Научно–исследовательский радиофизический институт
Министерства общего и профессионального образования
Российской Федерации

П р е п р и н т   N 429

Геометрические методы в задачах о спектре многочастичных систем в магнитных полях с фиксированным псевдомоментом. I.

С. А. Вугальтер,
Г. М. Жислин

Нижний Новгород, 1996

Вугальтер С. А., Жислин Г. М.
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ О СПЕКТРЕ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ С ФИКСИРОВАННЫМ ПСЕВДОМОМЕНТОМ. I. // *Препринт N 429.* — Нижний Новгород: НИРФИ, 1996. 29 с.

УДК 517.43

Показывается, что оператор энергии n-частичной нейтральной системы в однородном магнитном поле с фиксированным псевдомоментом может быть записан как некоторый оператор в пространстве относительно движения. Для этого оператора доказана ХВЖ-теорема о локализации существенного спектра с учетом перестановочной симметрии при любом $n \geq 2$. При $n = 2$ впервые найдены условия конечности и бесконечности дискретного спектра и спектральные асимптотики. Результаты применимы в частности к гамильтониану атома водорода в однородном магнитном поле. [1]

[1]Поддержано Грантом РФФИ, 96-01-00478

Введение.

Основная трудность при исследовании спектра многочастичных систем в магнитных полях заключается в невозможности (в общем случае) отделения движения центра масс [1]. В результате теорема Хунцикера-Ван-Винтера-Жислина (ХВЖ) о локализации существенного спектра оказывается неверной для рассматриваемой ситуации, а невозможность найти существенный спектр не позволяет в свою очередь исследовать структуру и дискретного спектра. Это относится к системам в однородном магнитном поле, когда не все частицы тождественны и к произвольным системам в слабо убывающих магнитных полях (для возрастающих на бесконечности в x, y-плоскости полей все обстоит благополучно [2,3]).

Существуют два способа преодоления указанной трудности. Первый – для однородного магнитного поля – был предложен в [1]. Он заключается в сужении рассматриваемых операторов на подпространство функций с фиксированным псевдомоментом. Этот подход позволяет рассматривать системы с любыми зарядами (включая нейтральные), однако, он приводит к таким трудностям в изучении дискретного спектра, что практически никаких результатов о дискретном спектре n-частичных систем при фиксации псевдомомента до сих пор получено не было даже при $n = 2$.

Второй подход, предложенный нами в [2-4], использует $SO(2)$

симметрию системы. Он состоит в изучении спектра многочастичных гамильтонианов на подпространствах функций, преобразующихся по представлениям фиксированного веса группы $SO(2)$. Этот подход позволяет найти существенный спектр не только в случае однородного поля, но и для медленно убывающих полей. Однако, для нейтральных систем (атомы, молекулы) он не срабатывает.

Именно этот факт побудил нас обратиться к предложенному в [1] методу фиксации псевдомомента как к более универсальному для систем в однородном магнитном поле. Однако, в то время как в [1] применялись методы интегральных уравнений и чисто функциональный подход, мы здесь систематически используем геометрические методы. Фактически из [1] мы заимствуем лишь общую идею сужения изучаемых операторов на пространство функций с фиксированным псевдомоментом.

Мы рассматриваем здесь только случай нейтральных систем, ибо он особенно важен для приложений и не покрывается нашими работами [2-4].

В настоящей работе в первую очередь показывается, что пространство функций, отвечающих фиксированному псевдомоменту, может быть рассматриваемо как пространство функций, описывающих относительное движение системы (относительно центра масс). Этот факт является неожиданным и парадоксальным, ибо отделение движения центра масс в плоскости x, y для рассматриваемых систем не только не проводится, но оно невозможно в принципе (если не все частицы тождественны).

Одновременно устанавливается, что изучаемый оператор H можно преобразовать к такому виду H_0, в котором он не только зависит лишь от относительных координат, но более того: его "дифференциальная часть" зависит лишь от проекций градиента на гиперплоскость относительного движения.

Указанные факты позволили применить к изучению оператора H_0 геометрические методы, развитые в [2-4]. В результате в настоящей работе

I. Найдена граница существенного спектра оператора H_0 в обычной формулировке ХВЖ-теоремы (по сути эквивалентная, но более сложная формулировка ХВЖ-теоремы другим методом доказана в [1]).

II. Впервые доказаны теоремы о структуре дискретного спектра двухчастичных нейтральных систем с фиксированным псевдомоментом. А именно: найдены условия конечности и бесконечности дискретного спектра, и получены спектральные асимптотики с оценкой остаточного члена. В частности, такая асимптотика получена и для гамильтониана атома водорода. Заметим, что единственный результат о дискретном спектре оператора H_0, известный ранее, говорил только о существовании хотя бы одного собственного значения в случае отрицательного потенциала взаимодействия [1].

Дискретный спектр систем 3-х и более частиц будет изучен в отдельной работе, ибо для таких систем возникают серьезные дополнительные трудности. Эти трудности связаны с исследованием свойств операторов тех распадений исходной системы, которые определяют границу существенного спектра оператора H_0.

1. Фиксация псевдомомента. Постановка задачи.

1.1. Рассмотрим произвольную квантовую систему n частиц в однородном магнитном поле, направление которого принято за направление оси z. Пусть $r_i = (x_i, y_i, z_i)$, m_i, e_i – радиус-вектор, масса и заряд i-ой частицы, $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$, $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i$, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$, $\rho_i = (x_i, y_i)$. После отделения движения центра масс в направлении оси z – т.е. после сужения гамильтониана системы на подпространство функций, определенных на

$$R_{03} = \{r | \sum_{i=1}^{n} m_i z_i = 0\}$$

– мы можем записать оператор энергии системы в виде

$$H = T_\perp + T_3^0 + V(r) \,, \tag{1.1}$$

где

$$T_\perp = \sum_{j=1}^{n} T_j, \quad T_j = \left(\frac{1}{i}\nabla_{j\perp} - e_j\mathcal{B}_{j\perp}\right)^2 \frac{1}{m_j},$$

$$\nabla_{j\perp} = \nabla_{j\perp}(\rho) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right)$$

$$\mathcal{B}_{j\perp} = B(-y_j, x_j), \; B > 0, \quad T_3^0 = \sum_{t=1}^{n} T_{t3}^0,$$

$$T_{j3}^0 = -m_j {\nabla_{j3}^0}^2, \quad \nabla_{tp}^0 = m_t^{-1}\frac{\partial}{\partial q_{tp}} - \frac{1}{M}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_{sp}}, \quad p = 3 \,, \tag{1.2}$$

$$V(r) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{1,n} V_{ij}(r_{ij}), \; q_{t3} = z_t - \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \cdot M^{-1} \,.$$

Здесь T_3^0 – оператор кинетической энергии относительного движения системы в направлении оси z. Относительно потенциалов $V_{st}(r_{st})$ мы предполагаем, что они вещественны, $V_{st}(r_1) \in \in \mathcal{L}_{2,loc}(R^3)$ и $V_{st}(r_1) \to 0$ при $|r_1| \to \infty$.

