$$

Из курса линейной алгебры известно, что правая часть равенства (1.4) даёт вид матрицы $||g||$ в новом базисе, полученном из старого с помощью матрицы перехода $||h_0||$. Таким образом, согласно (1.4) $||f||$ и $||g||$ — это матрицы одного и того же оператора, но записанные в разных базисах. Другими словами, сопряжённые друг другу преобразования f и g можно описать одной и той же матрицей, но отнесённой к различным базисам.

Пусть, например, $G = \mathrm{O}^+(3)$ и g — вращение на угол φ около некоторой оси ℓ. Тогда для $\forall h \in G$ элементы $f \equiv hgh^{-1}$ и g сопряжены. Преобразование f является вращением, так как оно есть произведение 3-х вращений. В то же время оно сохраняет элементы на оси $h\ell$, ибо $fh\ell = hgh^{-1}h\ell = hg\ell = h\ell$, так как вращение g не меняет оси ℓ. Таким образом f — вращение около оси $h\ell$. Так как f и g имеют в подходящих базисах одну и ту же матрицу, то f также есть вращение на угол φ, но около оси $h\ell$.

Из сказанного следует, что в группе $\mathrm{O}^+(3)$ каждый класс сопряжённых элементов $K(\varphi)$ состоит из поворотов на один и тот же угол φ около всех осей, проходящих через начало координат, и различные смежные классы отличаются друг от друга величиной φ.

Рассмотрим теперь вопрос о том, что происходит с классами сопряжённых элементов при переходе от группы G к произвольной подгруппе $G' \subset G$. Ясно, что элементы, находившиеся в различных классах группы G не могут оказаться в одном классе группы G'. В то же время, элементы, сопряжённые между собой в G, могут не быть сопряжены в G'. Действительно, пусть $f, g \in G'$ и $f \sim g$ в G. Обозначим через h_s, $s = 1, ...k$, $k \geq 1$, все элементы из G, для которых $f = h_s g h_s^{-1}$. Если хотя бы один элемент $h_s \in G'$, то $f \sim g$

в G'. Однако, если $h_s \bar{\in} G'$, $s = 1, 2, \ldots k$, то f и g не сопряжены в G', т.е. элементы из одного класса сопряжённых элементов в G могут оказаться в различных классах сопряжённых элементов подгруппы G'. Таким образом, если, например, $G' \subset O^+(3)$ и G' содержит повороты $C_x(\frac{\pi}{2})$ и $C_y(\frac{\pi}{2})$ на угол $\pi/2$ около осей $0x$ и $0y$, лежащие в одном классе сопряжённых элементов в $O^+(3)$, то $C_x(\frac{\pi}{2}) \sim C_y(\frac{\pi}{2})$ в G', только если G' содержит вращение, переводящее оси $0x$ и $0y$ друг в друга.

ЗАДАНИЕ. Найти классы сопряжённых элементов для группы D_3 (пример 6 в § 1.1).

§ 1.4. Инвариантная подгруппа

Пусть G' — подгруппа G. Образуем множество элементов $G^\circ \equiv gG'g^{-1}$ для фиксированного $g \in G$. Легко проверить, что G° — подгруппа G. Если $G^\circ = G'$ при $\forall g \in G$, то G' называется инвариантной подгруппой (другое название: нормальный делитель). Выясним некоторые свойства инвариантных подгрупп. Пусть G' — инвариантная подгруппа. Так как для $\forall g' \in G'$ все элементы $gg'g^{-1}$, $g \in G$, принадлежат G', то G' содержит весь класс элементов, сопряжённых с g'. Следовательно, инвариантная подгруппа состоит из целых классов сопряжённых элементов. Далее, для инвариантных подгрупп левый и правый смежные классы совпадают, ибо $G' = gG'g^{-1}$, т.е. $gG' = G'g$ для $\forall g \in G$. С помощью инвариантной подгруппы G' можно построить так называемую фактор–группу G/G'. Пусть g_iG', $i = 1, \ldots, q$, — все различные смежные классы по подгруппе G'.

Определим произведение смежных классов g_iG' и g_jG', как множество элементов $g_ig'g_jg''$, где g', g'' пробегают всю подгруппу G', и покажем, что это множество совпадает с множеством g_ig_jG', т.е. со смежным классом, отвечающим элементу $g_i g_j$. Действительно,

$$g_i g' g_j g'' = g_i g_j g_j^{-1} g' g_j g'' = g_i g_j \tilde{g}' g'' ,$$

где $\tilde{g}' = g_j^{-1} g' g_j \in G'$ и $\tilde{g}' g''$ пробегает всю группу G' вместе с g'' в силу Леммы о сдвиге. Таким образом,

$$g_i G' \cdot g_j G' = g_i g_j G' . \tag{1.5}$$

Мы определили операцию умножения на совокупности левых смежных классов по инвариантной подгруппе. Эта операция удовлетворяет аксиомам I–IV группы. Роль единичного элемента играет класс $eG' = G'$, обратным элементом для класса $g_i G'$ является в силу (1.5) класс $g_i^{-1} G'$. Следовательно, левые смежные классы можно рассматривать как элементы некоторой группы. Она называется фактор-группой и обозначается G/G'.

Глава II. ИЗОМОРФИЗМ И ГОМОМОРФИЗМ. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

"Когда идёшь на тигра, бери длинную палку",

Мао Цзе-Дун (1893–1976)

§ 2.1. Изоморфные группы

Определение. Группы G и $\tilde{G}$ назовём изоморфными и будем писать $G \approx \tilde{G}$, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющееся при выполнении групповой операции.

Другими словами, если $g, f \in G$, $\tilde{g}, \tilde{f} \in \tilde{G}$ и $g \leftrightarrow \tilde{g}$, $f \leftrightarrow \tilde{f}$, то $fg \leftrightarrow \tilde{f}\tilde{g}$. В силу взаимно-однозначного соответствия между элементами G и $\tilde{G}$ изоморфные конечные группы имеют одинаковый порядок. Поэтому мы можем занумеровать их элементы так, что

$$G = \{g_1, \ldots, g_N\}, \quad \tilde{G} = \{\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_N\} \quad \text{и} \quad g_i \leftrightarrow \tilde{g}_i\,.$$

Составим таблицу умножения для группы G, т.е. определим такую функцию $\varphi(i,j)$ целочисленных аргументов i, j со значениями 1, 2, ..., N, что $g_{\varphi(i,j)} = g_i g_j$ для $i, j = 1, 2, \ldots, N$. Тогда изоморфизм $G \approx \tilde{G}$ означает, что таблица умножения для группы $\tilde{G}$ будет такой же, как для G, т.е.

$$\tilde{g}_{\varphi(i,j)} = \tilde{g}_i \tilde{g}_j\,.$$

Другими словами, если произведение i-ого и j-ого элементов группы G даёт k-й элемент, то то же самое имеет место для группы $\tilde{G}$. В дальнейшем у нас будут содержательные примеры изоморфизма, а пока ограничимся простейшими; изоморфны между собой: 1) группа G, состоящая из чисел 1, -1 (групповая операция — умножение), 2) группа инверсий W, состоящая из тождественного преобразования и инверсии $i\mathbf{r} = -\mathbf{r}$, 3) группа C_2, состоящая из поворотов около оси z на углы π, 2π.

