Нижегородский
научно-исследовательский радиофизический институт
Государственного комитета РФ по высшему образованию

Препринт №410

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И МЕТОД ПРЯМОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

В.И.Есипенко

Нижний Новгород,1995

Есипенко В.И.
Вероятностные характеристики и метод прямого статистического анализа линейных систем в переходном режиме // Препринт N410. - Нижний Новгород: НИРФИ,1995. - 28 с.

УДК 621.372.061.2:519.21

Обосновано введение для описания линейных систем в вероятностной области одномерной и многомерной плотности распределения вероятности и других вероятностных характеристик мгновенных значений их импульсных характеристик. Установлена связь многомерной плотности распределения вероятности случайного процесса линейной системы с ее импульсной характеристикой. На основе использования многомерной плотности распределения вероятности мгновенных значений импульсной характеристики линейной системы с переменными (детерминированными) параметрами исследован метод прямого статистического анализа линейных систем при нулевых начальных условиях. В общем случае воздействия на вход линейной системы негауссовского случайного процесса получена многомерная произвольной размерности n и одномерная плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы в переходном режиме. Рассмотрены примеры.

Подписано к печати 05.07.95 г. Формат 60 х 84/16
Бумага писчая. Печать офсетная. Объём 1.75 усл.п.л.
Заказ 5438. Тираж 70.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ

Введение. Шумит любая электрическая цепь, поддерживаемая при определённой абсолютной (шумовой) температуре $T_к$, причём номинальная мощность шума $P_ш=k_Б T_к p(f)df$ является универсальной функцией частоты f и температуры $T_к$, т.е. не зависит от вида объекта и механизма возникновения шума (теорема Найквиста [1]). Здесь $k_Б$ - постоянная Больцмана, $p(f)$ - фактор Планка. Помимо теплового шума пассивной линейной системы, вызванного хаотическим движением носителей заряда (ниже рассматриваются только линейные системы), в линейных активных системах (четырехполюсниках) возможны другие типы шумов (например, дробовой шум, шум токораспределения и др.), которые всегда наложены на первый.

Таким образом, выход любой закороченной по сигнальному входу линейной системы представляет собой случайный процесс $z(t)$, называемый шумом линейной системы. Этот процесс, как и большой класс других случайных процессов, можно описать выражением [2]

$$z(t)=a(t)z_0(t) + m_z(t) ,$$

где $z_0(t)$-стационарная центрированная случайная функция времени; $m_z(t)$ (математическое ожидание процесса $z(t)$) и $a(t)$ - медленные, по сравнению с $z_0(t)$, функции времени, которые могут быть как детерминированными, так и случайными (например, для линейных систем с переменными параметрами [3,4]).

Известно, что для описания процесса $z(t)$ необходимо задать n-мерную плотность распределения вероятности (ПРВ) $p_n(z_0,z_1,...,z_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$ его мгновенных значений, характеризующую этот процесс в вероятностной области, причем это описание будет тем детальнее, чем больше n (исчерпывающее описание процесса $z(t)$ может быть также получено при определённых условиях заданием соответствующих наборов моментных или кумулянтных функций [5]). Исследованию процесса $z(t)$ посвящено достаточно много работ (см.,например,обширную библиографию в [6]), в которых выяснены главнейшие явления, порождающие процесс $z(t)$ и законы, достаточно хорошо аппроксимирующие его плотность распределения вероятности. Поэтому в дальнейшем будем полагать,что $p_n(z_0,z_1,...,z_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$ известна.

При воздействии единичного дельта-импульса $\delta(t-t_0)$ на вход линейной системы на её выходе будет иметь место случайный процесс

$$y(t_0,t)=\begin{cases} z(t)+h(t_0,t) & \text{при } t>t_{0+}, \\ z(t) & \text{при } t<t_{0-}, \end{cases} \quad (1)$$

где $h(t_0,t)$ - импульсная характеристика линейной системы,t_0- момент приложения внешнего воздействия.

Процесс $y(t_0,t)$ назовём случайным процессом линейной системы. Этот процесс полностью характеризует линейную систему во временной, частотной и в вероятностной областях. Однако, описание процесса $y(t_0,t)$ в вероятностной области в настоящее время ещё далеко от завершённости. Так, по отношению к временной и частотной областям, в которых для характеристики линейных систем введены функции, достаточно полно их описывающие, вероятностная область выглядит несколько обособленно. Это обусловлено тем, что несмотря на введение автокорреляционной функции

$$2\pi R_h(t_0,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}K^2(j\omega,t_0)\exp(j\omega\tau)d\omega$$

импульсной характеристики $h(t_0,t)$ линейной системы (см.,например,[7,8]), выявленную идентичность в математическом отношении некоторых характеристик случайных величин характеристикам линейных систем во временной и частотной областях [9], установленную возможность описания импульсной характеристики $h(t_0,t)$ набором моментных функций [5], описание линейных систем в вероятностной области нельзя считать полным без введения и широкого использования таких характеристик как n-мерная ПРВ $W_n(y_0,y_1,...,y_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$ мгновенных значений процесса $y(t_0,t)$, его характеристическая функция $\theta_n(v_0,v_1,...,v_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$, функция распределения

$$F_n(r_0,r_1,...,r_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1}) = \int_{-\infty}^{r_0}...\int_{-\infty}^{r_{n-1}}W_n(y_0,y_1,...,y_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})dy_0...dy_{n-1}.$$

либо других вероятностных характеристик линейных систем. Последнее обстоятельство тем более важно, что в последние десятилетия всё большее значение приобретают цифровые системы передачи информации и соответствующий им вероятностный критерий оценки качества обработки сигналов [4](входящая в выражение для $R_h(t_0,\tau)$ функция $K(j\omega,t_0)$ есть соответствующая комплексная частотная характеристика линейной системы).

Ниже показано,что отсутствие полноты статистического описания линейных систем и прежде всего таких характеристик как n-мерная ПРВ мгновенных значений импульсной характеристики служило препятствием для разработки прямого их (линейных систем) статистического анализа.

В данной работе для характеристики линейной системы в вероятностной области вводится n-мерная ПРВ $q_n(h_0,h_1,...,h_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$ мгновенных значений её импульсной характеристики $h(t_0,t)$ (либо её значащей части, если импульсная характеристика содержит в своём составе дельта-функцию), характеристическая функция, интегральная функция распределения, функционал плотности распределения вероятности $\Phi[h(t_0,t)]$ и другие характеристики регулярной функции $h_p(t_0,t)$; анализируется n-мерная ПРВ $W_n(y_0,y_1,...,y_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$ случайного процесса $y(t_0,t)$, устанавливается связь функции $W_n(y_0,y_1,...,y_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$ с импульсной характеристикой $h(t_0,t)$; для частного, но весьма важного для практики, случая нормального процесса $z(t)$ и детерминированной импульсной характеристики $h_p(t_0,t)$ линейной системы найдена n-мерная ПРВ случайного процесса $y(t_0,t)$; в общем случае линейной системы с переменными (детерминированными) параметрами при воздействии на её вход нестационарного негауссовского случайного процесса решается задача отыскания многомерной и одномерной ПРВ случайного процесса на выходе линейной системы; рассматриваются частные случаи воздействия на вход линейной системы нестационарного коррелированного (с произвольной корреляционной матрицей) и некоррелированного гауссовского случайного процесса.