Мы будем предполагать, что рассматриваемая система нейтральна, т.е. $Q = 0$.

1.2. Фиксируем значения компонент псевдомомента $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, и, следуя [1], рассмотрим оператор H на подпространстве функций ψ с фиксированным $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, т.е. на совокупности функций ψ, удовлетворяющих векторному уравнению

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{i}\nabla_{j\perp} + e_j\mathcal{B}_{j\perp}\right)\psi = \nu\psi \,. \tag{1.3}$$

При $Q = 0$ обе компоненты псевдомомента коммутируют с оператором H [1] и, следовательно, пространство решений системы

(1.3) инвариантно для оператора H. Общее решение системы (1.3) можно записывать в различной форме. Мы запишем его в виде

$$\psi(r) = f(r,\nu)\varphi(q) ,$$

где

$$f(r,\nu) = \exp(in^{-1}[(\nu_1 + B\sum_{j=1}^{n} e_j y_j)\sum_{s=1}^{n} x_s + (\nu_2 - B\sum_{j=1}^{n} e_j x_j)\sum_{s=1}^{n} y_s])$$

$$q = (q_1,\ldots,q_n),\ q_t = r_t - r_c,\ r_c = \sum_{p=1}^{n} m_p r_p M^{-1} .$$

Отметим, что система (1.3) не определяет характер зависимости функции φ от $z_1,\ldots,z_n$. Мы выбрали эту зависимость, исходя из требования $r \in R_{03}$ (см. п. 1.1), т.е. мы считаем, что φ зависит от $z_1,\ldots,z_n$ через $q_{j3} = z_j - M^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n} m_k z_k,\ j = 1,2,\ldots,n.$

Такая форма общего решения системы (1.3) во-первых, максимально учитывает возможную перестановочную симметрию системы и, во-вторых, позволяет в дальнейшем использовать некоторые подходы из [3].

Применяя к функции ψ оператор H мы получим

$$H\psi = f(r,\nu)H_0\varphi(q) ,$$

где

$$H_0 = -\sum_{j=1}^{n} m_j^{-1}\nabla_{j\perp}^2(q_\perp) + M^{-1}\sum_{j,s}^{1,n}(\nabla_{j\perp}(q_\perp),\nabla_{s\perp}(q_\perp)) + T_3^0 +$$

$$+2i\sum_{s=1}^{n}(\nabla_{s\perp}, D_{s\perp}) + \sum_{t=1}^{n} m_t^{-1}|A_{t\perp}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{s\neq t}^{n} V_{st}(q_s - q_t) , \qquad (1.4)$$

$$D_{s\perp} = (D_{s1}, D_{s2}),\ A_{s\perp} = (A_{s1}, A_{s2}),\ q_\perp = (q_{1\perp},\ldots,q_{n\perp}),$$

$$q_{s\perp} = (q_{s1}, q_{s2})$$

$$
\begin{aligned}
D_{s1} &= \nu_1\left(\frac{1}{M}-\frac{1}{nm_s}\right)+B\sum_{j=1}^{n}(q_{j2}-q_{s2})\left(\frac{e_s-e_j}{nm_s}+\frac{2e_j}{M}\right),\\
D_{s2} &= \nu_2\left(\frac{1}{M}-\frac{1}{nm_s}\right)+B\sum_{j=1}^{n}(q_{j1}-q_{s1})\left(\frac{e_j-e_s}{nm_s}-\frac{2e_j}{M}\right),
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{p1} &= \frac{\nu_1+B\sum\limits_{j=1}^{n}(q_{j_2}-q_{p_2})(e_j-e_p)}{n},\\
A_{p2} &= \frac{\nu_2+B\sum\limits_{j=1}^{n}(q_{j_1}-q_{p_1})(e_p-e_j)}{n}.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Оператор H_0 зависит только от относительных координат и, следовательно, пространство функций $\varphi(q)$ инвариантно для него. Заметим также, что поскольку оператор H и функция $f(r,\nu)$ были инвариантны относительно перестановок координат тождественных частиц системы, то тем же свойством обладает и оператор H_0 (это можно проверить и непосредственно).

1.3. Работать с оператором H_0 вида (1.4) не всегда удобно, поэтому постараемся переписать H_0 в другой форме. Чтобы понять – в какой именно (и для других целей), введем скалярное произведение $(\rho,\tilde{\rho})_2 = \sum\limits_{s=1}^{n} m_s(\rho_s,\rho_s)_{R^2}$, пространство относительного движения в направлении осей x и y

$$
R_{0\perp} = \{\rho|\rho = (\rho_1,\ldots,\rho_n),\quad \sum_{j=1}^{n} m_j\rho_j = 0\}
$$

и проектор (в смысле $(.,.)_2$) $P_{0\perp}$ на пространство $R_{0\perp}$. Обозначим через $\tilde{\nabla}_\perp(q_\perp)$ вектор-оператор $\left(\dfrac{\nabla_{1\perp}(q)}{m_1}\ldots\dfrac{\nabla_{n\perp}(q)}{m_n}\right)$ и положим $\nabla^0_\perp(q) = P_{0\perp}\tilde{\nabla}_\perp(q)$. Согласно [3], $\nabla^0_\perp = (\nabla^0_{1\perp},\nabla^0_{2\perp},\ldots,\nabla^0_{n\perp})$, где $\nabla^0_{s\perp} = (\nabla^0_{s1},\nabla^0_{s2})$ и ∇^0_{sp} дается формулой (1.2) с $p = 1,2$. Векторный оператор $\nabla^0_\perp$ можно рассматривать как оператор градиента для относительного движения системы в плоскости x,y, который при отсутствии магнитного поля получается после обычного отделения движения центра масс в этой плоскости. Можно предположить, что если операторы $\nabla_{j\perp}(q_\perp)$ выразить через операторы

$\nabla^0_{s\perp}$, то мы получим оператор H_0 в форме в некотором смысле близкой к той, которая соответствовала бы отделению движения центра масс (хотя такое отделение и невозможно, если не все частицы тождественны). Несложные вычисления показывают, что

$$H_0 = \left(\frac{1}{i}\nabla^0_\perp - A_\perp, \frac{1}{i}\nabla^0_\perp - A_\perp\right)_2 + T^0_3 + V(q) \ , \qquad (1.7)$$

где $A_\perp = \left(\frac{A_{1\perp}}{m_1}, \frac{A_{2\perp}}{m_2}, \dots, \frac{A_{n\perp}}{m_n}\right)$, $A_{t\perp}$ то же, что в (1.4), (1.6).