Если отображение G на $\tilde{G}$, сохраняющееся при выполнении групповой операции, не является взаимнооднозначным, то элементам $\tilde{g}$ из $\tilde{G}$ может соответствовать более чем один элемент из G. В этом случае изоморфизм G и $\tilde{G}$ отсутствует. Для описания ситуации введём следующее

<u>*Определение.*</u> Пусть каждому элементу $g \in G$ соответствует единственный элемент $\tilde{g} \in \tilde{G}$ и это соответствие сохраняется при выполнении групповой операции. Тогда говорят, что группа $\tilde{G}$ гомоморфна G, или что имеет место гомоморфизм G на $\tilde{G}$ и пишут $G \xrightarrow{Hom} \tilde{G}$.

ЗАДАНИЕ. Показать, что если $G \xrightarrow{Hom} \tilde{G}$, то $e \to \tilde{e}$ и

$g^{-1} \to \tilde{g}^{-1}$, если $g \to \tilde{g}$; здесь $g \in G$, $\tilde{g} \in \tilde{G}$ и e, $\tilde{e}$ — единичные элементы групп G и $\tilde{G}$.

Пусть $G \xrightarrow{Hom} \tilde{G}$. Тогда множество $G^\circ = \{g \,|\, g \in G,\ g \to \tilde{e}\}$ образует инвариантную подгруппу группы G. Действительно, если $g_1 \to \tilde{e}$, $g_2 \to \tilde{e}$, то в силу гомоморфизма $G \xrightarrow{Hom} \tilde{G}$ $g_1 g_2 \to \tilde{e}$, поэтому G° — подгруппа. Далее, если $g_1 \in G^\circ$, то $g g_1 g^{-1} \to \tilde{g}\tilde{e}\tilde{g}^{-1} = \tilde{e}$, т.е. элементы, сопряжённые с g_1, также принадлежат G° и, значит, G° — инвариантная подгруппа. Рассмотрим все левые смежные классы по подгруппе G° и построим фактор-группу G/G°.

ЗАДАНИЕ. Доказать, что группы G/G° и $\tilde{G}$ изоморфны (каждому "элементу" $g_i G^\circ$ из G/G° поставить в соответствие элемент $\tilde{g}_i \in \tilde{G}$, соответствующий элементу g_i в гомоморфизме $G \xrightarrow{Hom} \tilde{G}$.)

§ 2.2. Конечномерные представления групп

Пусть R есть произвольное n-мерное линейное пространство над полем D. Рассмотрим в R какую-то группу линейных операторов $\{T\}$, действующих из R в R, с обычной операцией умножения между операторами: $T'T''x = T'(T''x)$ для $\forall x \in R$, $T', T'' \in \{T\}$.

Определение. Пусть задан гомоморфизм группы G на группу $\{T\}$: $g \to T_g$, $g \in G$, $T_g \in \{T\}$. Тогда мы говорим, что группа операторов T_g образует представление группы G в пространстве R. Пространство R называется пространством представления, размерность $R = \dim R = n$ называется размерностью представления.

Таким образом, задание представления $g \to T_g$, $g \in G$, означает, что если $g_1 \to T_{g_1}$, $g_2 \to T_{g_2}$, то $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}$, т.е.

нам задано представление группы G операторами T_g: $g \to T_g$, если каждому элементу $g \in G$ соответствует некоторый оператор T_g, и оператор, отвечающий произведению элементов $g_1 g_2$, всегда есть произведение операторов, отвечающих сомножителям.

Выберем в пространстве R произвольный базис $e_1, ..., e_n$. Тогда каждому оператору T_g можно поставить в соответствие его матрицу D_g в этом базисе. Напомним, что матричные элементы $(D_g)_{ki}$ этой матрицы суть коэффициенты разложения вектора $T_g e_i$ по базису e_k

$$T_g e_i = \sum_{k=1}^{n} (D_g)_{ki}\, e_k . \tag{2.1}$$

Из курса линейной алгебры известно, что группа операторов $\{T_g\}$ изоморфна группе матриц $\{D_g\}$ (Докажите!). Поэтому, если задано представление $g \to T_g$, $g \in G$, то соответствие $g \to D_g$ будет гомоморфизмом группы G на группу матриц D_g. Часто понятие представления определяют не с помощью операторов, а с помощью матриц.

<u>*Определение.*</u> Пусть задан гомоморфизм группы G на какую-то группу матриц $\{D_g\}$: $g \to D_g$ $g \in G$, $D_g \in \{D_g\}$. Тогда мы говорим, что группа матриц D_g образует представление группы G, размерность матриц D_g мы назовём размерностью представления.

Пусть $\{D_g\}$ — это матрицы размерности n. Тогда взяв произвольное n-мерное пространство R и зафиксировав в нём какой-либо базис $e_1, ..., e_n$, мы можем рассматривать каждую матрицу D_g как матрицу некоторого оператора T_g в R в базисе $e_1, ..., e_n$. Ясно, что группы $\{D_g\}$ и $\{T_g\}$ будут изоморфны, поэтому соответствие $g \to T_g$ есть гомоморфизм. Из сказанного следует, что определения представления с помощью операторов и с помощью матриц эквивалентны и мы можем пользоваться любым из них.

Рассмотрим, что происходит с представлением $g \to D_g$, когда мы переходим в пространстве R к новому базису. Пусть A — произвольная обратимая матрица в R и $f_i = Ae_i$, $i = 1, .., n$ — новый базис в R. Тогда, как известно из курса линейной алгебры, в новом базисе матрицы D_g принимают вид

$$\tilde{D}_g = A^{-1} D_g A.$$

Таким образом, линейное преобразование базиса в R приводит к преобразованию подобия матриц D_g. Легко видеть, что соответствие $g \to \tilde{D}_g$ $g \in G$ также является представлением группы G. Оно называется эквивалентным представлению $g \to D_g$. Дадим общее

Определение. Представления $g \to D'_g$ и $g \to D''_g$ группы G, имеющие одинаковую размерность, называются эквивалентными, если существует такая неособенная матрица B, что

$$D'_g = B^{-1} D''_g B \quad \forall g \in G.$$

Из сказанного следует, что эквивалентные матричные представления можно рассматривать как одно и то же операторное представление, матрицы которого записаны в различных базисах.

§ 2.3. Представления в пространствах со скалярным произведением

Пусть R — унитарное n-мерное пространство, т.е. линейное n-мерное пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ над комплексным полем. Напомним определения унитарного оператора и унитарной матрицы. Линейный оператор U, действующий из R в R называется унитарным, если он сохраняет скалярное произведение:

$$(Ux, Uy) = (x, y) \quad \text{для} \quad \forall x, y \in R. \tag{2.2}$$

Важное свойство унитарных операторов — равенство обратного и сопряжённого: $U^* = U^{-1}$, т.е.

$$(Ux, y) = (x, U^* y) = (x, U^{-1} y). \tag{2.3}$$

Матрица унитарного оператора U называется унитарной. Для неё верно равенство $||U||^* = ||U||^{-1}$ и сохраняются соотношения (2.2), (2.3). Иногда равенство (2.2) берётся в качестве определения унитарной матрицы. Тогда отвечающий этой матрице оператор будет унитарным.

