Нижегородский научно-исследовательский радиофизический институт
Государственного комитета РФ по высшему образованию

Препринт N411

МНОГОМЕРНАЯ И ОДНОМЕРНАЯ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА НА ВЫХОДЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

В.И.Есипенко

Нижний Новгород, 1995

Есипенко В.И.

Многомерная и одномерная плотности распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы со случайными параметрами в переходном режиме // Препринт N411 -Нижний Новгород: НИРФИ ,1995, - 15 с.

УДК 621.372.061.2:519.21

Методом прямого статистического анализа получены многомерная и одномерная плотности распределения вероятности вынужденного движения линейной системы со случайными параметрами в переходном режиме. Рассмотрен подкласс линейных систем, импульсные характеристики которых не содержат дельта-функцию.

Подписано к печати 05.07.95 г. Формат 60 х 84/16
Бумага писчая. Печать офсетная. Объём 0.94 усл.п.л.
Заказ 5439. Тираж 70.

Отпечатано на ротапринте НИРФИ

Введение. Существующие в настоящее время методы статистического анализа линейных систем при воздействии на их входы негауссовских случайных процессов позволяют найти в лучшем случае двумерную плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы [1-8]. Это обстоятельство не позволяет в общем случае эффективно использовать вероятностный критерий оценки качества обработки сигналов и передачи информации и существенно сдерживает широкое использование в системах передачи дискретной информации методов нелинейной обработки сигналов.

В этой связи отыскание многомерной (размерности $n>2$) плотности распределения вероятности (ПРВ) случайного процесса на выходе линейной системы со случайными параметрами при воздействии на её вход негауссовского случайного процесса представляет собой весьма актуальную задачу.

Решение задачи становится возможным, сравнительно простым и наглядным, а плотности распределения вероятности на выходе линейной системы могут быть определены непосредственно (прямо), если определены статистические характеристики самих линейных систем.

В [9,10] для описания линейных систем в вероятностной области предложено использовать ряд вероятностных характеристик: многомерная ПРВ мгновенных значений импульсной характеристики линейной системы, соответствующая характеристическая функция и др. Показано, что многомерная ПРВ импульсной характеристики линейной системы с переменными детерминированными параметрами представляет собой произведение дельта-функций:

$$q_{n+1}(h_0,h_1,\dots,h_n;t_0,t_1,\dots,t_n)= \prod_{k=0}^{n}\delta\left[h_k-h_p(t_0,t_k)\right], \qquad (1)$$

где $h_0,h_1,\dots,h_n$ - выборочные значения импульсной характеристики $h(t_0,t)$ в моменты времени $t_0,t_1,\dots,t_n$; t_0,t - соответственно моменты приложения входного воздействия и текущее время; индекс "р" у импульсной характеристики $h_p(t_0,t)$ указывает на её детерминированность (регулярность).

В [11] получена многомерная плотность распределения вероятности мгновенных значений не содержащей дельта-функцию импульсной характеристики линейной системы первого порядка со случайными параметрами:

$$W_{n+1}(h_0,h_1,\dots,h_n;t_0,t_1,\dots,t_n) = \left|\left(\prod_{k=0}^{n}h_k{}^3\Delta\tau_k\right)^{-1}\right|\cdot\int_0^{+\infty}\cdots\int_0^{+\infty} W_{2(n+1)}{}^*\left[\frac{\eta_0}{h_0},\right.$$

$$\frac{\eta_1}{h_1},\dots,\frac{\eta_n}{h_n},-\frac{\eta_0\ln\eta_0}{h_0\Delta\tau_0},-\frac{\eta_1(\ln\eta_1-\ln\eta_0)}{h_1\Delta\tau_1},$$

$$\left.\dots,-\frac{\eta_n(\ln\eta_n-\ln\eta_{n-1})}{h_n\Delta\tau_n};t_0,t_1,\dots,t_n\right]\times$$

$$\times\left|\prod_{k=0}^{n}\eta_k\right| d\eta_0 d\eta_1\dots d\eta_n , \qquad (2)$$