<u>Плотность распределения вероятности импульсной характеристики $h(t_0,t)$ линейной системы.</u> Из выражения (1) следует, что для отыскания $W_n(y_0,y_1,...,y_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$ процесса $y(t_0,t)$ необходимо наряду с $p_n(z_0,z_1,...,z_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$ процесса $z(t)$ задать n-мерную ПРВ $q_n(h_0,h_1,...,h_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$ импульсной характеристики $h(t_0,t)$, а также совместную ПРВ $\omega_{2n}(z_0,h_0;z_1,h_1;...;z_{n-1},h_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$ процесса $z(t)$ и импульсной характеристики $h(t_0,t)$.

Описание функции $h(t_0,t)$ в вероятностной области с помощью ПРВ $q_n(h_0,h_1,...,h_{n-1};t_0,t_1,...,t_{n-1})$ естественно. В самом деле, наиболее общим типом линейных систем является линейная система со случайно изменяющимися параметрами. Импульсная характеристика такой системы, как известно [3,4], случайна и, как и у всех линейных систем, нестационарна, что влечёт за собой зависимость плотности распределения вероятности её мгновенных значений от моментов наблюдений $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$, точнее от разностей $t_1-t_0, t_2-t_0, \dots, t_{n-1}-t_0$. Из нестационарности $h(t_0,t)$ следует нестационарность процесса $y(t_0,t)$ для $t \geq t_{0+}$ и их неэргодичность, даже если процесс $z(t)$ стационарен.

Отыскание плотности распределения вероятности $q_n(h_0, h_1, \dots, h_{n-1}; t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ для этого общего случая представляет самостоятельную, актуальную и довольно сложную задачу (особенно для линейных систем порядка $n \geq 2$, а также для многомерных линейных систем). Если же ПРВ $q_n(h_0, h_1, \dots, h_{n-1}; t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ найдена, нетрудно, в случае необходимости, перейти к описанию линейной системы с помощью набора моментных или кумулянтных функций. Отметим, что для задач анализа наиболее продуктивным является представление искомой ПРВ в форме [4]

$$q_n(h_0, h_1, \dots, h_{n-1}; t_0, t_1, \dots t_{n-1}) = \\ = q_1(h_0; t_0) q_2(h_1; t_1 | h_0; t_0) \times \\ \times q_n(h_{n-1}; t_{n-1} | h_0, t_0; \dots; h_{n-2}, t_{n-2}) .$$

Это будет показано в дальнейшем.

Подавляющее большинство используемых на практике линейных систем составляют системы, параметры которых являются постоянными, либо детерминированными функциями времени. Множество таких линейных систем можно разделить на два подкласса: 1) линейные системы, импульсные характеристики которых не содержат в своём составе дельта-функцию; одним из примеров таких систем является RC - интегратор, импульсная характеристика которого

$$h_p(t_0, t) = \frac{1}{RC} \exp\left(- \frac{(t-t_0)}{RC}\right) ;$$

2) линейные системы, импульсные характеристики которых содержат в своём составе дельта-функцию; одним из примеров таких систем является дифференцирующая RC - цепь, импульсная характеристика которой

$$g_p(t_0, t) = \delta(t-t_0) - h_p(t_0, t) = \delta(t-t_0) - \\ - \frac{1}{RC} \exp\left(- \frac{(t-t_0)}{RC}\right) .$$

Здесь и ниже $h_p(t_0,t)$ есть импульсная характеристика, не содержащая в своём составе дельта-функцию, или значащая часть импульсной характеристики, содержащей дельта-функцию. Соответствующие этим подклассам линейных систем импульсные характеристики либо их значащие части $h_p(t_0,t)$ есть детерминированные (регулярные) функции времени (на это свойство указывает индекс "p"). Плотности распределения вероятности таких функций представимы в виде произведения дельта-функций [4,10]. Следовательно, n-мерная и одномерная ПРВ мгновенных значений $h_p(t_0,t)$ соответственно имеют вид:

$$q_n(h_0,h_1,\dots,h_{n-1};t_0,t_1,\dots,t_{n-1})= \\ =\prod_{k=0}^{n-1}\delta\left[h_k-h_p(t_0,t_k)\right], \qquad (2)$$

$$q_1(h_k;t_0,t_k)=\delta\left[h_k-h_p(t_0,t_k)\right], \qquad (3)$$

причём $q_1(h_0;t_0)=\delta[h_0-h_p(t_0,t_0)]$; $h_p(t_0,t_0)=\lim h_p(t_0,t)$ при $t\to t_{0+}$.

Отсюда, для произвольных моментов времени $t_l,t_{l+1},\dots,t_{l+k},\dots,t_{l+n-1}$ $(t_0<t_1<\dots<t_{l+n-1})$ нетрудно записать следующие выражения для начальных моментных функций $m_{h;\nu_0,\nu_1,\dots,\nu_{n-1}}(t_0,t_l,\dots,t_{l+n-1})$ и ковариационной функции $K_h(t_0,t_k,t_k+\tau)$ соответственно (здесь и ниже использована терминология, принятая в [10]):

$$m_{h;\nu}(t_k)=\int_{-\infty}^{+\infty}h_k^{\nu}\delta\left[h_k-h_p(t_0,t_k)\right]dh=h_p^{\nu}(t_0,t_k),$$

$$m_{h;\nu_1,\nu_2}(t_1,t_s)=\iint_{-\infty}^{+\infty}h_1^{\nu_1}\,h_s^{\nu_2}\,\delta\left[h_1-h_p(t_0,t_1)\right]\times \\ \times\delta\left[h_s-h_p(t_0,t_s)\right]dh_1dh_s= \\ =h_p^{\nu_1}(t_0,t_1)h_p^{\nu_2}(t_0,t_s),$$

$$m_{h;\nu_0,\nu_1,\dots,\nu_{n-1}}(t_0,t_1,t_{1+1},\dots,t_{1+n-1})= \\ =\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}h_1^{\nu_0}\,h_{1+1}^{\nu_1}\cdots h_{1+n-1}^{\nu_{n-1}}\times \\ \times\prod_{k=0}^{n-1}\delta\left[h_{1+k}-h_p(t_0,t_{1+k})\right]dh_1dh_{1+1}\times\cdots\times$$

$$\times dh_{1+n-1}=h_p^{\nu_0}(t_o,t_1)h_p^{\nu_1}(t_o,t_{1+1})\times \times\cdots h_p^{\nu_{n-1}}(t_o,t_{1+n-1}),$$

$$K_h(t_o,t_k,t_k+\tau)=\int\int_{-\infty}^{+\infty}h(t_o,t_k)h(t_o,t_k+\tau)\times$$

$$\times\delta\left[h(t_o,t_k)-h_p(t_o,t_k)\right]\times$$

$$\times\delta\left[h(t_o,t_k+\tau)-h_p(t_o,t_k+\tau)\right]dh_k dh_{k\tau}=$$

$$=h_p(t_o,t_k)\,h_p(t_o,t_k+\tau)\quad.$$

Опуская в $K_h(t_o,t_k,t_k+\tau)$ индекс k и интегрируя от 0 до ∞, получаем функцию корреляции первого рода линейной системы [5,8]

$$\Psi_h(t_o,\tau)=\int_0^\infty K_h(t_o,t,t+\tau)dt=$$

$$=\int_0^\infty h_p(t_o,t)h_p(t_o,t+\tau)dt\quad.$$

Отметим также, что центральные моменты всех порядков, а следовательно, и корреляционная функция импульсной характеристики $h_p(t_o,t)$ равны нулю.