Определение. Представление $g \to D_g$ в R называется унитарным, если матрицы D_g унитарны для $\forall g \in G$.

Теорема. Для конечных групп всякое представление эквивалентно унитарному.

Доказательство. Пусть $g \to D_g$ — произвольное представление группы G, действующее в некотором унитарном пространстве R. Все представления, эквивалентные данному, имеют вид: $g \to \tilde{D}_g$, где $\tilde{D}_g = T^{-1} D_g T$ и матрицу T можно рассматривать как матрицу перехода к новому базису в R. Теорема утверждает, что новый базис в R можно выбрать так, чтобы матрицы $g \to \tilde{D}_g$ были унитарны.

Покажем, что в качестве такого базиса можно взять любой базис в R, ортонормированный в смысле нового скалярного произведения, задаваемого формулой:

$$(x, y)_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (D_g x, D_g y). \tag{2.4}$$

Легко проверить, что равенство (2.4) действительно определяет скалярное произведение в R.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис в R, ортонормированный в старом скалярном произведении. Не ограничивая общности, можем считать, что матрицы D_g суть матрицы операторов представления $g \to T_g$ в базисе e_i. Построим в R базис $f_1, \dots, f_n$, ортонормированный в новом скалярном произведении, и обозначим матрицу перехода от e_i к f_i через T: $f_i = \sum\limits_{s=1}^{n} t_{si} e_s = Te_i$, $i = 1, \dots, n$. Докажем, что матрицы $\tilde{D}_g = T^{-1} D_g T$ унитарны в старом скалярном произведении, т.е. что представление $g \to \tilde{D}_g$ и есть то унитарное представление, о котором говорит теорема.

Для любого $g_0 \in G$ имеем

$$\begin{aligned}
(D_{g_0}x, D_{g_0}y)_1 &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(D_g D_{g_0}x, D_g D_{g_0}y) = \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(D_{gg_0}x, D_{gg_0}y) = \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{\tilde{g}\in G}(D_{\tilde{g}}x, D_{\tilde{g}}y) = (x, y)_1 . \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Здесь мы положили $\tilde{g} = gg_0$ и учли, что в силу леммы о сдвиге $\tilde{g}$ пробегает всю группу G одновременно с g. Далее, пусть ξ_i и η_j, $i, j = 1, \dots, n$, — координаты векторов x и y в базисе $e_1, \dots, e_n$. В силу свойств векторов e_i, f_i и матрицы T

$$\begin{aligned}
(Tx, Ty)_1 &= (T\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i, T\sum_{j=1}^{n}\eta_j e_j)_1 = \sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_j(Te_i, Te_j)_1 = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_j(f_i, f_j)_1 = \sum_{i,j=1}^{n} \qquad\qquad (x, y) . \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Далее, применяя (2.6), (2.5) и снова (2.6), получим

$$\begin{aligned}
(\tilde{D}_g x, \tilde{D}_g y) &= (T^{-1}D_g Tx, T^{-1}D_g Tx) = \\
&= (D_g Tx, D_g Ty)_1 = (Tx, Ty)_1 = (x, y) ,
\end{aligned}$$

т.е. представление $g \to \tilde{D}_g$ унитарно. Δ

§ 2.4. Представления групп в задачах квантовой механики

Прежде, чем изучать свойства представлений, покажем, как они возникают в задачах квантовой механики. Рассмотрим, например, уравнение Шредингера для одной квантовой частицы в потенциальном поле $V(\boldsymbol{r})$:

$$H(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) = \lambda\psi(\boldsymbol{r}), \tag{2.7}$$

где $H(\boldsymbol{r}) = -\hbar^2(2m)^{-1}\Delta_{\boldsymbol{r}} + V(\boldsymbol{r})$, $\Delta_{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, $V(\boldsymbol{r})$ — некоторая функция, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$. Пусть G — такая подгруппа группы ортогональных* преобразований в R^3, для которой $V(g^{-1}\boldsymbol{r}') = V(\boldsymbol{r}')$ для $\forall g \in G$ и $\forall \boldsymbol{r}' \in R^3$. Тогда G есть группа симметрии оператора $H(\boldsymbol{r})$. Действительно, полагая $\boldsymbol{r}' = g\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} = g^{-1}\boldsymbol{r}'$ и учитывая, что

$$\Delta_{g^{-1}\boldsymbol{r}'} = \Delta_{\boldsymbol{r}'}$$

(проверить самим, используя ортогональность преобразований g), имеем

$$H(g^{-1}\boldsymbol{r}') = H(\boldsymbol{r}'). \tag{2.8}$$

Обозначим через $U(\lambda)$ собственное подпространство оператора $H(\boldsymbol{r})$, отвечающее числу λ, и пусть функция $\psi(\boldsymbol{r}) \in U(\lambda)$, т.е. удовлетворяет уравнению (2.7). Так как (2.7) верно для любых $\boldsymbol{r}$, то (2.7) будет верно и при $\boldsymbol{r} = g^{-1}\boldsymbol{r}'$.

$$H(g^{-1}\boldsymbol{r}')\psi(g^{-1}\boldsymbol{r}') = \lambda\psi(g^{-1}\boldsymbol{r}').$$

*Ортогональные преобразования — это преобразования с вещественными унитарными матрицами; например — вращения, инверсия.

Откуда в силу (2.8) получаем, что

$$H(r')\psi(g^{-1}r') = \lambda\psi(g^{-1}r'). \tag{2.9}$$

Так как точка r была произвольной, то и r' — любая точка R^3. Поэтому мы можем опустить штрихи в (2.9):

$$H(r)\psi(g^{-1}r) = \lambda\psi(g^{-1}r). \tag{2.10}$$

Определим в пространстве $U(\lambda)$ операторы T_g, $g \in G$, равенством

$$T_g\psi(r) = \psi(g^{-1}r), \quad \psi(r) \in U(\lambda),\ g \in G. \tag{2.11}$$

В силу (2.10) $T_g\psi(r) \in U(\lambda)$ для $\forall\psi(r) \in U(\lambda)$ и $\forall g \in G$. Так как преобразование g — ортогональное, то оператор T_g — унитарный, ибо $(T_g\psi, T_g\varphi) = \int \psi(g^{-1}r)\bar{\varphi}(g^{-1}r)dr =$

$= \int \psi(r)\bar{\varphi}(r)dr$. Покажем, что операторы T_g образуют представление группы G в пространстве $U(\lambda)$. Пусть $g_1, g_2 \in G$. Имеем

$$\begin{aligned} T_{g_1}T_{g_2}\psi(r) &= T_{g_1}\psi(g_2^{-1}r) = T_{g_1}\hat{\psi}(r) = \hat{\psi}(g_1^{-1}r) = \\ &= \psi(g_2^{-1}g_1^{-1}r) = \psi\Big((g_1g_2)^{-1}r\Big) = T_{g_1g_2}\psi(r), \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $\hat{\psi}(r) \equiv \psi(g_2^{-1}r)$. Из (2.12) следует, что $T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_1g_2}$, т.е. соответствие $g \to T_g$ есть унитарное представление группы G в пространстве $U(\lambda)$. Таким образом, в собственном подпространстве оператора $H(r)$, отвечающем собственному значению λ, построено унитарное представление группы симметрии этого оператора. Тип этого представления и его свойства определяются свойствами волновых функций $\psi(r)$ из $U(\lambda)$. Поэтому, классифицируя представления групп симметрии гамильтонианов квантовых систем, мы тем самым узнаём и классифицируем возможные свойства симметрии функций из $U(\lambda)$. Именно на этом основано применение теории представлений в задачах квантовой механики и физики твёрдого тела.