где $\Delta\tau_k=t_k-t_{k-1}$ - временной интервал между выборочными значениями h_{k+1} и h_k; η_k - переменная интегрирования ; $W_{2(n+1)}{}^*(a_{10},a_{11},\dots,a_{1n},a_{00},a_{01},\dots,a_{0n};t_0,t_1,\dots,t_n)$ - совместная порядка $2(n+1)$ ПРВ значений коэффициентов $a_1(t)$ и $a_0(t)$ линейного дифференциального уравнения

$$a_1(t)\frac{dx(t_0,t)}{dt} + a_0(t)x(t_0,t)=\xi(t),\ (3)$$

описывающего данную линейную систему, $\xi(t)$ и $x(t_0,t)$ - соответственно случайный процесс на входе и отклик линейной системы; $a_1(t)$ и $a_0(t)$ - переменные коэффициенты уравнения (3), медленные по сравнению с $x(t_0,t)$, т.е. $\Delta f_x >> \Delta f_{a_i}$, Δf_x и Δf_{a_i} - ширина энергетических спектров функций $x(t_0,t)$ и $a_i(t)$ соответственно, $i=0;1$.

Задача отыскания многомерной плотности распределения вероятности мгновенных значений импульсных характеристик линейных систем более высокого порядка, а также многомерных линейных систем, по нашему мнению, представляется в настоящее время весьма актуальной.

Ниже мы рассмотрим общий случай, полагая, что задана многомерная размерности (n+1) ПРВ $W_{n+1}(h_0,h_1,...,h_n;t_0,t_1,...,t_n)$ мгновенных значений импульсной характеристики одномерной линейной системы со случайными параметрами первого или более высокого порядка.

Цель работы - отыскание методом прямого статистического анализа n-мерной и одномерной плотности распределения вероятности случайного процесса $x(t_0,t)$ на выходе линейной системы со случайными параметрами при заданных порядка (n+1) многомерной ПРВ $\omega_{n+1}(\xi_0,\xi_1,...,\xi_n;t_0,t_1,...,t_n)$ случайного процесса $\xi(t)$ на входе линейной системы и порядка (n+1) многомерной ПРВ $W_{n+1}(h_0,h_1,...,h_n;t_0,t_1,...,t_n)$ мгновенных значений импульсной характеристики линейной системы.

В работе рассматриваются одномерные устойчивые линейные системы. Под максимальной эффективной длительностью $t_{эф.м}$ импульсной характеристики линейной системы понимается максимальный интервал времени от её начала до момента, когда её значениями можно пренебречь [12].

Для определённости полагаем, что: 1) $\omega_{n+1}(\xi_0,\xi_1,...,\xi_n;t_0,t_1,...,t_n)$ и $W_{n+1}(h_0,h_1,...,h_n;t_0,t_1,...,t_n)$ заданы на интервале $t_{эф.м}$; 2) собственное движение в линейной системе отсутствует (имеет место нулевое начальное условие); 3) случайные величины $\xi_0,\xi_1,...,\xi_n$ и $h_0,h_1,...,h_n$ принимают действительные значения в интервле $(-\infty;+\infty)$.

4) импульсная характеристика $h(t_0,t)$ не содержит дельта-функцию; 5) длительность переходного режима работы линейной системы равна $t_{эр.м}=t_n-t_0$; 6) n - произвольное целое положительное число (выбор величины n определяется условиями задачи: 1) если размерность заданных многомерных ПРВ процесса $\xi(t)$ и импульсной характеристики не ограничена (наиболее распространённый случай), то чем больше выбранное значение n, тем выше будет точность получаемого результата; 2) если n задано, то точность получаемого результата (одномерной ПРВ на выходе линейной системы) определяется этим значением n.