Плотностям распределения вероятности (2) и (3) соответствуют одномерная и многомерная характеристические функции

$$\Theta_1(\nu_k;t_o,t_k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left[h-h_p(t_o,t_k)\right]\times$$

$$\times\exp(-j\nu_k h)dh=\exp[-j\nu_k h_p(t_o,t_k)]\;,$$

$$\Theta_n(\nu_o,\nu_1,\ldots,\nu_{n-1};t_o,t_1,\ldots,t_{n-1})=$$

$$=\exp\left[-j\sum_{k=0}^{n-1}\nu_k h_p(t_o,t_k)\right]\;,$$

а также интегральные функции распределения

$$F_1(t_o;h_k,t_k)=\int_{-\infty}^{h_k}\delta\left[h_k-h_p(t_o,t_k)\right]dh_k=\frac{1}{2},\;(4)$$

$$F_n(h_0,h_1,\ldots,h_{n-1};t_0,t_1,\ldots,t_{n-1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n . \qquad (5)$$

В выражениях (4) и (5) использовано условие [3]

$$\int_{-\infty}^{a} \delta(x-a)\,dx = \frac{1}{2} .$$

<u>Функционал плотности распределения вероятности импульсной характеристики $h(t_0,t)$ линейной системы.</u> Для рассматриваемого класса линейных систем импульсная характеристика $h(t_0,t)$ есть, как отмечалось выше, регулярная функция $h_p(t_0,t)$, по отношению к которой применимо понятие функционала плотности распределения вероятности $\Phi[h(t_0,t)]$ [11]. Для любого интервала $(t-t_0)$ при $n\to\infty(t-t_0\to 0)$ справедливо равенство

$$\Phi[h(t_0,t)] = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \delta\left[h_k - h_p(t_0,t_k)\right] =$$

$$= \lim_{\substack{n\to\infty\\ \alpha\to 0}} \left(\frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}}\right)^{n-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\alpha^2\Delta}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{k=0}^{n-1}\left[h_k - h_p(t_0,t_k)\right]^2\Delta\right\} = \qquad (6)$$

$$= h_* \lim_{\varepsilon^2\to\infty} \exp\left\{-\varepsilon^2\int_{t_0}^{t}[h(t_0,\tau)-h_p(t_0,\tau)]^2 d\tau\right\},$$

где $\delta(x) = \lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\alpha^2}\right)$ — одно из возможных представлений дельта-функции; h_*, ε^2 — неизвестные бесконечно большие сомножители, $\Delta = t_k - t_{k-1}$.

Из (6) следует, что величина функционала плотности распределения вероятности линейной системы зависит от того, какая именно реализация её импульсной характеристики имеет место на интервале $\Delta t = t - t_0$.

<u>Плотность распределения вероятности случайного процесса $y(t_0,t)$ линейной системы с детерминированными параметрами .</u> Пусть для фик-

сированного момента времени t_1 известны плотности распределения вероятности $p_1(z_1,t_1)$ и $q_1(h_1; t_0,t_1)$, а также совместная плотность распределения вероятности $\omega_2(z_1,h_1;t_0,t_1)$ процесса $z(t)$ и импульсной характеристики $h(t_0,t)$. Тогда для одномерной плотности распределения вероятности процесса $y(t_0,t)$ можно записать

$$W_1(y_1;t_0,t_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_2(z_1,y_1-z_1;t_0,t_1)dz_1. \quad (7)$$

Для регулярной импульсной характеристики $h_p(t_0,t)$ подставим (3) в (7), получим

$$W_1(y_1;t_0,t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(z_1,t_1)\times$$

$$\times\delta\left[(y_1-z_1)-h_p(t_0,t)\right]dz_1. \quad (8)$$

Учтя в (8) свойство чётности δ-функции, а затем её фильтрующее свойство, получим

$$W_1(y_1;t_0,t_1)=p_1[y_1(t_0,t_1)-h_p(t_0,t_1)]. \quad (9)$$

Аналогично для многомерного случая будем иметь

$$W_n(y_0,y_1,\dots,y_{n-1};t_0,t_1,\dots,t_{n-1})=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_n(z_0,y_0-z_0;z_1,y_1-z_1;$$

$$\dots;z_{n-1},y_{n-1}-z_{n-1};t_0,t_1,\dots,t_{n-1})\times$$

$$\times dz_0dz_1\dots dz_{n-1}. \quad (10)$$

Для регулярной импульсной характеристики $h_p(t_0,t)$ подынтегральная функция в [10] равна произведению многомерных ПРВ $p_n(z_0,z_1,\dots,z_{n-1};t_0,t_1,\dots,t_{n-1})$ и

$$q_n(y_0-z_0,\dots,y_{n-1}-z_{n-1};t_0,\dots,t_{n-1})=$$

$$=\prod_{k=0}^{n-1}\delta[(y_k-z_k)-h_p(t_0,t_k)] .$$

Воспользовавшись снова указанными свойствами дельта-функции, из [10] окончательно получим

$$W_n(y_0,y_1,\dots,y_{n-1};t_0,t_1,\dots,t_{n-1}) =$$

$$= p_n[y_0-h_p(t_0,t_{0+});\dots;$$

$$y_{n-1}-h_p(t_0,t_{n-1});t_0,t_1,\dots,t_{n-1}]. \quad (11)$$

Нормальная плотность распределения вероятности случайного процесса $y(t_0,t)$ линейной системы. Исследованиями установлено [6], что большая часть главнейших явлений, порождающих процесс $z(t)$, достаточно хорошо аппроксимируется нормальным (гауссовским) случайным процессом. Его одномерная ПРВ запишется в форме

$$p_1(z_k,t_k)=[\sigma_z(t_k)\sqrt{2\pi}]^{-1}\times$$
$$\times\exp\{-[2\sigma_z^2(t_k)]^{-1}[z_k-m_z(t_k)]^2\},$$

где $\sigma_z(t_k)$-среднеквадратическое отклонение мгновенных значений процесса $z(t)$ от его математического ожидания $m_z(t_k)$ в момент времени t_k.