Отметим, что для перехода от представления группы G унитарными операторами T_g к представлению унитарными матрицами достаточно выбрать в $U(\lambda)$ ортонормированный базис $\psi_1(r), ..., \psi_n(r)$ и построить матрицы D_g операторов T_g обычным образом:

$$T_g\psi_i = \sum_{s=1}^{n}(D_g)_{si}\psi_s\,, \quad g \in G\,.$$

Глава III. ПРИВОДИМЫЕ И НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

"Назвался груздем — полезай в кузов".

Русская пословица

§ 3.1. Приводимые представления и их разложение на неприводимые

Пусть $g \to T_g$ — представление группы G в унитарном n-мерном пространстве R. Подпространство R' из R назовем инвариантным для представления $g \to T_g$, если для $\forall x \in R'$ и $\forall g \in G$ выполняется $T_g x' \in R'$.

Определение. Представление группы G операторами T_g называется неприводимым, если в пространстве R не существует инвариантных для всех операторов T_g $g \in G$ подпространств, не совпадающих с R или нуль-вектором.

Представление $g \to T_g$ группы G операторами T_g в пространстве R назовем приводимым, если в R существует подпространство $R', R' \neq R$, $R' \neq \Theta$, инвариантное для всех операторов T_g.

Выясним какой вид имеют матрицы операторов T_g в случае приводимого представления. Пусть $\tilde{R}^{(1)}$ — инвариантное для всех операторов T_g, $g \in G$, подпространство из R и $m = \dim\tilde{R}^{(1)}$. Построим в R базис, взяв в качестве первых m базисных векторов базисные вектора подпространства $\tilde{R}^{(1)}$. Тогда матрица D_g оператора T_g в R будет иметь вид, в котором матричные элементы m первых столбцов равны нулю начиная с $(m+1)^{\text{ой}}$ строки:

$$(D_g)_{is} = 0 \quad s = i, \ldots, m, \quad i = m+1, \ldots, n,$$

т.е.

$$D_g = \begin{pmatrix} \tilde{D}_g^{(1)} & \tilde{D}_g^{(2)} \\ 0 & \tilde{D}_g^{(3)} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{D}_g^{(k)}$ — некоторые матрицы размерностей $m \times m$ при $k = 1$, $m \times (n-m)$ при $k = 2$, $(n-m) \times (n-m)$ при $k = 3$. Пусть $\tilde{R}^{(2)}$ — ортогональное дополнение $\tilde{R}^{(1)}$ до R:

$$\tilde{R}^{(2)} = R \ominus \tilde{R}^{(1)} = \{y | y \in R, (y, x) = 0 \quad \text{для} \quad \forall x \in \tilde{R}^{(1)}\}.$$

Очевидно

$$R = \tilde{R}^{(1)} \oplus \tilde{R}^{(2)}.$$

Если представление $g \to T_g$ унитарно в R, то подпространство $\tilde{R}^{(2)}$ также инвариантно для операторов T_g, ибо

$$(T_g y, x) = (y, T_g^{-1} x) = (y, T_{g^{-1}} x) = (y, x') = 0$$

для $\forall y \in \tilde{R}^{(2)}$, $\forall x \in \tilde{R}^{(1)}$. Поэтому, если в качестве базиса в R взять базис, составленный из базисов подпространств $\tilde{R}^{(1)}$

и $\tilde{R}^{(2)}$, то матрица D_g примет блочно-диагональный вид, где первый блок — матрица $D_g^{(21)} = \tilde{D}_g^{(1)}$, а второй блок составит матрица $D_g^{(22)}$ размерности $(n-m)\times(n-m)$, расположенная в правом нижнем углу матрицы D_g :

$$\begin{pmatrix} D_g^{(21)} & O \\ O & D_g^{(22)} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $T_g^{(i)}$ оператор T_g рассматриваемый в пространстве $\tilde{R}^{(i)}$, $i = 1,\ 2$. Очевидно $D_g^{(2i)}$ есть матрица оператора $T_g^{(i)}$ в $\tilde{R}^{(i)}$ и соответствия $g \to T_g^{(i)}$ (или $g \to D_g^{(2i)}$) $i = 1,\ 2$ есть представления группы G в пространствах $\tilde{R}^{(i)}$, $i = 1,\ 2$. Если хотя бы одно из этих представлений, например $g \to T_g^{(s)}$, приводимо, то мы можем повторить для него в пространстве $\tilde{R}^{(s)}$ те же рассуждения, которые были проведены для представления $g \to T_g$ в пространстве R: представить пространство $\tilde{R}^{(s)}$ в виде суммы двух подпространств, инвариантных для операторов $T_g^{(s)}$, $g \in G$, образовать базис в $\tilde{R}^{(s)}$ из базисов этих подпространств и убедиться, что матрицы операторов $T_g^{(s)}$ в этом базисе будут иметь в $\tilde{R}^{(s)}$ блочно-диагональный вид.

Продолжая этот процесс, мы, в итоге, разложим исходное пространство R в прямую сумму инвариантных, для операторов T_g $g \in G$, подпространств $R^{(i)}$, $R = \sum_{i=1}^{k} \oplus R^{(i)}$, $k \geq 2$, причем в каждом из этих подпространств представление $g \to T_g$ неприводимо. Взяв в качестве базиса в R совокупность базисных векторов $R^{(1)}$, $R^{(2)}, \ldots, R^{(k)}$ мы получим, что матрицы $\tilde{D}_g$ операторов T_g в построенном базисе будут иметь (для всех $g \in G$), одинаковую блочно-диагональную структуру из k блоков $D_g^{(i)}$ $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$, размерностей $m_i = \dim R^{(i)}$, расположенных для каждого i на пересечении строк с номерами $M_{i-1}+s$ и столбцов с номерами $M_{i-1}+t$:

$$\tilde{D}_g \equiv \begin{pmatrix} D^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_g^{(2)} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & D_g^{(k)} \end{pmatrix}$$

Рис.1.

Здесь $s, t = 1, 2, \dots, m_i$, $M_{i-1} = m_0 + \dots + m_{i-1}$, $m_0 = 0$ (см. рис.1).

Таким образом, мы видим, что каждое унитарное приводимое представление $g \to T_g$ может быть разложено на неприводимые. При этом матрицы D_g операторов T_g становятся блочно–диагональными матрицами $\tilde{D}_g$ с соответственно одинаковым расположением и размером блоков для всех $g \in G$. Приведение матриц D_g к блочно–диагональному виду $\tilde{D}_g$ осуществляется с помощью выбора в пространстве представления R нового базиса, составленного из базисов подпространств $R^{(i)}$ из R, инвариантных для операторов T_g. Если A есть матрица перехода от старого базиса к новому, то $\tilde{D}_g = A^{-1} D_g A$. Следовательно, условием приводимости представления $g \to D_g$, заданного в матричной форме (матрицы D_g — унитарные!), является существование такой неособенной матрицы A, то матрицы $\tilde{D}_g$ — блочно–диагональны.