Положим $D_\perp = P_{0\perp} A_\perp$, $F = A_\perp - D_\perp$. Так как $(\nabla^0_\perp, F)_2 = 0$, то

$$H_0 = \left(\frac{1}{i}\nabla^0_\perp - D_\perp, \frac{1}{i}\nabla^0_\perp - D_\perp\right)_2 + (F,F)_2 + T^0_3 + V(q) \ , \qquad (1.8)$$

где

$$F = (F_1, \dots, F_n), \ F_i = (F_{i1}, F_{i2}), \ F_{i1} = (\nu_1 + 2B\sum_{s=1}^n q_{s2} e_s) M^{-1},$$

$$F_{i2} = (\nu_2 - 2B\sum_{s=1}^n q_{s1} e_s) M^{-1}, \ D_\perp = (D_1, \dots, D_n), \ D_s = (D_{s1}, D_{s2})$$

D_{sp}, $p = 1, 2$ – те же, что в (1.5).

Оператор H_0 мы будем рассматривать на функциях $\varphi(q_1, \dots, q_n)$. Так как координаты q_i удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{s=1}^n m_s q_s = 0 \ ,$$

то мы можем рассматривать оператор H_0 в $\mathcal{L}_2(R_0)$, где

$$R_0 = \{q | q = (q_1, \dots, q_n), \ \sum_{s=1}^n m_s q_s = 0\} \ .$$

Определим оператор H_0 на $C^2_0(R_0)$ и расширим его до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение. Область определения H_0 обозначим $D(H_o)$.

1.4. Учтем перестановочную симметрию системы. Пусть $P^{(\alpha)}$ – проектор на подпространство функций, преобразующихся по неприводимому представлению типа α группы S перестановок тождественных частиц системы, $\mathcal{L}_2^{(\alpha)}(R_0) = P^{(\alpha)}\mathcal{L}_2(R_0)$, $D^{(\alpha)} = P^{(\alpha)}D(H_0)$, $H_0^{(\alpha)} = P^{(\alpha)}H_0$.

$H_0^{(\alpha)}$ – ограничение оператора H_0 на подпространство функций симметрии α. Наша цель – исследование спектра оператора $H_0^{(\alpha)}$.

2. О существенном спектре оператора $H_0^{(\alpha)}$.

2.1. Для описания существенного спектра нам нужно определить операторы энергии подсистем. Пусть $Z_s = (C_1, \ldots, C_s)$ – произвольное разбиение исходной системы Z_1 на не пересекающиеся кластеры. Определим конфигурационное пространство $R_0[Z_s]$ для системы $Z_s = (C_1, \ldots, C_s)$

$$R_0[Z_s] = \{q | q = (q_1 \ldots, q_n), \sum_{j \in C_t} m_j q_{j3} = 0, \quad t = 1, 2, \ldots, s\}$$

и положим

$$H_0(Z_s) = \left(\frac{1}{i}\nabla_\perp^0 - A_\perp, \frac{1}{i}\nabla_\perp^0 - A_\perp\right)_2 + T_3^0(Z_s) + V_{Z_s}\,, \tag{2.1}$$

где

$$V_{Z_s}(q) = \frac{1}{2}\sum_{C_j \in Z_s}\sum_{p,t \in C_j} V_{pt}(q_{st}), \quad T_3^0(Z_s) = \sum_{j=1}^{s} T_3^0[C_j]\,, \tag{2.2}$$

$$T_3^0[C] = -\sum_{t \in C} m_t {\nabla_{t3}^0}^2[C], \quad \nabla_{t3}^0[C] = m_t^{-1}\frac{\partial}{\partial q_{t3}[C]} -$$

$$-M[C]^{-1}\sum_{p \in C}\frac{\partial}{\partial q_{p3}[C]} \tag{2.3}$$

$$M[C] = \sum_{t \in C} m_t,$$

$$q_{t3}[C] = z_t - \sum_{k\in C} m_k z_k M[C]^{-1} = q_t - \sum_{k\in C} m_k q_{k3} M[C]^{-1},$$

$$t \in C;\ C = C_1, \ldots, C_s.$$

$H_0(Z_s)$ – оператор энергии системы s невзаимодействующих между собой кластеров $C_1, \ldots, C_s$ в однородном магнитном поле при фиксированном значении псевдомомента всей системы. Мы рассматриваем оператор $H_0(Z_s)$ в пространстве $\mathcal{L}_2(R_0[Z_s])$.

2.2. Пусть $S(Z_s)$ – группа перестановочной симметрии системы Z_s, порождаемая перестановками тождественных частиц внутри кластеров C_t и перестановками тождественных кластеров из Z_s между собой (если таковые в Z_s имеются). Обозначим типы неприводимых представлений группы $S(Z_s)$ через β и будем писать $\beta \prec \alpha$, если неприводимое представление группы $S(Z_s)$ типа β содержится в неприводимом представлении группы S типа α после сужения последнего с S на $S(Z_s)$. Пусть $P^{(\beta)}(Z_s)$ – проектор в $\mathcal{L}_2(R_0[Z])$ на подпространство функций симметрии β и $H_0^{(\beta)}(Z_s) = P^{(\beta)}(Z_s)H_0(Z_s)$. Положим

$$\mu^{(\beta)}(Z_s) = \inf H_0^{(\beta)}(Z_s), \quad \mu^{(\alpha)} = \min_{\beta, \beta\prec\alpha}\ \min_{Z_s, s\geq 2} \mu^{(\beta)}(Z)\ . \qquad (2.4)$$

2.3. Теорема 2.1

Существенный спектр оператора $H_0^{(\alpha)}$ состоит из всех точек полуоси $[\mu^{(\alpha)}, +\infty)$:

$$\sigma_{ess}(H_0^{(\alpha)}) = [\mu^{(\alpha)}, +\infty)\ . \qquad (2.5)$$

Замечание. *Эквивалентный результат без учета симметрии совершенно другим методом получен ранее в [1].*

Доказательство. Поскольку нам удалось записать оператор H_0 в относительных координатах, мы можем применить для доказательства методику [3,4], разработанную для случая, когда возможно полное отделение движения центра масс. А именно: мы разбиваем конфигурационное пространство R_0 на области, отвечающие всевозможным распадениям системы, и далее оцениваем квадратичную форму оператора $H_0^{(\alpha)}$ на последовательностях Вейля по каждой из этих областей. Так получается оценка

$$\inf \sigma_{ess}(H_0^{(\alpha)}) \geq \mu^{(\alpha)} \ , \tag{2.6}$$

а затем для любого $\lambda > \mu^{(\alpha)}$ мы строим последовательность нормированных функций $\omega_p(q)$ так, что

$$\|(H_0^{(\alpha)} - \lambda)\omega_p(q)\| \to o \ , \quad \text{при } p \to \infty. \tag{2.7}$$

Так как в доказательстве (2.7) отсутствуют какие-либо новые моменты, по сравнению с [3] (§§2.7,2.8), то мы его не повторяем, и будем доказывать только (2.6).