При этом при детерминированной импульсной характеристике $h_p(t_0,t)$ линейной системы одномерная плотность распределения вероятности её случайного процесса $y(t_0,t)$ с учётом (8) имеет вид

$$W_1(y_k;t_0,t_k)=$$
$$=\begin{cases}[\sigma_z(t_k)\sqrt{2\pi}]^{-1}\exp\{-[2\sigma_z^2(t_k)]^{-1}\\ \quad [y_k-h_p(t_0,t_k)-m_z(t_k)]^2\} & \text{при } t_k\geqslant t_{0+},\\ [\sigma_z(t_k)\sqrt{2\pi}]^{-1}\exp\{-[2\sigma_z^2(t_k)]^{-1}\\ \quad [y_k-m_z(t_k)]^2\} & \text{при } t_k\leqslant t_{0-}.\end{cases} \qquad (12)$$

Обобщение выражения (12) на многомерный случай несложно:

при $t_k\geqslant t_{0+}, t_l\geqslant t_{0+}$

$$W_n(y_0,\ldots,y_{n-1};t_0,\ldots,t_{n-1})=$$
$$=[\sigma_z(t_0)\cdots\sigma_z(t_{n-1})\sqrt{(2\pi)^n D}]^{-1}\times$$
$$\times\exp\{-[2D]^{-1}\sum_{k,l=0}^{n-1}D_{k,l}[\sigma_z(t_k)\sigma_z(t_l)]^{-1}\times$$
$$\times[y_k-h_p(t_0,t_k)-m_z(t_k)]\times$$
$$\times[y_l-h_p(t_0,t_l)-m_z(t_l)]\}, \qquad (13)$$

при $t_k\leqslant t_{0-}, t_l\leqslant t_{0-}$

$$W_n(y_0,\ldots,y_{n-1};t_0,\ldots,t_{n-1})=$$
$$[\sigma_z(t_0)\cdots\sigma_z(t_{n-1})\sqrt{(2\pi)^n D}]^{-1}\times$$
$$\times\exp\{-[2D]^{-1}\sum_{k,l=0}^{n-1}D_{k,l}[\sigma_z(t_k)\sigma_z(t_l)]^{-1}\times$$
$$\times[y_k-m_z(t_k)][y_l-m_z(t_l)]\}.$$

Здесь D-определитель n-го порядка, составленный из коэффициентов корреляции $R_{\mu\nu}=R(t_\mu,t_\nu)=[\sigma_z(t_\mu)\sigma_z(t_\nu)]^{-1}\langle[y_\mu-h_p(t_0,t_\mu)-m_z(t_\mu)][y_\nu-h_p(t_0,t_\nu)-$

$-m_z(t_\nu)]>$; $D_{\mu,\nu}$ - алгебраическое дополнение элемента $R_{\mu,\nu}$ определителя D.

Из выражений (9),(11),(12) и (13) следует, что импульсная характеристика $h(t_0,t)$ линейной системы может быть интерпретирована как затухающее во времени приращение математического ожидания $m_z(t)$ процесса $z(t)$, вызванное входным дельта-импульсом.

Величина $z_0(t)$ есть центрированный шум линейной системы, который часто, будучи приведённым по установившейся традиции к её сигнальному входу, суммируется со входной совокупностью полезного сигнала и помех (см., например, [12,13]).

Величина $m_z(t)$ может быть положена в основу деления класса линейных систем на категории нарастающей сложности:

1) линейные пассивные системы с постоянными параметрами: $a(t)=const$, $m_z(t)=0$, $m_y(t)=h(t)$;

2) линейные активные системы с постоянными параметрами: $a(t)=const$, $m_z(t)=m_0$, $m_y(t)=m_0+h(t)$;

3) линейные системы с переменными параметрами: $a(t)\neq const$, $m_z(t)\neq const$, $m_y(t)=m_z(t)+h(t_0,t)$.

Таким образом, линейная система в вероятностной области в общем случае может быть описана:

1) либо n-мерной плотностью распределения вероятности её случайного процесса $y(t_0,t)$,

2) либо (при пренебрежимо малом уровне собственного шума $z(t)$ линейной системы, т.е. при $\sigma_z^2 \approx 0$) n-мерной плотностью распределения вероятности её импульсной характеристики $h(t_0,t)$,

3) либо n-мерной плотностью распределения вероятности значащей части импульсной характеристики, если она содержит в своём составе дельта-функцию.

Ниже мы покажем эффективность использования введённого выше описания линейной системы в вероятностной области с помощью многомерной плотности распределения вероятности мгновенных значений её импульсной характеристики сначала в общем случае одномерных линейных систем с детерминированными параметрами, а затем на двух сравнительно простых примерах.

Метод прямого статистического анализа линейных систем в переходном режиме.

I. Пусть на вход одномерной линейной системы с детерминированными параметрами и импульсной характеристикой $h(t_0,t)$ при нулевых начальных условиях в момент времени t_0 действует случайный процесс

$\xi(t)$, для которого известна многомерная размерности $(n+1)$ плотность распределения вероятности $\omega_{n+1}(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n;t_0,t_1,\ldots,t_n)$.
Найдём плотность распределения вероятности $W_l(x_1,\ldots,x_l;t_1,\ldots,t_l)$, где $l\leq n$, случайного процесса $x(t_0,t)$ на выходе линейной системы.

Для определённости полагаем, что: 1) собственный шум $z(t)$ линейной системы пренебрежимо мал ($\sigma_z^2\to 0$); 2) импульсная характеристика линейной системы не содержит дельта-функцию; 3) собственное движение в линейной системе отсутствует; 4) многомерная размерности $(n+1)$ плотность распределения вероятности $q_{n+1}(h_0,h_1,\ldots,h_n;t_0,t_1,\ldots,t_n)$ импульсной характеристики $h(t_0,t)$ задана на интервале $\Delta t_{эф.м}$, где $\Delta t_{эф.м}$ – максимальная эффективная длительность импульсной характеристики линейной системы, т.е. максимальный интервал времени, по истечении которого значениями $h(t_0,t)$ можно пренебречь; 5) случайные величины $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n$ принимают действительные значения в интервале $(-\infty;+\infty)$; 6) параметры линейной системы не зависят от процесса $\xi(t)$.

Известно несколько методов решения сформулированной выше задачи [см.,например,4,5,10,14-18], которые в общем случае позволяют получить для случайного процесса на выходе линейной системы плотность распределения вероятности, размерность которой не более двух.

Использование же введённой выше многомерной плотности распределения вероятности мгновенных значений импульсной характеристики линейной системы позволяет, как будет показано ниже, получить для случайного процесса на выходе линейной системы как одномерную, так и многомерную плотность распределения вероятности произвольной размерности n.

Случайный процесс в момент времени t на выходе линейной системы при принятых выше условиях определяется интегралом Дюамеля:

$$x(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}\xi(\tau)h(t_0,t-\tau)d\tau\ . \quad (14)$$

Заменим (14) интегральной суммой

$$x(t_0,t)\approx x^*(t_0,t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\xi(\tau_k)h(t_0,t-\tau_k)\Delta\tau_k=\sum_{k=1}^{n}x_k\ . (15)$$

где $x^*(t_0,t)$ - оценка интеграла (15) сверху,

$$\Delta\tau_k=t_k-t_{k-1}, x_k=\xi(\tau_k)h(t_0,t-\tau_k)\Delta\tau_k .$$

Известно [4,10], что $x^*(t_0,t)$ сходится в среднеквадратическом к $x(t_0,t)$ при $n\to\infty$ (при этом $\Delta\tau_k\to 0$).