Ближайшие цели курса: получить критерии неприводимости (и приводимости) представлений и оценить число не эквивалентных неприводимых представлений данной группы.

§ 3.2. Леммы Шура

Изучение свойств неприводимых представлений базируется на двух леммах, названных в честь их автора — математика Шура.

Первая лемма Шура. Пусть $g \to D_g$ — неприводимое представление группы G и неособенная матрица A коммутирует с матрицами D_g для всех $g \in G$:

$$AD_g = D_g A \qquad \forall g \in G. \tag{3.1}$$

Тогда матрица A кратна единичной, т.е.

$$A = \lambda I,$$

где I — единичная матрица, λ — какая-либо константа.

Доказательство. Рассмотрим уравнение $Ax = \lambda x$ в пространстве представления R. Так как в унитарном пространстве любая матрица имеет, по крайней мере одно собственное значение, то найдется такое λ_0 и вектор $x_0 \in R$, $x_0 \neq \Theta$, что $Ax_0 = \lambda_0 x_0$. В силу (3.1)

$$AD_g x_0 = D_g A x_0 = \lambda_0 D_g x_0 \tag{3.2}$$

и, значит, вектора $D_g x_0$ для всех $g \in G$ тоже являются собственными для оператора A и отвечают тому же собственному значению λ_0, что и x_0. Пусть $U(\lambda_0)$ — собственное подпространство оператора A в R, соответствующее числу λ_0. Из (3.2) следует, что подпространство $U(\lambda_0)$ инвариантно для матриц D_g. Поскольку представление $g \to D_g$ неприводимо, то или $U(\lambda_0) = \Theta$ или $U(\lambda_0) = R$. Первый случай невозможен, т.к. $U(\lambda_0) \ni x_0 \neq \Theta$, значит $U(\lambda_0) = R$ и матрица A действует на любой вектор $x \in U(\lambda_0) = R$ как оператор умножения на число λ_0, т.е. матрица A кратна единичной матрице A. Δ

Отметим, что для приводимых представлений лемма не верна. Действительно, в подходящем базисе матрицы приводимых представлений имеют блочно-диагональный вид D_g и состоят из двух блоков размерностей m и $n-m$, т.е.

$$(D_g)_{st} = (D_g)_{ts} = 0 \quad \text{при} \quad s = 1, \dots, m, \quad t = m+1, \dots, n.$$

Поэтому они будут коммутировать с диагональными матрицами $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = 0$ $i \neq j$, $a_{ii} = a$, $i = 1, \dots, m$, $a_{ii} = b$, $i = m+1, \dots, n$ при любых a и b.

Таким образом, мы установили следующий факт: для того, чтобы представление $g \to D_g$ было неприводимо, необходимо и достаточно, чтобы равенство (3.1) выполнялось только для матриц A, кратных единичной.

Вторая лемма Шура. Пусть $g \to D_g^{(1)}$ и $g \to D_g^{(2)}$ суть не эквивалентные неприводимые представления группы G в пространствах R_1 и R_2 размерностей n_1 и n_2, A — матрица $n_2 \times n_1$, действующая из R_1 в R_2, и

$$AD_g^{(1)} = D_g^{(2)} A \qquad \forall g \in G. \tag{3.3}$$

Тогда A есть нулевая матрица.

Доказательство. Пусть Θ_i — нуль-вектор пространства R_i, $i = 1, 2$. Линейное пространство

$$R_1' = \{x | x \in R_1, \quad Ax = \Theta_2\}$$

инвариантно для матриц $D_g^{(1)}$, т.к. $AD_g^{(1)}x = D_g^{(2)}Ax = D_g^{(2)}\Theta_2 = \Theta_2$. Поскольку представление $D_g^{(1)}$ неприводимо, то или $R_1' = R_1$ или $R_1' = \Theta_1$. В первом случае матрица A переводит все пространство R_1 в нуль-вектор пространства R_2 и лемма доказана. Покажем, что второй случай невозможен.

Если $R'_1 = \Theta_1$, то матрица A переводит разные элементы из R_1 в разные элементы из R_2, поскольку при $Ax_1 = Ax_2$ мы имели бы $A(x_1 - x_2) = \Theta_2$, т.е. $x_1 - x_2 \in R'_1$ и значит $x_1 - x_2 = \Theta_1$, что невозможно при $x_1 \neq x_2$. Таким образом, отображение R_1 на множество $R'_2 = \{Ax | x \in R_1\}$ взаимно однозначно. Покажем, что $R'_2 = R_2$. Имеем

$$D_g^{(2)} Ax = AD_g^{(1)}x = Ay \qquad x \in R_1,$$

где $y = D_g^{(1)}x \in R_1$. Таким образом показано, что множество R'_2 инвариантно для операторов $D_g^{(2)}$ и значит $R'_2 = \Theta_2$ или $R'_2 = R_2$. Но равенство $R'_2 = \Theta_2$ противоречит взаимной однозначиности отображения R_1 на R'_2, и поэтому оно невозможно. Следовательно, $R'_2 = R_2$ и, значит, оператор A осуществляет взаимно-однозначное отображение R_1 на всё R_2 и $n_1 = n_2$. Поэтому оператор A обратим и в силу (3.3)

$$D_g^{(1)} = A^{-1} D_g^{(2)} A,$$

т.е. матрицы $D_g^{(1)}$ и $D_g^{(2)}$ подобны, а представления $g \to D_g^{(1)}$, $g \to D_g^{(2)}$ — эквивалентны, что противоречит условию леммы. Полученное противоречие показывает, что случай $R'_1 = \Theta$, невозможен. Δ

ЗАДАНИЕ. Выяснить, нужна ли для справедливости лемм Шура унитарность матриц, участвующих в формулировках лемм?

§ 3.3. Соотношения ортогональности

Используя леммы Шура можно получить соотношения между элементами матриц неприводимых представлений.

Пусть $D_g^{(i)}$ и $D_g^{(j)}$ — матрицы двух неприводимых неэквивалентных унитарных представлений группы G порядка N; n_1, n_2 — размерности этих представлений. Докажем, что

$$\sum_{g\in G}(D_g^{(i)})_{\mu\nu}(\bar{D}_g^{(j)})_{\lambda\beta}=0 \tag{3.4}$$

$$|G|^{-1}\sum_{g\in G}(D_g^{(i)})_{\mu\nu}(\bar{D}_g^{(i)})_{\lambda\beta}=\delta_{\lambda\mu}\delta_{\beta\nu}n_i^{-1}. \tag{3.5}$$

Доказательство равенств (3.4), (3.5) целиком основано на леммах Шура и состоит в построении таких матриц A, которые удовлетворяют (3.3) или (3.1) и для которых матричные элементы (равные нулю или константе согласно леммам Шура) совпадают с левыми частями равенств (3.4), (3.5).