2.4. Пусть $Z_s = (C_1, \dots, C_s)$,

$$R_0(Z_s) = \{q | q = (q_1, \dots, q_n), \ \sum_{j \in C_i} m_j q_j = 0 \ , i = 1, \dots, s\} \tag{2.8}$$

$P_0(Z_s)$ и $P_c(Z_s)$ – проекторы на $R_0(Z_s)$ и $R_c(Z_s) = R_0 \ominus R_0(Z_s)$ в смысле скалярного произведения

$$(r, \tilde{r})_3 = \sum_{p=1}^{n} m_p (r_p, \tilde{r}_p)_{R^3} \ , \tag{2.9}$$

где $r = (r_1, \dots, r_n)$, $\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n)$.

Положим $|q|_3^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (q_i, q_i) m_i$, $\tau_1 = |q|_3$, $\tau_{Z_s} = |P_0(Z_s)q|_3 \cdot |P_c(Z_s)q|_3^{-1}$.

Заметим, что согласно [9] (стр. 125),

$$|P_0(Z_s)q|_3^2 = \sum_{C_i \in Z_s} \frac{1}{2M[C_i]} \sum_{p,k \in C_i} m_p m_k |q_p - q_k|^2$$

$$|P_c(Z_s)q|_3^2 = \frac{1}{M} \sum_{C', C'' \in Z} M[C'] M[C''] |q_c[C'] - q_c[C'']|^2 \ ,$$

где $M[C] = \sum\limits_{i \in C} m_i$, $q_c[C] = \sum\limits_{j \in C} \dfrac{m_j q_j}{M[C]}$ и, очевидно,

$$q_p - q_k = r_p - r_k,\; q_c[C'] - q_c[C''] = r_c[C'] - r_c[C''] =$$
$$= \sum_{j\in C'} \frac{m_j r_j}{M[C']} - \sum_{j\in C''} \frac{m_j r_j}{M[C'']} .$$

Пусть $a(1) < b(1)$ – большие, $a(s) < b(s)$, $s \geq 2$ – малые числа, выбранные так же как в [3] (§2.4). Далее определяем вещественные дважды кусочно-непрерывно дифференцируемые функции $u_s(\tau)$, $v_s(\tau)$, так, что $0 \leq u_s(\tau)$, $v_s(\tau) \leq 1$, $u_s(\tau) = 1$ при $\tau \in [0, a(s)]$, $u_s(\tau) = 0$ при $\tau \geq b(s)$ и $u_s^2(\tau) + v_s^2(\tau) = 1$.

Положим
$$u_{Z_s} = u_s(\tau_{Z_s}),\; v_{Z_s} = v_s(\tau_{Z_s}) .$$

Пусть $g_k(q)$ – последовательность Вейля, отвечающая точке λ существенного спектра оператора H_0, $\psi \equiv g_k$

$$\hat{\psi}_0 \equiv \psi,\; \hat{\psi}_i = \hat{\psi}_{i-1}\left(1 - \sum_{Z_i} u_{Z_i}^2\right)^{1/2},\; \psi_{i-1,Z_i} = \hat{\psi}_{i-1} u_{Z_i},$$
$$i = 1, \ldots, n . \tag{2.10}$$

Каждая из функций $\psi_{i,Z_{i+1}}$ обладает тем свойством, что $supp\psi_{i,Z_{i+1}}$ лежит в области конфигурационного пространства, которая отвечает распадению системы Z_{i+1} на $i+1$ кластер, т.е. области, в которой взаимодействия между частицами из разных кластеров из Z_{i+1} малы и стремятся к нулю при $a(1) \to \infty$.

В силу соотношений (2.5) и (2.6) из [3] мы получаем, что для $\forall\epsilon > 0$ и больших $a(1) = a(1, \epsilon)$

$$(H_0 g_k, g_k) \geq \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{Z_{j+1}} (H_0(Z_{j+1})\psi_{j,Z_{j+1}}, \psi_{j,Z_{j+1}}) - 2\epsilon\|g_k\|^2 \tag{2.11}$$

$$(H_0(Z_{j+1})\psi_{j,Z_{j+1}}, \psi_{j,z_{j+1}}) \geq \mu^{(\alpha)}\|\psi_{j,Z_{j+1}}\|^2,\quad j \neq 0 . \tag{2.12}$$

Остается оценить величину

$$(H_0(Z_1)\psi_{0,Z_1}, \psi_{0,Z_1}) .$$

Очевидно, $H_0(Z_1) = H_0$. Далее, в ограниченной области $|q|_3 \leq b$ оператор H_0 с граничным условием Дирихле при $|q|_3 = b$ имеет чисто дискретный спектр, накапливающийся только к $+\infty$. Поэтому и т.к. $\|g_k\|_{|q|_1 \leq b_1} \to 0$ при $k \to \infty$, мы получаем, что для больших k

$$(H_0\psi_{0,Z_1}, \psi_{0,Z_1}) \equiv (H_0 g_k u_{Z_1}, g_{u_k} u_{Z_1}) \geq \mu^{(\alpha)} \|\psi_{0,Z_1}\|^2 . \qquad (2.13)$$

В силу (2.11) – (2.13) и т.к. в силу леммы 3.5 [10] $supp\ \psi_{j,Z_{j+1}} \bigcap supp\ \psi_{j,Z'_{j+1}} = \emptyset$, если $Z_{j+1} \neq Z'_{j+1}$, мы получаем, что для больших k

$$(H_0 g_k, g_k) \geq \mu^{(\alpha)} \|g_k\|^2 - 2\epsilon \|g_k\|^2 .$$

Отсюда следует, что

$$\lambda \equiv \lim_{k\to\infty} (H_0 g_k, g_k) \geq \mu^{(\alpha)} .$$

Таким образом, $\sigma_{ess}(H_0) \subset [\mu^{(\alpha)}, +\infty)$, т.е. (2.6) доказано.

Доказательство обратного включения $[\mu^{(\alpha)}, +\infty) \subset \sigma_{ess}(H_0)$ следует из (2.7).

Теорема 2.1 доказана.

3. О дискретном спектре оператора H_0.