<u>Многомерная плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы в переходном режиме.</u> Отклик линейной системы $x(t_0,t)$ в рассматриваемом случае определяется вынужденным движением $x_в(t_0,t)$:

$$x(t_0,t)=x_в(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}\xi(\tau)h(t_0,t-\tau)d\tau. \quad (4)$$

Заменим интеграл в правой части (4) "верхней" интегральной суммой (см.рис.1)

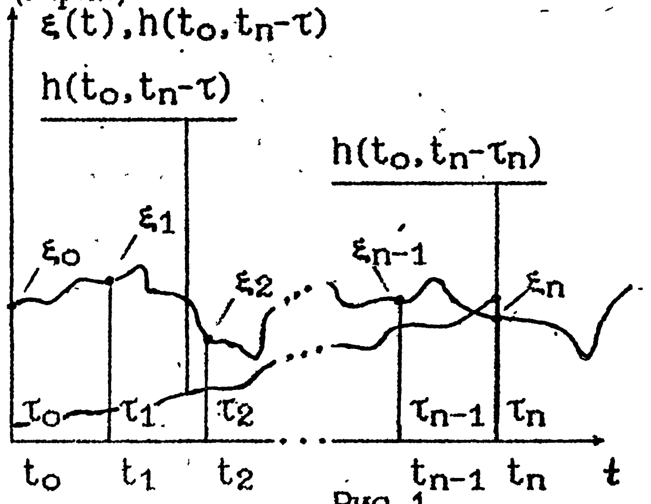

Рис.1

$$x_в(t_o,t)\approx\bar{\hat{x}}_в(t_o,t)=\sum_{k=1}^{n}\xi(\tau_k)h(t_o,t-\tau_k)\times$$

$$\times\Delta\tau_k=\sum_{k=1}^{n}x_k\ , \qquad (5)$$

где $\bar{\hat{x}}_в(t_o,t)$ - оценка интеграла в (4) сверху;

$x_k=\xi_k h(t_o,t-\tau_k)\Delta\tau_k;\xi_k=\xi(\tau_k);\Delta\tau_k=t_{k+1}-t_k$.

С равным основанием можно было бы аппроксимировать интеграл в (4) "нижней" интегральной суммой

$$x_в(t_o,t)\approx\underline{\hat{x}}_в(t_o,t)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\xi(\tau_k)h(t_o,t-\tau_k)\Delta\tau_k. \qquad (6)$$

Известно, что $\bar{\hat{x}}_в(t_o,t)$ и $\underline{\hat{x}}_в(t_o,t)$ сходятся в среднеквадратическом к $x_в(t_o,t)$ при $n\to\infty$(при этом $\Delta\tau_k\to 0$).

Ниже мы будем пользоваться выражением (5).

Входящая в (5) последовательность

$$\{h(t_o,t-\tau_1),h(t_o,t-\tau_2),\ldots,$$
$$h(t_o,t-\tau_n)\}=\{h_1^*,\ldots,h_n^*\}, \qquad (7)$$

где $\tau_1=t_o+\Delta\tau_1, \tau_2=t_o+\Delta\tau_1+\Delta\tau_2,\ldots,\tau_n=t_o+\Delta\tau_1+\ldots+\Delta\tau_n$, есть взятая в обратном порядке последовательность выборочных значений импульсной характеристики $h(t_o,t)$,т.е. $\{h_1^*,\ldots,h_n^*\}=\{h_{n-1},\ldots,h_o\}$ (здесь мы использовали обозначение $h(t_o,t-\tau_k)=h_k^*$).При этом многомерную ПРВ множества $\{h_1^*,\ldots,h_n^*\}$ можно определить,заменив в $W_{n+1}(h_0,h_1,\ldots,h_n;t_o,t_1,\ldots,t_n)$ порядок следования выборочных значений h_k:

$$W_{n+1}^*(h_o^*,h_1^*,\ldots,h_n^*;t_o,t_1,\ldots,t_n)=$$
$$=W_{n+1}(h_n,h_{n-1},\ldots,h_o;t_o,t_1,\ldots,t_n), \qquad (8)$$