Итак, пусть

$$A=\sum_g D_g^{(i)}XD_{g^{-1}}^{(j)},$$

где X — произвольная матрица с числом строк n_i и столбцов n_j. Покажем, что

$$AD_g^{(j)}=D_g^{(i)}A. \tag{3.6}$$

Действительно

$$\begin{aligned}D_g^{(i)}A &= D_g^{(i)}\sum_{g'\in G}D_{g'}^{(i)}XD_{g'^{-1}}^{(j)}=\sum_{g'\in G}D_{gg'}^{(i)}XD_{g'^{-1}}^{(j)}=\\ &=\sum_{g''\in G}D_{g''}^{(i)}XD_{(g^{-1}g'')^{-1}}^{(j)}=\sum_{g''\in G}D_{g''}^{(i)}XD_{g''^{-1}}^{(j)}D_g^{(j)}=AD_g^{(j)},\end{aligned}$$

т.е. (3.6) верно.

В силу второй леммы Шура все матричные элементы $A_{\mu\lambda}$ матрицы A равны нулю при любых мат элементах X_{st} матрицы X, т.е.

$$A_{\mu\lambda} = \sum_{g\in G} \sum_{s,t} (D_g^{(i)})_{\mu s} X_{st} (D_{g^{-1}}^{(j)})_{t\lambda} = 0.$$

Фиксируем здесь μ, λ и положим

$$X_{st} = 0 \quad \text{при} \quad (s,t) \neq (\nu, \beta), \quad X_{\nu\beta} = 1.$$

Тогда

$$A_{\mu\lambda} = \sum_{g\in G} (D_g^{(i)})_{\mu\nu} (D_{g^{-1}}^{(j)})_{\beta\lambda} = 0. \tag{3.7}$$

Для унитарных представлений $(D_{g^{-1}}^{(j)})_{\beta\lambda} = (\bar{D}_g^{(j)})_{\lambda\beta}$ и равенство (3.4) следует из (3.7).

Далее, при $j = i$

$$A = \sum_{g\in G} D_g^{(i)} X D_{g^{-1}}^{(i)},$$

где X — любая матрица размерности $n_i \times n_i$. Как и раньше, убедимся, что (3.6) верно и, значит,

$$A = \lambda I, \tag{3.8}$$

где число λ зависит от выбора матрицы X. Следовательно

$$A_{\mu\alpha} = \sum_{g\in G} \sum_{s,t} (D_g^{(i)})_{\mu s} X_{st} (D_{g^{-1}}^{(i)})_{t\alpha} = \lambda \delta_{\mu\alpha}.$$

Выбираем $X_{st} = 0$ при $(s,t) \neq (\nu,\ \beta)$, $X_{\nu\beta} = 1$. Тогда последнее равенство примет вид

$$A_{\mu\alpha} = \sum_{g\in G} (D_g^{(i)})_{\mu\nu} (D_{g^{-1}}^{(i)})_{\beta\alpha} = \lambda_{\nu\beta} \delta_{\mu\alpha}. \tag{3.9}$$

Чтобы найти, чему равно число $\lambda_{\nu\beta}$, положим в (3.9) $\mu = \alpha$ и просуммируем по α от 1 до n_i. Получим

$$\sum_{g\in G}\sum_{\alpha=1}^{n_i}(D^{(i)}_{g^{-1}})_{\beta\alpha}(D^{(i)}_{g})_{\alpha\nu} = \sum_{g\in G}(D^{(i)}_{e})_{\beta\nu} = \lambda_{\nu\beta}n_i,$$

где e — единичный элемент группы G. Поскольку $(D^{(i)}_{e})_{\beta\nu} = \delta_{\beta\nu}$, то отсюда следует, что $\lambda_{\nu\beta} = |G|\delta_{\beta\nu}\cdot n_i^{-1}$. Подставляя выражение для $\lambda_{\nu\beta}$ в (3.9), получаем (3.5).

Равенства (3.4), (3.5) называются соотношениями ортогональности, их можно записать в виде одного соотношения:

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(D^{(i)}_{g})_{\mu\nu}(\bar{D}^{(j)}_{g})_{\alpha\beta} = n_i^{-1}\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{ij}. \qquad (3.10)$$

Соотношение (3.10) можно записать в более простом и естественном виде. Для этого введем N-мерное векторное пространство $\mathcal{F}_N$, в котором базисные вектора и, следовательно, координаты любых векторов последовательно занумерованы элементами группы G, и определим в этом пространстве скалярное произведение

$$\left(F(g),\tilde{F}(g)\right)_G = \frac{1}{N}\sum_{g_i\in G}F_{g_i}\tilde{F}_{g_i}, \qquad (3.11)$$

где $F(g) = (F_{g_1},\ldots,F_{g_N})$, $\tilde{F}(g) = (\tilde{F}_{g_1},\ldots,\tilde{F}_{g_N})$ — произвольные вектора из $\mathcal{F}_N$. Очевидно вектора

$$(D^{(s)}_{g})_{\gamma\delta} = \{(D^{(s)}_{g_1})_{\gamma\delta},\ (D^{(s)}_{g_2})_{\gamma\delta},\ldots,(D^{(s)}_{g_N})_{\gamma\delta}\}$$

при любых фиксированных s,γ,δ лежат в $\mathcal{F}_N$ и поэтому равенство (3.10) можно переписать в виде

$$\left((D^{(i)}_{g})_{\mu\nu},(D^{(j)}_{g})_{\alpha\beta}\right)_G = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{ij}n_j^{-1}. \qquad (3.12)$$

Равенство (3.12) означает, что вектора $(D^{(i)}_{g})_{\mu\nu}$ взаимно ортогональны для различных i,μ,ν. Для каждого фиксированного i число таких векторов равно n_i^2, где $n_i = \dim D^{(i)}_{g}$, а общее число взаимно ортогональных векторов $(D_g^{(i)})_{\mu\nu}$ равно $\sum_{i=1}^{q} n_i^2$, где q — число не эквивалентных неприводимых представлений группы G. Так как в N-мерном пространстве $\mathcal{F}_N$ не может быть больше чем N взаимно ортогональных векторов, то

$$\sum_{i}^{q} n_i^2 \leq N. \tag{3.13}$$

В следующем параграфе мы докажем, что в (3.13) имеет место равенство.

Глава IV. ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРОВ

"Что было, то и будет;
что делалось, то и будет делаться."

Екклезиаст

§ 4.1. Характеры и их свойства

Пусть $g \to D_g$ представление группы G матрицами D_g.

Определение. След матрицы D_g назовем характером представления D_g и обозначим $\mathcal{X}_g$. Очевидно

$$\mathcal{X}_g = SpD_g = \sum_{i=1}^{n} (D_g)_{ii}.$$

Характер–числовая функция, заданная на элементах группы. Из курса линейной алгебры известно, что след матрицы не меняется при преобразовании подобия, т.е.

$$SpD = SpADA^{-1}, \tag{4.1}$$

для любых квадратных матриц D и A размерности n (A — не особая). Поэтому

а) характеры сопряженных друг другу элементов f и g совпадают в любом представлении $g \to D_g$;

б) характеры всех представлений $\tilde{D}_g$, эквивалентных данному представлению, совпадают между собой.

ЗАДАНИЕ. Доказать а) и б) используя (4.1).

Далее будет показано, что не эквивалентные представления имеют различные характеры. Однако если представления неприводимы, то справедливо более сильное утверждение: характеры не эквивалентных неприводимых представлений ортогональны.