3.1. В настоящем параграфе мы изучаем дискретный спектр оператора $H_0^{(\alpha)}$ при $n = 2$. Частицы 1,2 не могут быть тождественными, ибо имеют заряды разных знаков. Поэтому для двухчастичных систем при $Q = 0$ мы можем отойти от общего подхода (где координаты q_1 и q_2 были равноправны) и учесть, что $q_1 = \frac{m_2}{m_1}(r_1 - r_2)$, $q_2 = -\frac{m_1}{m_2}(r_1 - r_2)$, так что фактически мы рассматриваем оператор на функциях $\omega(r_1 - r_2) = \varphi(q_1, q_2)$. Полагая $u = (u_1, u_2, u_3) = r_1 - r_2 = q_1 - q_2$, мы мы получаем, что на функциях $\omega(u)$ оператор (1.4) запишется в виде

$$H_0 = -\frac{1}{M_R}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_j} - \frac{2}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\left(\frac{\nu_1 + 2Beu_2}{2}\right)M_{12} -$$

$$-\frac{2}{i}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\left(\frac{\nu_2 - 2Beu_1}{2}\right)M_{12} + \frac{1}{M_R}\left(\frac{\nu_1 + 2Beu_2}{2}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{M_R}\left(\frac{\nu_2 - 2Beu_1}{2}\right)^2 + V(u)\ , \qquad (3.1)$$

где $\dfrac{1}{M_R} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$, $M_{12} = \dfrac{1}{m_2} - \dfrac{1}{m_1}$, e – заряд 1-ой частицы. Делая замену переменных $t_2 = u_2 + \nu_1/2Be$, $t_1 = u_1 - \nu_2/2Be$, $t_3 = u_3$ и группируя соответствующим образом члены в (3.1) имеем

$$H_0 = -\delta\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right) - \frac{1}{M_R}\frac{\partial^2}{\partial t_3^2} + M_{12}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_1} - Bet_2\right)^2 +$$

$$+M_{12}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_2} + Bet_1\right)^2 + \delta B^2e^2(t_1^2 + t_2^2) + V(\tilde{t})\ , \qquad (3.2)$$

где $\delta = \dfrac{2}{m_1} > 0$, $\tilde{t} = \left(t_1 + \dfrac{\nu_2}{2Be}, t_2 - \dfrac{\nu_1}{2Be}, t_3\right)$. Согласно теореме 2.1 граница существенного спектра оператора H_0 равна $\mu = \inf H_0(Z_2)$, где

$$H_0(Z_2) = -\delta\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}\right) + M_{12}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_1} - Bet_2\right)^2 +$$

$$+M_{12}\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t_2} + Bet_1\right)^2 + \delta B^2e^2(t_1^2 + t_2^2) \qquad (3.3)$$

и $Z_2 = \{(1),(2)\}$ есть единственно возможное распадение исходной системы на не взаимодействующие между собой частицы.

3.2. Пусть $\sigma_d(h)$ и $\sigma_{ess}(h)$ – это дискретный и существенный спектр произвольного оператора h.

Лемма 3.1 *Оператор $H_0(Z_2)$ имеет чисто дискретный спектр.* 1)

1) этот результат ~~независимо от нас~~ ранее другими методами получен и в [12]

Доказательство. Пусть $\sigma_{ess}(H_0(Z_2)) \neq \theta$ и $\lambda \in \sigma_{ess}(H_0)$. Положим $t_\perp = (t_1, t_2)$. Тогда $\exists g_s(t_\perp)$ такая, что $\|H_0(Z_2)g_s - \lambda g_s\| \to 0$, $\|g_s\| = 1$, $g_s \rightharpoonup 0$ в $\mathcal{L}_2(R^2)$.

Легко видеть, что

$$\sup_s (H_0(Z_2)g_s, g_s) < +\infty$$

Следовательно,

$$\sup_s \|\nabla_{t_\perp} g_s\| < +\infty$$

и в силу теоремы вложения последовательность $g_s(t_\perp)$ компактна в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ для любой ограниченной области $\Omega \subset R^2$. Диагональным процессом выберем из $g_s(t_\perp)$ подпоследовательность, сходящуюся в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ для любой ограниченной области Ω, и сохраним за ней прежнее обозначение. Пусть $g_0(t_\perp)$ – предельная функция для $g_s(t_\perp)$. Так как, $g_s(t_\perp)$ сходится к $g_0(t_\perp)$ и слабо, и в силу единственности слабого предела $g_0(t_\perp) \equiv 0$. Следовательно, в любом шаре $S_N = \{t_\perp, \ |t_\perp| \leq N\}$ выполняется $g_s(t_\perp) \to 0$ в $\mathcal{L}_2(S_N)$ и, значит, $(|t_\perp|^2 g_s, g_s) \to \infty$ при $s \to \infty$.

Поэтому

$$(H_0(Z_2)g_s, g_s) \to \infty ,$$

что невозможно.

Следовательно, предположение, что $\sigma_{ess}(H_0(Z_2)) \neq \theta$ неверно. Таким образом, существенный спектр оператора $H_0(Z_2)$ пуст, т.е. $\sigma(H_0(Z_2)) = \sigma_d(H_0(Z_2))$ и лемма доказана.

Таким образом, число μ – изолированное конечнократное собственное значение оператора $H_0(Z_2)$.√ ~~Пусть $\varphi_1(t_\perp) \ldots \varphi_m(t_\perp)$ – ортонормированный базис в собственном подпространстве U_μ оператора $H_0(Z_2)$, отвечающем числу μ; $m = dim U_\mu$.~~

~~**Замечание.** *Мы ожидаем, что $dim U_\mu = 1$, т.е. число $m = 1$, однако этот факт пока не доказан.*~~

Лемма 3.2 *Функци~~и~~я $\cancel{\varphi_k}\,\varphi(t_\perp)|t_\perp|^2$ леж~~а~~ит в $\mathcal{L}_2(R^2)$.*

Доказательство аналогично приведенному в лемме 3.3 [5].

17 3 3 **Теорема 3.1** *Пусть* $\exists N > 0$, $q_0 < 0$, $0 < \gamma < 2$ *такие, что*

$$V(t) \leq q_0 |t|^{-\gamma} \quad \text{при } |t| > N.$$

√ В силу [12] кратность μ равна 1, пусть $\varphi(t_\perp)$ – ~~орто~~нормированная собственная функция оператора $H_0(Z_2)$, отвечающая числу μ.

Тогда спектр $\sigma_d(H_0)$ бесконечен.