и проинтегрировав по h_n:

$$W_n^*(h_1^*,\ldots,h_n^*;t_1,\ldots,t_n)=$$

$$=\int_0^\infty W_{n+1}(h_n,\ldots,h_o;t_o,\ldots,t_n)dh_n. \qquad (9)$$

Найдём n-мерную ПРВ множества величин

$$\{h_1^* \cdot \Delta\tau_1, \ldots, h_n^* \cdot \Delta\tau_n\} = \{{}_*h_1, \ldots, {}_*h_n\}. \quad (10)$$

Множество (10) получается из (5) при помощи линейного функционального преобразования, состоящего в умножении каждого элемента множества (5) на соответствующий постоянный множитель, и имеющего однозначные обратные функции и якобиан преобразования

$$D = \frac{\partial(h_1, \ldots, h_n)}{\partial({}_*h_1, \ldots, {}_*h_n)} = \frac{1}{\Delta\tau_1 \cdots \Delta\tau_n}. \quad (11)$$

Совместная n-мерная ПРВ множества величин $\{{}_*h_1, \ldots, {}_*h_n\}$ запишется в форме:

$$W_n({}_*h_1, \ldots, {}_*h_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = W_n^*\left(\frac{{}_*h_1}{\Delta\tau_1}, \ldots, \frac{{}_*h_n}{\Delta\tau_n}; t_1, \ldots, t_n\right) \left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \Delta\tau_k}\right|. \quad (12)$$

Возвращаясь к (5), отметим, что $\hat{\tilde{X}}_в(t_0, t)$ есть сумма попарных произведений соответствующих элементов множеств $\{\xi_0, \ldots, \xi_n\}$ и $\{{}_*h_1, \ldots, {}_*h_n\}$, которые полагаем независимыми с заданными в совпадающие моменты времени совместными ПРВ $\omega_n(\xi_1, \ldots, \xi_n; t_1, \ldots, t_n)$ и (12) соответственно. ПРВ $\omega_n(\xi_1, \ldots, \xi_n; t_1, \ldots, t_n)$ получается из заданной $\omega_{n+1}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n; t_0, t_1, \ldots, t_n)$ интегрированием по ξ_0 (при использовании "нижней" интегральной суммы (6) используется $\omega_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}; t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$, которая получается из $\omega_{n+1}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n; t_0, t_1, \ldots, t_n)$ интегрированием по ξ_n).

Совместная ПРВ размерности 2n совокупности случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n, {}_*h_1, \ldots, {}_*h_n$ имеет вид:

$$W_{2n}(\xi_1, \ldots, \xi_n, {}_*h_1, \ldots, {}_*h_n; t_1, \ldots, t_n) = \\ = \omega_n(\xi_1, \ldots, \xi_n; t_1, \ldots, t_n) \times \\ \times W_n^*\left(\frac{{}_*h_1}{\Delta\tau_1}, \ldots, \frac{{}_*h_n}{\Delta\tau_n}; t_1, \ldots, t_n\right) \left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} \Delta\tau_k}\right|. \quad (13)$$

Выполним следующее функциональное преобразование случайных величин, входящих в (13):

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = \xi_1,\\
&- - - - -\\
&\xi_n = \xi_n,\\
&x_1 = \xi_1 \cdot {}_*h_1,\\
&x_2 = \xi_2 \cdot {}_*h_2,\\
&- - - - - - -\\
&x_n = \xi_n \cdot {}_*h_n.
\end{aligned} \qquad (14)$$

Обратные функции однозначны:

$$\begin{aligned}
&\xi_1 = \xi_1,\\
&- - - - - - -\\
&\xi_n = \xi_n,\\
&{}_*h_1 = x_1/\xi_1,\\
&{}_*h_2 = x_2/\xi_2,\\
&- - - - - - -\\
&{}_*h_n = x_n/\xi_n.
\end{aligned} \qquad (15)$$

Якобиан преобразования от случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_n,{}_*h_1,\dots,{}_*h_n$ к случайным величинам $\xi_1,\dots,\xi_n,x_1,\dots,x_n$ имеет вид:

$$D = \frac{\partial(\xi_1,\dots,\xi_n,{}_*h_1,\dots,{}_*h_n)}{\partial(\xi_1,\dots,\xi_n,x_1,\dots,x_n)} = \frac{1}{\xi_1\cdots\xi_n}. \quad (16)$$