Теорема 4.1. Пусть $g \to D_g^{(i)}$, $g \to D_g^{(j)}$ два неприводимых представления группы G. Тогда

$$(\mathcal{X}_g^{(i)}, \mathcal{X}_g^{(j)})_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathcal{X}_g^{(i)} \bar{\mathcal{X}}_g^{(j)} = \delta_{ij}. \tag{4.2}$$

Доказательство. В силу (4.1) можно считать $D_g^{(i)}$ и $D_g^{(j)}$ унитарными. Тогда подставляя в (4.2) $\mathcal{X}_g^{(t)} = \sum_{\nu=1}^{n_t} (D_g^{(t)})_{\nu\nu}$, $t = i, j$, и используя равенство (3.10) мы сразу получаем (4.2). Δ

Разобъём группу G на классы C_s сопряженных элементов, $s = 1 \ldots p$. Так как величина характера одинакова для всех элементов из одного класса, то мы можем записать (4.2) в виде

$$(\mathcal{X}_g^{(i)}, \mathcal{X}_g^{(j)})_G = \frac{1}{|G|} \sum_{s=1}^{p} k_s \mathcal{X}_s^{(i)} \bar{\mathcal{X}}_s^{(j)} = \delta_{ij}, \tag{4.3}$$

где k_s — число элементов класса C_s, а $\mathcal{X}_s^{(t)}$ — значение характера представления типа t на классе C_s.

§ 4.2. Характеры и представления

Свойство ортогональности характеров не эквивалентных неприводимых представлений, выражаемое равенствами (4.2) или (4.3), дает возможность разлагать произвольные представления на неприводимые. Действительно, пусть $g \to D_g$ — какое-либо представление группы G. Мы уже показали в § 3.1, что выбрав соответствующим образом базис в пространстве представления, мы можем привести все матрицы D_g к блочно-диагональному виду $\tilde{D}_g$ и $\mathcal{X}_g \equiv SpD_g = Sp\tilde{D}_g$. Блоками в $\tilde{D}_g$ являются матрицы тех неприводимых представлений группы G, которые содержатся в D_g. Обозначим через p_i число блоков в $\tilde{D}_g$, отвечающих неприводимому представлению $D_g^{(i)}$ типа i. Тогда

$$a) \quad D_g \sim \tilde{D}_g = \sum_i \oplus p_i D_g^{(i)} \qquad b) \quad \mathcal{X}_g = \sum_i p_i \mathcal{X}_g^{(i)}, \tag{4.4}$$

где $\mathcal{X}_g^{(i)}$ есть характер представления $D_g^{(i)}$. Действительно, хотя коэффициенты p_i пока неизвестны, само существование разложения (4.4b) следует из очевидного факта, что след $\mathcal{X}_g$ блочно-диагональной матрицы $\tilde{D}_g$ равен сумме следов всех входящих в неё блоков. Соотношение (4.4b) позволяет найти числа p_i. Умножая (4.4b) скалярно в $\mathcal{F}_N$ на вектор $\mathcal{X}_g^{(j)}$ получим в силу (4.2)

$$(\mathcal{X}_g, \mathcal{X}_g^{(j)})_G = p_j. \tag{4.5}$$

Соотношение (4.5) является основным рабочим инструментом при разложении представления на неприводимые компоненты. Для его применения надо знать характер раскладываемого представления (он обычно известен) и характеры неприводимых представлений группы G (берутся из таблиц). Отметим, что $(\mathcal{X}_g, \mathcal{X}_g)_G = \sum_i p_i^2$ (см.(4.4)). Таким образом, если задано произвольное представление $g \to D_g$, то мы можем вычислить величину $m = \sum_i p_i^2$. Если $m = 1$, то ясно, что какое-то $p_i = 1$, а остальные $p_j = 0$, $j \neq i$, т.е. представление $g \to D_g$ неприводимо.

Таким образом, равенство $(\mathcal{X}_g, \mathcal{X}_g)_G = 1$ является необходимым и достаточным условием неприводимости представления $g \to D_g$.

ЗАДАНИЕ. Описать возможную структуру представления $g \to D_g$, если

$$\text{а) } (\mathcal{X}_g, \mathcal{X}_g)_G = 3; \text{ б) } (\mathcal{X}_g, \mathcal{X}_g)_G = 4.$$

§ 4.3. О числе неприводимых представлений и их размерностях (теоремы Бернсайда)

Используя установленные выше свойства характеров неприводимых представлений докажем следующее утверждение.

Теорема 4.3 (первая теорема Бернсайда). Сумма квадратов размерностей всех неприводимых не эквивалентных представлений равна порядку группы.

Доказательство. Определим линейное пространство $R(G)$, элементами которого являются всевозможные линейные комбинации элементов группы G : $f = \sum_{i=1}^{N} c_i g_i$. Здесь

$N = |G|$, а сумма понимается как вектор N-мерного пространства $R(G)$ с "базисом" $g_1, \ldots, g_N$, имеющий в этом базисе координаты $c_1, \ldots, c_N$. $R(G)$ называют пространством группы. $R(G)$ является естественной реализацией пространства $\mathcal{F}_N$ (см.§ 3.3).

Определим в $R(G)$ операторы T_{g_k}:

$$T_{g_k} f = g_k f = \sum_i^N c_i g_k g_i = \sum_{i=1}^N c_i g_{i_k},$$

где $g_{i_k} = g_k g_i$ и в силу леммы о сдвиге элемент g_{i_k} пробегает всю группу G, когда g_i пробегает группу G, а g_k — фиксирован. Легко видеть, что $T_{g_k} f \in R(G)$ для $\forall f \in R(G)$ и отображение $g_k \to T_{g_k}$ $k = 1, \ldots, N$ является представлением группы G в пространстве группы $R(G)$.

Построим матрицы операторов T_{g_k} в $R(G)$. Для этого применим T_{g_k} последовательно к базисным векторам $g_1, g_2, \ldots, g_N$, где $g_1 = e$. Имеем:

$$T_{g_k} g_s = g_k g_s = \sum_{p=1}^N (D_{g_k})_{ps} g_p.$$

Поскольку $g_k g_s$ есть один из элементов группы (например, g_t) то ясно, что $(D_{g_k})_{ts} = 1$, $(D_{g_k})_{ps} = 0$ при $p \neq t$. Очевидно, $t \neq s$ если $g_k \neq g_1 = e_1$, ибо равенство $g_k g_s = g_s$ сразу приводит к соотношению $g_k = e$. Таким образом, если $g_k \neq e_1$, то $(D_{g_k})_{ss} = 0$ при $\forall s$. Следовательно, при $k \neq 1$, $\mathcal{X}_{g_k} = Sp D_{g_k} = 0$. При $k = 1$, $\mathcal{X}_{g_1} = Sp D_{g_1} = N$, ибо в любом представлении единичному элементу отвечает всегда диагональная единичная матрица, след которой, естественно, равен размерности представления, т.е. размерности N пространства $R(G)$.

Таким образом, мы получили представление группы G, в котором характер единичного элемента равен порядку группы, а характеры всех остальных элементов равны нулю.