Доказательство. Пусть $\cancel{g(t_\perp) \in U_\mu,\ \|g\| = 1}$ $f(t_3) \in C_0^\infty$, $supp f(t_3) \subset [N, +\infty), \|f\| = 1,\ f_k(t_3) = \sqrt{k} f(kt_3),\ k > 0,\ \psi_k(t) = g(t_\perp) f_k(t_3)$. Имеем: $\|\psi_k\| = 1$ и

$$(H_0\psi_k, \psi_k) = \mu + M_R^{-1} \int\limits_0^\infty \left|\frac{df_k}{dt_3}\right|^2 dt_3 + \int\int\int |g(t_\perp)|^2 |f_k(t_3)|^2 V(|\tilde{t}|) dt_\perp dt_3$$

Полагая здесь в интегралах $t_3 = sk^{-1}$, получим

$$(H_0\psi_k, \psi_k) = \mu + \frac{k^2}{M_R} \int\limits_0^\infty \left|\frac{df(s)}{ds}\right|^2 ds +$$

$$+ \int\int \int\limits_{|s| \geq N} |g(t_\perp) f(s)|^2 V(\tilde{t}_\perp, sk^{-1}) dt_\perp ds \leq \mu +$$

$$+ k^2 c_1 + k^\gamma c_2(k)\ , \qquad (3.4)$$

где $c_1 > 0$ и при малых k

$$c_2(k) = q_0 \int\int \int\limits_{|s| \geq N} \frac{|g(t_\perp) f(s)|^2 dt_\perp ds}{(|\tilde{t}_\perp k|^2 + s^2)^{\gamma/2}}$$

Так как $c_2(k) < 0$ и $c_2(k) \not\to 0$ при $k \to 0$, то из неравенства (3.4) вытекает, что при малых k

$$(H_0\psi_k, \psi_k) < \mu\ .$$

Поэтому $\sigma_d(H_0) \neq \emptyset$. Пусть $l > 0$ – любое целое число. Построим такое подпространство $\mathcal{M}$ размерности l, что при $\psi \in \mathcal{M}$

$$(H_0\psi, \psi) < \mu \|\psi\|^2\ .$$

Отсюда будет следовать, что размерность линейной оболочки собственных функций дискретного спектра оператора H_0 больше или равна l. Так как число l – произвольно, то дискретный спектр H_0 будет бесконечен.

Для построения $\mathcal{M}$ определим функции $\omega_i(t_3) \in C_0^\infty$, $\|\omega_i\|_{R^1} = 1$, $supp\omega_i \subset [N+i, N+i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Положим $\omega_{ik}(t_3) = \sqrt{k}\omega_i(kt_3)$ и $\psi_{ik}(t) = \varphi(t_\perp)\omega_{ik}(t_3)$. Аналогично предыдущему можно показать, что при малом k

$$(H_0\psi_{ik}, \psi_{ik}) < \mu, \quad i = 1, 2, \ldots, l\,.$$

Так как $supp\psi_{i,k} \bigcap supp\psi_{j,k} = \emptyset$ при $i \neq j$, то для любой функции $\Psi_k(t) = \sum\limits_{j=1}^{l} d_j\psi_{j,k}$ выполняется

$$\|\Psi_k\|^2 = \sum_{j=1}^{l} \|\psi_{j,k}\|^2 |d_j|^2 = \sum_{j=1}^{l} |d_j|^2$$

и

$$(H_0\Psi_k, \Psi_k) = \sum_{j=1}^{l} |d_j|^2 (H_0\psi_{jk}, \psi_{jk}) < \mu\|\Psi_k\|^2\,. \tag{3.5}$$

В силу (3.6), подпространство $\mathcal{M} = \{\sum\limits_{j=1}^{l} d_j\psi_{jk} | d_j$ – любые, k – малое $\}$ обладает требуемыми свойствами. $\triangle$

3.4. Для получения дальнейших результатов о дискретном спектре оператора H_0 мы наложим более жесткие ограничения на потенциал $V(t)$. Будем считать, что
$\exists N > 0,\ \gamma > 0,\ q_0 \in R^1$ такие, что

$$V(t) = q_0|t|^{-\gamma} \quad \text{при } |t| > N. \tag{3.6}$$

Пусть $c_0 > 0$, $b > 0$ – некоторые константы, которые будут определены в §4. Введем эффективные потенциалы

$$V^{1(2)}(\zeta) = q_0|\zeta|^{-\gamma} \pm c_0|\zeta|^{-\gamma+2} \quad \text{при } |\zeta| > b$$

$$V^{1(2)}(\zeta) = 0 \quad \text{при } |\zeta| \le b \tag{3.7}$$

и операторы

$$h(V^{1(2)}) = -\frac{1}{M_R}\frac{d^2}{d\zeta^2} + V^{1(2)}(\zeta), \ \ \zeta \in R^1 \tag{3.8}$$

Обозначим далее через $N(\lambda, V^{1(2)})$ и $N(\mu+\lambda)$ размерности линейных оболочек собственных функций операторов $h(V^{1(2)})$ и H_0, отвечающих собственным значениям этих операторов, не превосходящим соответственно λ и $\mu+\lambda$ $(\lambda < 0)$. ~~Пусть $m = dimU_\mu$.~~

Теорема 3.2 *Для некоторого $c > 0$ и $\forall\lambda < 0$*

$$-c + \cancel{m}N(\lambda, V^{(1)}) \le N(\mu+\lambda) \le c + \cancel{m}N(\lambda, V^{(2)}) \ . \tag{3.9}$$

Доказательство теоремы 3.2 дано в §4.

Теорема 3.2 сводит вопрос о структуре дискретного спектра оператора H_0 с фиксированным псевдомоментом к вопросу о структуре дискретного спектра некоторых эффективных одномерных операторов, и это позволяет получить дальнейшие результаты о спектре H_0. Но предварительно сделаем ряд замечаний.

Замечание 1. *Эффективный оператор не зависит от фиксированного значения псевдомомента $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Однако, от него может зависеть величина c.*

Замечание 2. *Теорема 3.2 и последующие теоремы 3.3, 3.4 по формулировкам и методике доказательства похожи на аналогичные теоремы из [5], где для операторов вида (1.1) вместо ограничения на подпространство функций с фиксированным псевдомоментом рассматривались ограничения на подпространство функций фиксированной $SO(2)$ симметрии. И хотя с одной стороны подход [3] не работает для нейтральных систем, а с другой – изучаемый здесь оператор H_0 не обладает $SO(2)$ симметрией, тем не менее техника [5] оказывается весьма полезной в рассматриваемой ситуации.*

3.5. Следующие результаты вытекают из теоремы 3.2 и найденных в [6,7] спектральных асимптотик для операторов вида (3.8).

Теорема 3.3 *Дискретный спектр оператора H_0 конечен, если $\gamma > 2$ или если $\gamma \le 2$, но выполняется хотя бы одно из условий*

1) $\gamma = 2$ *и* $q_0 \ge -\frac{1}{4}M_R$

2) $\gamma > 0, \quad q_0 > 0$

Теорема 3.4 *При* $\lambda \to -0$

1) если $\gamma < 2, \ q_0 < 0,$ *то*

1/2

$$N(\mu + \lambda) = |\lambda|^{(\gamma-2)/2\gamma} \pi M_R^{1/\gamma} |q_0|^{1/\gamma} J + O(ln|\lambda|) \ , \qquad (3.10)$$

где $J = \gamma^{-1} \int_1^\infty (u-1)^{1/2} u^{-(\gamma+1)/\gamma} du,$

2) если $\gamma = 2, \quad q_0 < -0,25M_R,$ *то*

$$N(\mu + \lambda) = \frac{1}{2\pi} |\ln|\lambda|| \pi (4|q_0|M_R - 1)^{1/2} + o(|\ln \lambda||) \qquad (3.11)$$

Отметим, что соотношение (3.10) при $\gamma = 1$ дает асимптотику дискретного спектра гамильтониана атома водорода (с ядром конечной массы) при фиксации псевдомомента.