С учётом (13)-(16) совместная ПРВ случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_n$, $x_1,\dots,x_n$ будет иметь вид:

$$W_{2n}(\xi_1,\dots,\xi_n,x_1,\dots x_n;t_1,\dots,t_n) = \omega_n(\xi_1,\dots,\xi_n;t_1,\dots,t_n)W_n^*\left(\frac{x_1}{\xi_1\Delta\tau_1},\dots,\frac{x_n}{\xi_n\Delta\tau_n};t_1,\dots,t_n\right)\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\xi_k\Delta\tau_k}\right|. \quad (17)$$

Интегрируя (17) по $\xi_1,\dots,\xi_n$, получим совместную ПРВ случайных величин $x_1,\dots,x_n$:

$$W_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_{2n}\Big(\xi_1,\dots,\xi_n,\frac{x_1}{\xi_1},\dots,\frac{x_n}{\xi_n};t_1,\dots,t_n\Big)\left|\frac{1}{\xi\cdots\xi}\right|\times$$

$$\times d\xi_1\cdots d\xi_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega_n(\xi_1,\dots,\xi_n;t_1,\dots,t_n)\times$$

$$\times W_n^*\Big(\frac{x_1}{\xi_1\Delta\tau_1},\dots,\frac{x_n}{\xi_n\Delta\tau_n};t_1,\dots,t_n\Big)\times$$

$$\times\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\Delta\tau_k}\right|\left|\frac{1}{\xi_1\cdots\xi_n}\right|d\xi_1\cdots d\xi_n\,. \qquad (18)$$

Если выполнить функциональное преобразование случайных величин в (13) в виде:

$$\begin{aligned}
&{}_*h_1={}_*h_1,\\
&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\
&{}_*h_n={}_*h_n,\\
&x_1=\xi_1\cdot{}_*h_1,\\
&-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\\
&x_n=\xi_n\cdot{}_*h_n\,,
\end{aligned} \qquad (19)$$

то выражение для $W(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)$ можно записать в другом виде

$$W_n(x_1,\dots,x_n;t_1,\dots,t_n)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_{2n}\Big(\frac{x_1}{{}_*h_1},\dots,\frac{x_n}{{}_*h_n},{}_*h_1,\dots,{}_*h_n;t_1,\dots,t_n\Big)\times$$

$$\times\left|\frac{1}{{}_*h_1\cdots{}_*h_n}\right|d_*h_1\cdots d_*h_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega_n\left(\frac{x_1}{{}_*h_1},\right.$$

$$\left.\ldots,\frac{x_n}{{}_*h_n};t_1,\ldots,t_n\right)W_n^*\left(\frac{{}_*h_1}{\Delta\tau_1},\ldots,\frac{{}_*h_n}{\Delta\tau_n};t_1,\right.$$

$$\left.\ldots,t_n\right)\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\Delta\tau_k}\right|\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}{}_*h_k}\right|d_*h_1\cdots d_*h_n. \qquad (20)$$

Выражения (18) и (20) эквивалентны и могут быть использованы в равной мере в зависимости от видов ПРВ $\omega_n(\xi_1,\ldots,\xi_n;t_1,\ldots,t_n)$ и $W_n^*(h_1^*,\ldots,h_n^*;t_1,\ldots,t_n)$ и последующего удобства и простоты интегрирования.