В соответствии с (2) множество величин

$$\{h(t_0,t-\tau_1),h(t_0,t-\tau_2),\ldots,h(t_0,t-\tau_n)\}= \\ =\{h_1^*,\ldots,h_n^*\} \quad (16)$$

входящих в правую часть (15), имеет совместную ПРВ

$$q_n^*(h_1^*,\ldots,h_n^*;t-\tau_1,\ldots,t-\tau_n)= \\ =\prod_{k=1}^{n}\delta[h_k^*-h(t_0,t-\tau_k)] , \quad (17)$$

где $\tau_1=t_0+\Delta\tau_1,\ldots,\tau_n=t_0+\Delta\tau_1+\cdots+\Delta\tau_n$.

Можно показать, что множество величин

$$\{h(t_0,t-\tau_1)\Delta\tau_1,\ldots,h(t_0,t-\tau_n)\Delta\tau_n\}= \\ =\{{}_*h_1,\ldots,{}_*h_n\} , \quad (18)$$

получаемое из (16) при помощи линейного функционального преобразования, состоящего в умножении каждого элемента множества (16) на постоянный множитель и имеющего однозначные обратные функции, имеет совместную n-мерную ПРВ

$$q_n({}_*h_1,\ldots,{}_*h_n;t-\tau_1,\ldots,t-\tau_n)= \\ =\prod_{k=1}^{n}\delta[{}_*h_k-h(t_0,t-\tau_k)\Delta\tau_k] . \quad (19)$$

При принятом условии независимости параметров линейной системы от входного случайного процесса совместная ПРВ множества величин $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n,{}_*h_1,\ldots,{}_*h_n$ имеет вид:

$$W_{2n+1}(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n,{}_*h_1,\ldots,{}_*h_n; \\ t_0,t_1,\ldots,t_n)=\omega_{n+1}(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n; \\ t_0,t_1,\ldots,t_n)\prod_{k=1}^{n}\delta[{}_*h_k-h(t_0,t-\tau_k)\Delta\tau_k] . \quad (20)$$

Выполним следующее функциональное преобразование величин, входящих в (20):

$$\xi_0 = \xi_0 , \\ \xi_1 = \xi_1 , \\ \text{- - - - - - - -} \\ \xi_n = \xi_n , \quad (21)$$

$$X_1 = \xi_1 \cdot {}_*h_1,$$
$$- - - - - - -$$
$$X_n = \xi_n \cdot {}_*h_n \quad .$$

Обратные функции однозначны :

$$\xi_0 = \xi_0 \quad ;$$
$$\xi_1 = \xi_1 \quad ;$$
$$- - - - - - - -$$
$$\xi_n = \xi_n \quad ; \qquad (22)$$
$${}_*h_1 = X_1/\xi_1 \quad ;$$
$$- - - - - - - -$$
$${}_*h_n = X_n/\xi_n \quad .$$

Якобиан преобразования имеет вид:

$$D_{2n+1} = \frac{(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, {}_*h_1, \ldots, {}_*h_n)}{(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, X_1, \ldots, X_n)} =$$
$$= \left[\prod_{k=1}^{n} \xi_k\right]^{-1} . \qquad (23)$$

С учётом (20) - (23) совместная ПРВ множества случайных величин $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, X_1, \ldots, X_n$ имеет вид :

$$W_{2n+1}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, X_1, \ldots, X_n;$$
$$t_0, t_1, \ldots, t_n) = \omega_{n+1}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n;$$
$$t_0, t_1, \ldots, t_n) \prod_{k=1}^{n} \delta\left[\frac{X_k}{\xi_k} - h(t_0, t - \tau_k)\Delta\tau_k\right] \times$$
$$\times \left| \left[\prod_{k=1}^{n} \xi_k\right]^{-1} \right| = \omega_{n+1}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n;$$
$$t_0, t_1, \ldots, t_n) \prod_{k=1}^{n} \delta(X_k - \xi_k \cdot {}_*h_k) . \quad (24)$$

Интегрируя (24) по переменным $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$, получим :

$$W_n(X_1, \ldots, X_n; t_1, \ldots, t_n) =$$
$$= \omega_n\left(\frac{X_1}{{}_*h_1}, \ldots, \frac{X_n}{{}_*h_n}; t_1, \ldots, t_n\right) \times$$
$$\times \left| \left[\prod_{k=1}^{n} {}_*h_k\right]^{-1} \right| . \qquad (25)$$

Выражение (25) позволяет найти согласно (15) искомую одномерную ПРВ случайного процесса на выходе линейной системы :

$$W_1(x;t)\approx W_1(x^*;t)_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}W_n(x_1,\ldots,x_{n-1},\; x^*-x_1-\ldots-x_{n-1};t_1,\ldots,t_n)dx_1\ldots dx_{n-1}. \tag{26}$$

Или

$$W_1(x;t)=\lim_{n\to\infty}W_1(x^*;t)_n=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}W_n(x_1,\ldots,x_{n-1},x^*-x_1-\ldots-x_{n-1};t_1,\ldots,t_n)\times \times dx_1\ldots dx_{n-1}. \tag{27}$$

Анализ (16) и (25) показывает, что (25) является прообразом n-мерной плотности распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы.

Действительно, выполним следующее линейное функциональное преобразование случайных величин $x_1,\ldots,x_n$, входящих в (25):

$$\begin{aligned}\hat{x}_1&=x_1,\\ \hat{x}_2&=x_1+x_2=\hat{x}_1+x_2,\\ &\text{- - - - - - - - - - - - - -}\\ \hat{x}_n&=x_1+x_2+\cdots+x_n=\hat{x}_{n-1}+x_n.\end{aligned} \tag{28}$$

Обратные функции однозначны :

$$\begin{aligned}x_1&=\hat{x}_1,\\ x_2&=\hat{x}_2-\hat{x}_1,\\ &\text{- - - - - - - - - - - - - -}\\ x_n&=\hat{x}_n-\hat{x}_{n-1},\end{aligned} \tag{29}$$

а якобиан преобразования от переменных $x_1,\ldots,x_n$ к переменным $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n$ равен единице.

Тогда из (25) с учётом (28) и (29) имеем

$$W_n(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n;t_1,\ldots,t_n)= =\omega_n\left(\frac{\hat{x}_1}{{}_*h_1},\frac{\hat{x}_2-\hat{x}_1}{{}_*h_2},\ldots,\frac{\hat{x}_n-\hat{x}_{n-1}}{{}_*h_n};t_1,\ldots,t_n\right)\times \times\left|\left(\prod_{k=1}^{n}{}_*h_k\right)^{-1}\right|. \tag{30}$$

Выражение (30) представляет собой искомую многомерную произвольной размерности n плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы в переходном режиме.