Естественно, что из теорем 3.3, 3.4 следует соответственно конечность $\sigma_d(H_0)$, если $V(t) \ge q|t|^{-\gamma}$ при $|t| > N$, где q и γ подчиняются условиям теоремы 3.3 и бесконечность $\sigma_d(H_0)$ (с оценкой числа $N(\mu + \lambda)$ снизу), если $V(t) \le q_0|t|^{-\gamma}$ при $|t| > N$, где q_0 и γ удовлетворяют требованиям теоремы 3.4. В частности, теорема 3.1 тоже следует из теоремы 3.4, но мы приводим независимое доказательство теоремы 3.1, так как оно очень простое, в отличие от доказательства теоремы 3.2 (из которой и следует утверждение 3.4).

4. Доказательство теоремы 3.2.

4.1 Доказательство теоремы 3.2 использует геометрические методы. Оно основано на построении таких подпространств $\mathcal{M}_i(\lambda) \subset \mathcal{D}(H_0) \ \ i = 1, 2,$ что для всех $\lambda < 0$

$$(H_0\psi, \psi) < (\mu^\sigma + \lambda)||\psi||^2 \quad \psi \in \mathcal{M}_1(\lambda) \qquad (4.1)$$

$$(H_0\psi,\psi) > (\mu^\sigma + \lambda)\|\psi\|^2 \quad \psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda) \tag{4.2}$$

и на оценке размерности этих пространств через величины $N(\lambda, V^{(i)})$. В качестве подпространства $\mathcal{M}_1(\lambda)$ мы возьмем подпространство всех функций ψ вида

$$\psi = \sum_{i,j} c_{ij}\varphi_i(t_\perp) f_j(t_3) \; ,$$

где ~~функции $\varphi_i(t_\perp)$ образуют базис в U_μ,~~ $f_j(t_3)$ – собственные функции оператора

$$h_1(b) = -\frac{1}{M_R}\frac{d^2}{dt_3^2} + V^{(1)}(t_3) \tag{4.3}$$

в области $|t_3| \geq b$ с нулевыми граничными условиями при $|t_3| = b$, отвечающие собственным значениям $\lambda_j < \lambda$,c_{ij} – любые вещественные числа, $b > 0$ – некоторая константа. Так же как и в [8] проверяется, что

$$dim\mathcal{M}_1(\lambda) \geq mN(\lambda, V^{(1)}) - const \tag{4.4}$$

Если (4.1) выполняется, то $N(\mu + \lambda) \geq dim\mathcal{M}_1(\lambda)$ и в силу (4.4)

$$N(\mu + \lambda) \geq mN(\lambda, V^{(1)}) - const \; .$$

Таким образом, для оценки величины $N(\mu + \lambda)$ снизу надо доказать (4.1).

4.2 Пусть $\psi \in \mathcal{M}_1(\lambda)$. Очевидно

$$(H_0\psi,\psi) = (H_0(Z_2)\psi,\psi) + (V(\tilde{t})\psi,\psi) - \frac{1}{M_R}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t_3^2},\psi\right)$$

Так как оператор $H_0(Z_2)$ не зависит от переменной t_3, то

$$(H_0(Z_2)\psi,\psi) = \mu\|\psi\|^2 \tag{4.5}$$

Далее, очевидно,

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3^2}\psi,\psi\right) = -\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3^2}\Phi_i,\Phi_i\right) , \tag{4.6}$$

где $\Phi_i(t_3) = \sum_j a_{ij} f_j(t_3)$. Оценим член $(V(\tilde{t})\psi, \psi)$. Так как при $t_3 \in supp f_j(t_3)$ выполняется $|t_3| \geq b$, то при $b > N$ и $t_3 \in supp\psi$

$$V(\tilde{t}) = q_0 |\tilde{t}|^{-\gamma}$$

Пусть $\beta > 0$, $\Omega_\beta = \{t| \; |\tilde{t}_\perp| < \beta |t_3|\}$, где $\tilde{t}_\perp = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$, $\tilde{t}_1 = t_1 + \dfrac{\nu_2}{2Be}$, $\tilde{t}_2 = t_2 - \dfrac{\nu_1}{2Be}$, $\chi(t)$ – характеристическая функция области Ω_β.

Учитывая, что в силу леммы 2.2

$$\varphi_i(t_\perp)|t_\perp|^2 \in \mathcal{L}_2(R^2)\ , \tag{4.7}$$

имеем

$$|((1 - \chi(t))V(\tilde{t})\psi, \psi)| \leq C \sum_{i=1}^{m} \|\Phi_i |t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2 \tag{4.8}$$

Здесь и далее через C обозначаем константы, величины которых не существенны.

Чтобы оценить форму $(\chi V(\tilde{t})\psi, \psi)$, мы воспользуемся разложением функции $V(\tilde{t}) = q|\tilde{t}|^{-\gamma}$ в области $\Omega_\beta \bigcap supp\psi$ по формуле Тейлора. Получим

$$\left| \frac{1}{(|t_\perp|^2 + t_3^2)^{\gamma/2}} - \frac{1}{|t_3|^\gamma} \right| \leq C \frac{|\tilde{t}_\perp|^2}{|t_3|^{2+\gamma}} \tag{4.9}$$

В силу (4.9), (4.7)

$$|(\chi V(\tilde{t}) \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \Phi_i, \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \Phi_j) - q_0(\chi |t_3|^{-\gamma} \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \Phi_i, \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \Phi_j)| \leq$$

$$\leq C \sum_{i=1}^{m} \|\Phi_i |t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2 \tag{4.10}$$

Далее, аналогично (4.8)

$$|((1-\chi)|t_3|^{-\gamma}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i,\Phi_i,\sum_{j=1}^{m}\varphi_j\Phi_j)| \le$$

$$\le C\sum_{i=1}^{m}\|\Phi_i(t_3)|t_3|^{-1-\gamma/2}\|^2 \tag{4.11}$$

В силу (4.8), (4.10), (4.11)

$$(V(|\tilde{t}|))\psi,\psi) \le \sum_{i=1}^{m}(q_0|t_3|^{-\gamma}\Phi_i,\Phi_i)+$$

$$+C\sum_{i=1}^{m}\|\Phi_i(t_3)|t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2 \tag{4.12}$$

Из соотношений (4.5), (4.6), (4.12) следует, что для некоторой константы C_0, не зависящей от функций $f_j(t_3)$

$$(H_0\psi,\psi) \le \sum_{i=1}^{m}\Big\{-\frac{1}{M_R}\Big(\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial t_3},\Phi\Big)+(\Phi_i,q_0|t_3|^{-\gamma}\Phi_i)+$$

$$+C_0(\Phi_i,|t_3|^{-2-\gamma}\Phi_i)\Big\}++\mu\|\psi\|^2 \tag{4.13}$$

По построению, функции Φ_i есть линейные комбинации ортонормированных собственных функций оператора $h(V^{(1)})$ (см. (3.8), (3.7)), отвечающих собственным значениям, меньшим λ. Поэтому каждое слагаемое в фигурных скобках в (4.13) не превосходит $\lambda\|\Phi_i\|^2$, и мы окончательно получаем

$$(H_0\psi,\psi) \le (\mu+\lambda)\|\psi\|^2$$

Таким образом (4.1) доказано.