Если значения случайных величин $h_0,h_1,\ldots,h_n$ принадлежат области $(0,+\infty)$, то выражение (20) принимает вид:

$$W_n(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)=\int\limits_{0}^{+\infty}\cdots\int\limits_{0}^{+\infty}\omega_n\left(\frac{x_1}{{}_*h_1},\right.$$

$$\left.\ldots,\frac{x_n}{{}_*h_n};t_1,\ldots,t_n\right)W_n^{*}\left(\frac{{}_*h_1}{\Delta\tau_1},\ldots,\frac{{}_*h_n}{\Delta\tau_n};t_1\right.$$

$$\left.\ldots,t\right)\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\Delta\tau_k}\right|\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}{}_*h_k}\right|d_*h_1\cdots d_*h_n. \qquad (21)$$

В ряде случаев может оказаться, что случайные величины ${}_*h_1,\ldots,{}_*h_n$ ограничены интервалами $(0\div{}_*h_{1\,max}),\ldots,(0\div{}_*h_{n\,max})$. Тогда в (21) изменятся только верхние пределы интегрирования.

Выражения (18),(20) и (21) являются очень важными,т.к. позволяют определить как одномерную, так и многомерную (размерности n и меньше) ПРВ случайного процесса на выходе рассматриваемой линейной системы и не накладывают никаких ограничений на вид случайного процесса $\xi(t)$.

С учётом (5) из (18), (20) или (21) одномерная ПРВ случайного процесса на выходе линейной системы получается интегрированием (с соответствующими пределами):

$$W_1(x_в,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_в-x_1-$$
$$-\ldots-x_{n-1};t_1,t_2,\ldots,t_n)dx_1\cdots dx_{n-1}. \tag{22}$$

Если область изменения случайных величин $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_n$ есть $(0,+\infty)$, то выражение (22) запишется в форме:

$$W_1(x_в,t)=\int\limits_0^{x_в}dx_1\int\limits_0^{x_в-x_1}dx_2\cdots\int\limits_0^{x_в-x_1-\ldots-x_{n-1}}W_n(x_1,x_2,$$
$$\ldots,x_в-x_1-\ldots-x_{n-1})dx_{n-1}. \tag{23}$$

Для получения многомерной размерности n ПРВ случайного процесса на выходе линейной системы выполним следующее функциональное преобразование случайных величин $x_1,\ldots,x_n$, входящих в (18) - (23):

$$\begin{aligned}
\hat{z}_1&=x_1,\\
\hat{z}_2&=x_1+x_2=\hat{z}_1+x_2,\\
\hat{z}_3&=x_1+x_2+x_3=\hat{z}_2+x_3,\\
&- - - - - - - - - - - -\\
\hat{z}_n&=x_1+\ldots+x_n=\hat{z}_{n-1}+x_n.
\end{aligned} \tag{24}$$

Обратные функции однозначны:

$$\begin{aligned}
x_1&=\hat{z}_1,\\
x_2&=\hat{z}_2-\hat{z}_1,\\
&- - - - - - -\\
x_n&=\hat{z}_n-\hat{z}_{n-1}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Якобиан преобразования от случайных величин $x_1,\ldots,x_n$ к случайным величинам $\hat{z}_1,\ldots,\hat{z}_n$ равен единице. Тогда, подставляя (24) в (18), окончательно получим:

$$*W_n(\hat{z}_1,\hat{z}_2,\ldots,\hat{z}_n;t_1,t_2,\ldots,t_n)=$$
$$=W_n(\hat{z}_1,\hat{z}_2-\hat{z}_1,\ldots,\hat{z}_n-\hat{z}_{n-1};t_1,t_2,\ldots,t_n)=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W_{2n}\left(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\frac{\hat{z}_1}{\xi_1},\frac{\hat{z}_2-\hat{z}_1}{\xi_2},\ldots,\right.$$

$$\frac{\hat{z}_n-\hat{z}_{n-1}}{\xi_n};t_1,t_2,\dots,t_n\Bigr)\left|\frac{1}{\xi_1\cdots\xi_n}\right|d\xi_1\cdots d\xi_n=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_n\bigl(\xi_1,\dots,\xi_n;t_1,\dots,t_n\bigr)W_n^*\Bigl(\frac{\hat{z}_1}{\xi_1\Delta\tau_1},$$

$$\frac{\hat{z}_2-\hat{z}_1}{\xi_2\Delta\tau_2},\dots,\frac{\hat{z}_n-\hat{z}_{n-1}}{\xi_n\Delta\tau_n};t_1,t_2,\dots,t_n\Bigr)\times$$

$$\times\left|\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\Delta\tau_k}\right|\left|\frac{1}{\xi_1\cdots\xi_n}\right|d\xi_1\cdots d\xi_n\ . \qquad (25)$$