Согласно (15) и (28) $x^*(t_0,t)=\hat{x}_n$. Тогда интегрируя (30) по всем переменным, исключая $\hat{x}_n$, получим искомую одномерную ПРВ случайного процесса на выходе линейной системы в момент времени t:

$$W_1(x;t)\approx W_1(\hat{x}_n;t_n)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}W_n(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n;t_1,\dots,t_n)d\hat{x}_1\dots d\hat{x}_{n-1}. \qquad (31)$$

Или

$$W_1(x;t)=\lim_{n\to\infty}W_1(\hat{x}_n;t_n)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}W_n(\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_n;t_1,\dots,t_n)\times$$

$$\times d\hat{x}_1\dots d\hat{x}_{n-1}=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_n\left(\frac{\hat{x}_1}{{}_*h_1},\frac{\hat{x}_2-\hat{x}_1}{{}_*h_2},\dots,\frac{\hat{x}_n-\hat{x}_{n-1}}{{}_*h_n};t_1,t_2,\dots,t_n\right)\left|\left(\prod_{k=1}^{n}{}_*h_k\right)^{-1}\right|\times$$

$$\times d\hat{x}_1\dots d\hat{x}_{n-1}. \qquad (32)$$

Выражения (26) и (27), а также (31) и (32) определяют одну и ту же одномерную ПРВ случайного процесса на выходе линейной системы.

2. Пусть $\xi(t)$ представляет собой нестационарный коррелированный гауссовский случайный процесс, многомерную ПРВ которого запишем в форме [10]:

$$\omega_{n+1}(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n;t_0,t_1,\dots,t_n)=$$

$$=\frac{1}{\sigma_{*0}\sigma_{*1}\cdots\sigma_{*n}\sqrt{(2\pi)^{n+1}D_*}}\times \qquad (33)$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2D_*}\sum_{\mu,\nu=0}^{n}D_{*\mu,\nu}\frac{(m_{*\mu}-\xi_\mu)(m_{*\nu}-\xi_\nu)}{\sigma_{*\mu}\,\sigma_{*\nu}}\right],$$

где $m_{*i}=m(t_i)=\langle\xi(t_i)\rangle$-математическое ожидание $\xi(t)$ в момент времени t_i; $\sigma^2_{*i}=\langle[\xi(t_i)-m_*(t_i)]^2\rangle$-дисперсия случайной величины $\xi(t_i)$; D_*- определитель порядка $(n+1)$, составленный из элементов

$R_{\mu,\nu}=R(t_\mu,t_\nu)=\langle(m_{*\mu}-\xi_\mu)(m_{*\nu}-\xi_\nu)\rangle/\sigma_{*\mu}\sigma_{*\nu}$;

$$D_*=\begin{vmatrix} 1 & R_{01} & \ldots & R_{0n} \\ R_{10} & 1 & \ldots & R_{1n} \\ - & - & - & - \\ R_{n0} & R_{n1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} ;\ R_{\mu,\nu}=R_{\nu,\mu};\ R_{\mu\mu}=1 ;$$

$D_{\mu\nu}$-алгебраическое дополнение элемента $R_{\mu\nu}$ определителя D_{n+1}.

В данном случае выражения, аналогичные (25) и (30), запишутся в виде :

$$W_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=\frac{1}{\sigma_{*1}\cdots\sigma_{*n}\sqrt{(2\pi)^n D}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2D}\sum_{\mu\nu=1}^{n}D_{\mu\nu}\frac{\left(m_{*\mu}-\frac{x_\mu}{{}_*h_\mu}\right)\left(m_{*\nu}-\frac{x_\nu}{{}_*h_\nu}\right)}{\sigma_{*\mu}\sigma_{*\nu}}\right]\times$$

$$\times\left|\left(\prod_{k=1}^{n}{}_*h_k\right)^{-1}\right| , \qquad (34)$$

$$W_n(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n;t_1,\ldots,t_n)=\frac{1}{\sigma_{*1}\cdots\sigma_{*n}\sqrt{(2\pi)^n D}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2D}\sum_{\mu\nu=1}^{n}D_{\mu\nu}\frac{\left(m_{*\mu}-\frac{(\hat{x}_\mu-\hat{x}_{\mu-1})}{{}_*h_\mu}\right)}{\sigma_{*\mu}}\times\right.$$

$$\times\frac{\left(m_{*\nu}-\frac{(\hat{X}_\nu-\hat{X}_{\nu-1})}{*h_\nu}\right)^2}{\sigma_{*\nu}}\Bigg]\times\left|\left(\prod_{k=1}^{n}*h_k\right)^{-1}\right|, \quad (35)$$

где $\hat{x}_0=0$,

$$D=D_n=\begin{vmatrix} 1 & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & 1 & \cdots & R_{2n} \\ - & - & - & - \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

$D_{\mu\nu}$ -алгебраическое дополнение элемента $R_{\mu\nu}$ определителя D. Введём обозначения:

$$m_\mu=m_{*\mu}\cdot *h_\mu; \qquad m_\nu=m_{*\nu}\cdot *h_\nu \;;$$
$$\sigma_\mu=\sigma_{*\mu}\cdot *h_\mu; \qquad \sigma_\nu=\sigma_{*\nu}\cdot *h_\nu \;. \quad (36)$$

С учётом (36) выражения (34) и (35) принимают вид :

$$W_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=$$
$$=\frac{1}{\sigma_1\cdots\sigma_n\sqrt{(2\pi)^n D}}\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2D}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}D_{\mu\nu}\frac{(m_\mu-x_\mu)(m_\nu-x_\nu)}{\sigma_\mu\,\sigma_\nu}\right], \quad (37)$$

$$W_n(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n;t_1,\ldots,t_n)=$$
$$=\frac{1}{\sigma_1\cdots\sigma_n\sqrt{(2\pi)^n D}}\exp\left[-\frac{1}{2D}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}D_{\mu\nu}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{[m_\mu-(\hat{x}_\mu-\hat{x}_{\mu-1})]\,[m_\nu-(\hat{x}_\nu-\hat{x}_{\nu-1})]}{\sigma_\mu\sigma_\nu}\right], \quad (38)$$

где $\hat{x}_0=0$. Выражение (38) представляет собой n-мерную плотность распределения вероятности случайного процесса $x(t_0,t)$ на выходе линейной системы в переходном режиме .

Одномерная ПРВ случайного процесса $x(t_0,t)$ на выходе линейной системы может быть получена как из выражения (37), так и из выражения (38).

Воспользовавшись выражением (38) (в данном случае результирующее выражение получается более наглядным), с учётом (15),(26) и (28) получим выражение для одномерной ПРВ оценки $x^*=\hat{x}_n$ случайного процесса $x(t_0,t)$:

$$W_1(\hat{x}_n;t_0,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma_1\cdots\sigma_n\sqrt{(2\pi)^n D}}\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{1}{2D}\sum_{\mu,\nu=1}^{n-1}D_{\mu\nu}\frac{[m_\mu-(\hat{x}_\mu-\hat{x}_{\mu-1})]}{\sigma_\mu}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{[m_\nu-(\hat{x}_\nu-\hat{x}_{\nu-1})]}{\sigma_\nu}\right]d\hat{x}_1\ldots d\hat{x}_{n-1}. \quad (39)$$

Выполнив в (39) интегрирование по переменным $\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_{n-1}$, окончательно получим:

$$W_1(\hat{x}_n;t_0,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi D_{*n}|D|^{-(n-2)}}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{[(m_1+\ldots+m_n)-\hat{x}_n]^2}{2D_{*n}|D|^{-(n-2)}}\right\}, \quad (40)$$