Это представление называется регулярным. Разложим регулярное представление на неприводимые, используя формулу (4.5). Пусть $n_i = \dim D_g^{(i)}$. Имеем

$$p_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \chi_{g_i}\bar{\chi}_{g_i}^{(i)} = \frac{1}{N}\cdot N \cdot n_i = n_i.$$

Таким образом, каждое неприводимое представление содержится в регулярном число раз, равное размерности n_i этого представления. Так как размерность любого представления равна сумме размерностей его неприводимых компонент, то

$$N = \sum_{i=1} n_i \cdot n_i.$$

Δ

<u>*Следствие.*</u> Рассмотрим введённые в § 3.3 N-мерные вектора

$$(D_g^{(i)})_{\mu\nu} = \left\{(D_{g_1}^{(i)})_{\mu\nu}, \ldots, (D_{g_N}^{(i)})_{\mu\nu}\right\},$$

$\mu,\ \nu = 1,\ldots,n_i;\ i = 1,\ldots,q$. Они взаимно ортогональны и их число $(\sum_{i=1}^{q} n_i^2)$, согласно доказанной теореме, равно N. Поэтому вектора $(D_g^{(i)})_{\mu\nu}$ образуют базис в N-мерном пространстве $\mathcal{F}_N$ (см. § 3.3) (эквивалентная формулировка: вектора $\sum_{s=1}^{N}(D_{g_s}^{(i)})_{\mu\nu} g_s$ образуют базис в пространстве группы $R(G)$).

Установим теперь, сколько не эквивалентных неприводимых представлений имеет группа G.

Теорема 4.4 (вторая теорема Бернсайда). Число не эквивалентных неприводимых представлений группы G равно числу классов сопряженных элементов.

Доказательство. До сих пор нам было безразлично, в каком порядке занумерованы элементы группы G. Сейчас мы выберем этот порядок специальным образом. Разобъём группу G на классы сопряженных элементов C_i и занумеруем элементы группы последовательно перечисляя элементы классов C_1, C_2 и т.д. Таким образом, если k_i есть число элементов класса C_i, то

$$C_1 = \{g_1, \ldots, g_{k_1}\}, \quad C_2 = \{g_{k_1+1}, \ldots, g_{k_1+k_2}\} \quad \text{и} \quad \text{т.д.}$$

Поэтому в векторном пространстве $\mathcal{F}_N$ для каждого вектора $F(g) = \{F_{g_1}, \ldots, F_{g_N}\}$ первые k_1 координат занумерованы элементами класса C_1, следующие k_2 координат–элементами класса C_2 и т.д.

Пусть $K = \{F(g)|F(g) \in \mathcal{F}_N,\ F_{g_i} = F_{g_j}$ если $g_i \sim g_j\}$, т.е. K есть множество векторов вида

$$F(g) = \{a_1, \ldots, a_1, \quad a_2, \ldots, a_2, \quad \ldots, \quad a_{q'}, \ldots, a_{q'}\},$$

где a_i — произвольные числа, каждое a_i повторяется k_i раз, q' — число классов сопряженных элементов группы G. Ясно, что K — линейное пространство и его размерность равна q'.

Теперь мы можем непосредственно перейти к доказательству теоремы. Вектора $\mathcal{X}_g^{(i)} = \{\mathcal{X}_{g_1}^{(i)}, \ldots, \mathcal{X}_{g_N}^{(i)}\}$ $i = 1, \ldots, q$ — характеры неприводимых представлений $D_g^{(i)}$ — принадлежат подпространству K, так как характеры сопряженных элементов совпадают ($\mathcal{X}_{g_s}^{(i)} = \mathcal{X}_{g_t}^{(i)}$ при $g_s \sim g_t$, см.§ 4.1, утверждение а)). В силу (4.2) вектора $\mathcal{X}_g^{(i)}$ $i = 1, \ldots, q$ линейно-независимы. Покажем, что они образуют базис в q'–мерном пространстве K. Отсюда будет следовать, что их число q (число не эквивалентных неприводимых представлений группы

G) равно размерности q' пространства K (т.е. числу классов сопряженных элементов группы G.)

Пусть $F(\hat{g})$ — произвольный вектор из $K \subset \mathcal{F}_N$. В силу следствия к теореме 4.3 мы можем разложить $F(\hat{g})$ по векторам $(D_g^{(i)})_{\mu\nu}$:

$$F(\hat{g}) = \{F_{g_1}, F_{g_2}, \ldots, F_{g_N}\} = \sum_{\mu,\nu,i} d_{\mu\nu}^{(i)}(D_{\hat{g}}^{(i)})_{\mu\nu}.$$

Пусть g — любой элемент из G. Рассмотрим вектор $F(g^{-1}\hat{g}g)$, полученный из $F(\hat{g})$ перестановкой координат: i-ая координата вектора $F(g^{-1}\hat{g}g)$ есть (по определению) $F_{g^{-1}g_ig}$, т.е.

$$F(g^{-1}\hat{g}g) = \{F_{g^{-1}g_1g}, F_{g^{-1}g_2g}, \ldots, F_{g^{-1}g_Ng}\}.$$

Поскольку элементы $g^{-1}g_ig$ и g_i лежат в одном классе сопряженных друг другу элементов и так как $F(\hat{g}) \in K$, то $F_{g^{-1}g_ig} = F_{g_i}$ $i = 1, 2, \ldots, N$ и, следовательно,

$$F(\hat{g}) = F(g^{-1}\hat{g}g) = \sum_{\mu,\nu,i} d_{\mu\nu}^{(i)}(D_{g^{-1}\hat{g}g}^{(i)})_{\mu\nu}.$$

Просуммируем это векторное равенство по $g \in G$ и поделим на $|G|$. Так как $F(\hat{g})$ не зависит от g и в силу (3.5) мы получим, что

$$\begin{aligned}
F(\hat{g}) &= \sum_{i,\mu,\nu} d_{\mu\nu}^{(i)} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} (D_{g^{-1}\hat{g}g}^{(i)})_{\mu\nu} = \\
&= \sum_{i,\mu,\nu} d_{\mu\nu}^{(i)} \sum_{s,t=1}^{n_i} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} (D_{g^{-1}}^{(i)})_{\mu s}(D_{\hat{g}}^{(i)})_{st}(D_g^{(i)})_{t\nu} = \\
&= \sum_{i,\mu,\nu} d_{\mu\nu}^{(i)} \sum_{s,t=1}^{n_i} (D_{\hat{g}}^{(i)})_{st} \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} (\bar{D}_g^{(i)})_{s\mu}(D_g^{(i)})_{t\nu} = \\
&= \sum_{i,\mu,\nu} \sum_{s,t=1}^{n_i} d_{\mu\nu}^{(i)}(D_{\hat{g}}^{(i)})_{st}\delta_{st}\delta_{\mu\nu}n_i^{-1} = \sum_i \Big(\sum_\mu d_{\mu\mu}^{(i)} n_i^{-1}\Big)\mathcal{X}_{\hat{g}}^{(i)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, произвольный вектор $F(\hat{g})$ из K мы разложили по векторам–характерам неприводимых представлений группы G, т.е. характеры $\chi_g^{(i)}$ $i = 1, \ldots, q$ образуют базис в пространстве K. Δ

Подписано к печати 27.03.95 г. Формат 60 × 84/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Объем 2,81 усл.п.л.
Заказ 5436. Тираж 100.

Отпечатано в фирме УНИ–принт