Используя (20), получим эквивалентное выражение:

$$*W_n(\hat{z}_1,\hat{z}_2,\dots,\hat{z}_n;t_1,t_2,\dots,t_n)=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}W_{2n}\Bigl(\frac{\hat{z}_1}{*h_1},\frac{\hat{z}_2-\hat{z}_1}{*h_2},\dots,\frac{\hat{z}_n-\hat{z}_{n-1}}{*h_n},*h_1,$$

$$*h_2,\dots,*h_n;t_1,t_2,\dots,t_n\Bigr)\left|\frac{1}{*h_1\cdots*h_n}\right|\times$$

$$\times d*h_1\dots d*h_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_n\Bigl(\frac{\hat{z}_1}{*h_1},\frac{\hat{z}_2-\hat{z}_1}{*h_2},\dots,$$

$$\frac{\hat{z}_n-\hat{z}_{n-1}}{*h_n};t_1,t_2,\dots,t_n\Bigr)W_n^*\Bigl(\frac{*h_1}{\Delta\tau_1},\frac{*h_2}{\Delta\tau_2},\dots,$$

$$\frac{*h_n}{\Delta\tau_n};t_1,t_2,\dots,t_n\Bigr)\left|\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}\Delta\tau_k}\right|\left|\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}*h_k}\right|\times$$

$$\times\ d*h_1\cdots d*h_n\ . \qquad (26)$$

Выражения (25) и (26) есть одна и та же искомая многомерная произвольной размерности n плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы со случайными параметрами.

Заключение. Выполненные в работе исследования позволяют расширить область применения метода прямого статистического анализа линейных систем на одномерные линейные системы со случайными параметрами и находить как одномерную, так и многомерную произвольной размерности n плотность распределения вероятности случайного процесса на выходе линейной системы.

Для применения этого метода необходимо, чтобы предварительно была решена задача отыскания многомерной произвольной размерности n плотность распределения вероятности мгновенных значений импульсной характеристики линейной системы.

Выполненные исследования показывают, что метод прямого статистического анализа линейных систем со случайными параметрами не накладывает особых ограничений на виды воздействующих на их входы случайных процессов (стационарные или нестационарные , коррелированные или некоррелированные и т.д.).

ЛИТЕРАТУРА

1.Кузнецов П.И.,Стратонович Р.Л.,Тихонов В.И. //Автоматика и телемеханика ,1953,т.14,N2,с.144.
2.Emerson R.C.//J.Appl.Phys.,1953,v.24,N9.
3.Кузнецов П.И.,Стратонович Р.Л.,Тихонов В.И. //ДАН СССР,1954, т.94,N4,с.615.
4.Meyer M.A.,Middleton D. //J.Appl.Phys.,1954,v.25,N.8,p.1037.
5.Чабдаров Ш.М.,Трофимов А.Т. //Радиотехника и электроника 1975,т.20,N4,с.79.
6.Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. М.:Наука,1975.
7.Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.:Сов.радио,1978,с.376.
8.Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах.М.:Наука,1980,с.336.
9.Есипенко В.И. Вероятностные характеристики линейных систем и "прямой" метод их статистического анализа. //Тезисы докладов Шестой Всероссийской научно-технической конференции "Радиоприём и обработка сигналов".Нижний Новгород, 1993.
10.Есипенко В.И. Вероятностные характеристики и метод прямого статистического линейных систем в переходном режиме. //Препринт N410 -Нижний Новгород,НИРФИ.-1975,с.30.
11.Есипенко В.И. Многомерная плотность распределения вероятности мгновенных значений импульсной характеристики линейной системы первого порядка со случайными параметрами. //Препринт N291 - Нижний Новгород,НИРФИ. -1994,с.20.
12.Солодов А.В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами .М.:ФМ,1962.С.324.