где $D_{*n}/|D|^{n-2}$ -дисперсия случайного процесса на выходе линейной системы в момент времени t, $|D|^{-(n-2)}$ -определитель исходной корреляционной матрицы D в степени $[-(n-2)]$; n-порядок корреляционной матрицы D заданного случайного процесса $\xi(t)$; D_{*n} вычисляется по правилу:

1) составляется взаимная корреляционная матрица исходной матрицы D :

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2n} \\ - & - & - & - \\ D_{n1} & D_{n2} & \cdots & D_{nn} \end{vmatrix}, \quad (41)$$

2) составляется матрица дисперсий:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1\sigma_1 & \sigma_1\sigma_2 & \cdots & \sigma_1\sigma_n \\ \sigma_2\sigma_1 & \sigma_2\sigma_2 & \cdots & \sigma_2\sigma_n \\ - & - & - & - \\ \sigma_n\sigma_1 & \sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n\sigma_n \end{vmatrix}, \quad (42)$$

каждый элемент которой есть произведение среднеквадратических отклонений преобразованных линейной системой двух выборочных значений случайного процесса $\xi(t)$ (см.(36));

3) D_{*n} есть сумма произведений алгебраических дополнений элементов взаимной корреляционной матрицы на соответствующий элемент матрицы дисперсий. Так,например, при n=3

$$D_{*3}=(D_{22}D_{33}-D_{23}^2)\sigma_1^2+(D_{11}D_{33}-D_{13}^2)\sigma_2^2+$$
$$+(D_{11}D_{22}-D_{12}^2)\sigma_3^2-2(D_{12}D_{33}-D_{13}D_{23})\sigma_1\sigma_2+$$
$$+2(D_{12}D_{23}-D_{13}D_{22})\sigma_1\sigma_3-$$
$$-2(D_{11}D_{23}-D_{12}D_{13})\sigma_2\sigma_3 \qquad (43)$$

Заметим, что выражение (40) представляет собой одномерную плотность распределения вероятности оценки $\hat{x}_n=x^*$ случайного процесса $x(t_0,t)$ на выходе линейной системы в момент времени t, оно справедливо для произвольного n и при $n\to\infty$ сходится к искомой (точной) одномерной ПРВ $W_1(x;t,t)$. То есть, увеличивая n, можно получить $W_1(\hat{x}_n;t,t)$, которая по заранее выбранному критерию будет как угодно мало отличаться от истинной (точной) $W_1(x;t,t)$.

Приведённый выше алгоритм вычисления дисперсии случайного процесса на выходе линейной системы (см.(36) - (43)) реализуется сравнительно просто современными средствами вычислительной техники.

3. В том случае, когда (t) представляет собой нестационарный дельта-коррелированный гауссовский случайный процесс выражение (33) принимает вид:

$$\omega_{n+1}(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n;t_0,t_1,\ldots,t_n)=$$
$$=\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(m_k-\xi_k)^2}{2\sigma_k^2}\right]. \qquad (44)$$

Согласно (25) и (30) в рассматриваемом случае соответствующие многомерные ПРВ запишутся в форме:

$$W_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=$$
$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_k\cdot *h_k\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(m_k\cdot *h_k-x_k)^2}{2\sigma_k^2\cdot *h_k^2}\right], \qquad (45)$$

$$W_n(\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_n;t_1,\ldots,t_n)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_k\cdot *h_k\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{[m_k\cdot{}_*h_k-(\hat{x}_k-\hat{x}_{k-1})]^2}{2\sigma_k^2\cdot{}_*h_k^2}\right], \qquad (46)$$

где $\hat{x}_0=0$. Найдём одномерную ПРВ случайного процесса на выходе линейной системы, исходя из (26) и (45) (здесь мы воспользуемся второй из указанных ранее возможностей отыскания одномерной ПРВ на выходе линейной системы):

$$W_1(x;t)\approx W_1(x^*;t_n)_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma_1\cdot{}_*h_1\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{(m_1\cdot{}_*h_1-x_1)^2}{2\sigma_1^2\cdot{}_*h_1^2}\right]\times\cdots\times\frac{1}{\sigma_{n-1}\cdot{}_*h_{n-1}\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{(m_{n-1}\cdot{}_*h_{n-1}-x_{n-1})^2}{2\sigma_{n-1}^2{}_*h_{n-1}^2}\right]\frac{1}{\sigma_n\cdot{}_*h_n\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{[m_n\cdot{}_*h_n-(x^*-x_1-\cdots-x_{n-1})]^2}{2\sigma_n^2{}_*h_n^2}\right]\times$$

$$\times\, dx_1\ldots dx_{n-1}\,. \qquad (47)$$

Вводя обозначение $l_{n-2}=x^*-x_1-\ldots-x_{n-2}$ и интегрируя по x_{n-1}(для рассматриваемого случая методика вычисления свёртки приведена в [4]), получим:

$$W_1(x;t)\approx W_1(x^*;t_n)_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma_1\cdot{}_*h_1\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{(m_1\cdot{}_*h_1-x_1)^2}{2\sigma_1^2\cdot{}_*h_1^2}\right]\times\cdots\times\frac{1}{2\sigma_{n-2}\cdot{}_*h_{n-2}\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{(m_{n-2}\cdot{}_*h_{n-2}-x_{n-2})^2}{2\sigma_{n-2}^2{}_*h_{n-2}^2}\right]\times \qquad (48)$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{n-1}^2\cdot{}_*h_{n-1}^2+\sigma_n^2\cdot{}_*h_n^2)}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{[(m_{n-1}*h_{n-1}+m_n*h_n)-l_{n-2}]^2}{2[\sigma_{n-1}^2\cdot *h_{n-1}^2+\sigma_n^2\cdot *h_n^2]}\right]\times$$

$$\times\, dx_1\ldots dx_{n-2}\ .$$

Делая в (48) обратную замену для l_{n-2}, получим

$$W_1(x;t)\approx W_1(x^*;t_n)_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma_1\cdot *h_1\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{(m_1\cdot *h_1-x_1)^2}{2\sigma_1^2\cdot *h_1^2}\right]\times\ldots\times\frac{1}{\sigma_{n-2}\cdot *h_{n-2}\sqrt{2\pi}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{(m_{n-2}\cdot *h_{n-2}-x_{n-2})^2}{2\sigma_{n-2}^2\cdot *h_{n-2}^2}\right]\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{n-1}^2\cdot *h_{n-1}^2+\sigma_n^2\cdot *h_n^2)}}\times \qquad (49)$$

$$\times\ \exp\left[-\frac{[(m_{n-1}\cdot *h_{n-1}+m_n\cdot *h_n)-}{2[\sigma_{n-1}^2\cdot *h_{n-1}^2+}\right.\rightarrow$$

$$\rightarrow\left.\frac{(x^*-x_1-\ldots-x_{n-2})]^2}{\sigma_n^2\cdot *h_n^2]}\right]dx_1\ldots dx_{n-2}\ .$$

Введём обозначение $l_{n-3}=x^*-x_1-\ldots-x_{n-3}$, снова воспользуемся прежней методикой вычисления свёртки и т.д.

После выполнения интегрирования в (47) по всем переменным $x_1,\ldots,x_{n-1}$ получим:

$$W_1(x;t)\approx W_1(x^*;t_n)_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2\cdot *h_k^2}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot {}_*h_k - x^*\right)^2}{2\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \cdot {}_*h_k^2}\right]. \qquad (50)$$

В пределе при $n\to\infty$ имеем :

$$W_1(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\int_{t_0}^{t}[\sigma^2(\tau)d\tau]h^2(t_0,t-\tau)d\tau}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\left(\int_{t_0}^{t} m(\tau)h(t_0,t-\tau)d\tau-x\right)^2}{2\int_{t_0}^{t}[\sigma^2(\tau)d\tau]h^2(t_0,t-\tau)d\tau}\right]. \qquad (51)$$

В (51) произведена обратная замена переменных согласно (18). Из (51) имеем полученные на основании вероятностного подхода предельные соотношения для математического ожидания случайного процесса на выходе линейной системы

$$m(t_0,t)=\int_{t_0}^{t} m(\tau)h(t_0,t-\tau)d\tau \qquad (52)$$

и его дисперсии

$$\sigma^2(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}\{[\sigma^2(\tau)d\tau]h^2(t_0,t-\tau)\}d\tau=$$

$$=\int_{t_0}^{t} G_0(\tau)h^2(t_0,t-\tau)d\tau \;, \qquad (53)$$

где $G_0(\tau)=\sigma^2(\tau)d\tau$ можно интерпретировать как спектральную плотность мощности случайного процесса (t) на входе линейной системы (см.,например,

[10],стр.109). С учётом (50) выражение (53) может быть записано в другой форме:

$$\sigma^2(t_0,t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2\cdot{}_*h_k^2=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2(h_k^*)^2\Delta\tau_k^2=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}\sigma_k h_k^*\cdot\Delta\tau_k\right)^2-\right.$$

$$\left.-2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j>k}^{n}\sigma_k\sigma_j h_k^* h_j^*\Delta\tau_k\Delta\tau_j\right\}=$$

$$=\left[\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau)h^*(\tau)d\tau\right]^2- \tag{54}$$

$$-2\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau_1)h^*(\tau_1)\left[\int_{t_0}^{t}\sigma(\tau_2)h^*(\tau_2)d\tau_2\right]d\tau_1.$$

Из (51)-(54) следуют соответствующие известные выражения для случая воздействия на вход линейной системы стационарного случайного процесса $\xi(t)$ ("белого шума"):

$$W_1(x,t_0,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0\int_{t_0}^{t}h^2(t_0,t-\tau)d\tau}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{\left(m\int_{t_0}^{t}h(t_0,t-\tau)d\tau-x\right)^2}{2G_0\int_{t_0}^{t}h^2(t_0,t-\tau)d\tau}\right], \tag{55}$$

$$m(t_0,t)=m\int_{t_0}^{t}h(t_0,t-\tau)d\tau, \tag{56}$$

$$\sigma^2(t_0,t)=G_0\int_{t_0}^{t}h^2(t_0,t-\tau)d\tau, \tag{57}$$

где $G_0=\sigma^2 d\tau$-спектральная плотность мощности "белого" шума (t) на входе линейной системы.

Таким образом, в переходном режиме работы линейной системы как математическое ожидание и дисперсия, так и одномерная ПРВ случайного процесса на выходе линейной системы являются функциями моментов времени t_0 и t.

Заключение. Выполненные в работе исследования показывают, что: 1) существующее в настоящее время описание линейных систем в вероятностной области является очень неполным несмотря на то, что выход любой закороченной по сигнальному входу линейной системы в общем случае представляет собой случайный процесс и, следовательно, для описания линейных систем в вероятностной области необходимо использовать те же подходы, законы и характеристики, которые уже разработаны для случайных процессов;

2) отсутствие полноты описания линейных систем в вероятостной области является, на наш взгляд, причиной того, что существующие методы статистического анализа линейных систем при общей постановке задачи дают возможность в лучшем случае найти двумерную плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы, что весьма недостаточно для использования вероятностного критерия оценки качества обработки сигналов и передачи информации;

3) введение в данной работе для описания линейных систем в вероятностной области одномерной и многомерной плотности распределения вероятности мгновенных значений её импульсной характеристики и других вероятностных характеристик дало возможность автору разработать метод прямого статистического анализа линейных систем;

4) предложенный метод прямого статистического анализа линейных систем даёт возможность в общем случае воздействия на вход одномерной линейной системы с переменными (детерминированными) параметрами и заданной импульсной характеристикой произвольного негауссовского случайного процесса с заданной многомерной плотностью распределения вероятности определить многомерную той же и любой меньшей размерности плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы;

5) полученные в работе обобщённые выражения для многомерной и одномерной плотности распределения вероятности случайного процесса

на выходе линейной системы позволяют для двух рассмотренных в качестве примеров частных сравнительно простых случаев воздействия на вход линейной системы нестационарных гауссовских случайных процессов (коррелированного с произвольной корреляционной матрицей и дельта-коррелированного) вывести некоторые ранее неизвестные соотношения для дисперсии случайного процесса на выходе линейной системы;

6) метод прямого статистического анализа линейных систем не накладывает никаких ограничений на виды случайных процессов, воздействующих на их входы;

7) обобщение метода прямого статистического анализа на линейные системы более высокой размерности и линейные системы со случайными (флуктуирующими) параметрами весьма актуально и, на наш взгляд, не встречает принципиальных трудностей.

Литература

1. Ван дер Зил А. Флуктуации в радиотехнике и физике. М.:Госэнергоиздат,1958.
2. Жовинский А.Н.,Жовинский В.Н. Инженерный экспресс-анализ случайных процессов.М.:Энергия ,1979.С.113.
3. Солодов А.В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами.М.:ФМ,1962.С.324
4. Левин Б.Р. Теоритические основы статистической радиотехники .М.:Сов.радио,т.1,1969.С.751.
5. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. М.:Сов.радио, 1978. С.376.
6. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. М.:Сов.радио,1961.
7. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.:Сов.радио,1971.С.671.
8. Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. М.:Наука,1968.С.660.
9. Акинфиев Н.Н.,Жарова С.С. // Радиотехника.1977.т.32, N3С.35.
10. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника.М.:Сов.радио,1982.С.624.
11. Амиантов И.Н.Избранные вопросы статистической теории связи. М.:Сов.радио,1971. С.416.

12. Амиантов И.Н.,Антонов-Антипов Ю.Н.,Васильев В.П. и др. Радиоприёмные устройства./Под ред.В.И.Сифорова. М.:Сов.радио,1974.С.560.
13. Айнбиндер И.М. Шумы радиоприёмников. М.:Связь,1974. С.328.
14. Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.:Наука,1975. С 239.
15. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.:Наука,1980.С.336.
16. Кузнецов П.И.,Стратонович Р.Л.,Тихонов В.И. // ДАН , 1954,т.94,N4,С.615.
17. Чабдаров Ш.М.,Трофимов А.Т.//Радиотехника и электроника .1975,т.20,N4,С.734.
18. Meyer M.A.,Middleton D. // J.Appl.Phys.,1954,v.25,N8, p.1037.