4.3 Переходим к доказательству неравенства (4.2), а точнее, к построению такого подпространства $\mathcal{M}_2(\lambda)$, что (4.2) верно при $\psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda)$. Пусть $u_1(t_3), v_1(t_3) \in C^2(R^1_+)$, $u_1^2(t_3)+v_1^2(t_3)=1$, $u_1(t_3)=1$ при $|t_3|\le b$, $u_1(t_3)=0$, при $|t_3|\ge b_1>b>0$, $u_1(t_3)\ge u_1(t_3')$ при $t_3\ge t_3'$, $lim_{t\to b}v_1^2(t)(1-v_1^2(t))^{-1}=0$.

Тогда в силу леммы 3.2 [11] по $\forall\epsilon > 0$ при большом $b > 0$ для $\forall\psi \in \mathcal{D}(H_0)$

$$(H_0\psi, \psi) \geq L_1[\psi u_1(|t_3|)] + L_2[\psi v_1(|t_3|)] \ , \tag{4.14}$$

где

$$L_1[\varphi] = (H\varphi, \varphi) - \epsilon\|\varphi\|^2$$

$$L_2[\varphi] = (H\varphi, \varphi) - \epsilon\|\varphi|t|^{-(1+\gamma/2)}\|^2$$

Оператор H_0 в области $|t_3| \leq b_1$ имеет чисто дискретный спектр, накапливающийся к $+\infty$. Действительно, обычное разделение переменных и лемма 2.1 показывают, что оператор

$$T = \frac{1}{2}\left(H_0(Z_2) - \frac{1}{M_R}\frac{\partial^2}{\partial t_3^2}\right)$$

с граничным условием Дирихле при $|t_3| = b_1$ имеет в области $\Omega = \{t|\ |t_3| \leq b_1\}$ чисто дискретный спектр; оператор $T + V(\tilde{t})$ ограничен снизу и значит оператор

$$H_0 = 2T + V(\tilde{t})$$

имеет в Ω чисто дискретный спектр.

Поэтому по заданным b_1 и b можно найти такое конечномерное подпространство $\mathcal{M}_2'$, что при $\psi u_1 \perp \mathcal{M}_2'$

$$L_1[\psi u_1] \geq \mu\|\psi u_1\|^2$$

Отсюда и из (4.14) следует, что при $\psi u_1 \perp \mathcal{M}_2'$

$$(H_0\psi, \psi) \geq \mu\|\psi u_1\|^2 + L_2[\psi v_1] \tag{4.15}$$

Определим пространство $\mathcal{M}_2''(\lambda)$ как множество функций

$$\psi = \sum_{i,j} C_{ij}\varphi_i(t_\perp)f_j(t_3) \ ,$$

λ нормированные

где C_{ij} – любые вещественные числа, функции $\varphi_i(t_\perp)$ ~~образуют~~
собственные функции
~~ортонормированный базис в собственном пространстве U_μ опе-~~ о.и ратора $H_0(Z_2)$ (см. п. 3.2), $f_j(t_3)$ – собственные функции оператора $h_2(b)$ вида (4.3) с отвечающие числу μ $V^{(2)}(t_3)$ вместо $V^{(1)}(t_3)$ в области $|t_3| \geq b$ с нулевым граничным условием при $|t_3| = b$, отвечающие его собственным значениям, меньшим $\lambda, \lambda < 0$. Положим

$$\mathcal{M}_2(\lambda) = \mathcal{M}'_2(\lambda) \bigcup \mathcal{M}''_2(\lambda)$$

и докажем, что пространство $\mathcal{M}_2(\lambda)$ обладает требуемыми свойствами.

Аналогично [8] убеждаемся, что

$$dim \mathcal{M}_2(\lambda) \leq mN(\lambda, V^{(2)}) + const$$

Если (4.2) выполняется, то

$$dim \mathcal{M}_2(\lambda) \geq N(\mu + \lambda)$$

и таким образом мы получаем требуемую оценку величины $N(\mu + \lambda)$ сверху. Таким образом, нам остается доказать (4.2).

4.4. Положим $\psi_{Z_2} = \psi v_1$ и запишем функции $\psi_{Z_2}(t)$ в виде

$$\psi_{Z_2} = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t_\perp) \Phi_i(t_3) + g(t) \ , \qquad (4.16)$$

где $\Phi_i(t_3) = (\psi_{Z_2}, \varphi_i)_{R^2}$, $(g(t), \varphi_i)_{R^2} = 0$ для $\forall t_3$, ~~$i = 1, \ldots, m$.~~

Очевидно, что

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}\right) = -\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_3^2} \Phi_i, \Phi_i\right) - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial t_3^2}, g\right) \qquad (4.17)$$

и

$$(H_0(Z_2)\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) \geq \mu \|\psi_{Z_2}\|^2 + \eta \|g\|^2 \ , \qquad (4.18)$$

где η – расстояние от μ до ближайшей точки спектра оператора $H(Z_2)$.

Вследствие (4.17), (4.18) для оценки квадратичной формы оператора H_0 нам нехватает тольно оценки величины $(V\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2})$, которая и будет проведена далее.

Пусть, как и п 4.2 $\beta > 0$ малое число,

$$\Omega_\beta = \{t | t \in R^3,\ |\tilde{t}_\perp| < \beta |t_3|\}$$

и $\chi(t)$ – характеристическая функция области Ω_β. Имеем

$$((1-\chi)V\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) \geq -2(|(1-\chi)V|(\sum_{i=1}^{m} \varphi_i \Phi_i, \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \Phi_i)-$$

$$-2(|(1-\chi)V|g, g) \tag{4.19}$$

Поскольку $|V(\tilde{t})| \leq c|t_3|^{-\gamma}$ при $|t_3| > b$ и т.к. $\varphi_i(t_\perp)|t_\perp| \in \mathcal{L}_2(R^2)$, то при достаточно большом b из (4.19) вытекает неравенство

$$((1-\chi)V\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) \geq -\epsilon\|g\|^2 - C\sum_{i=1}^{m} \|\Phi_i |t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2 . \tag{4.20}$$

Т.к. $V = \chi V + (1 - \chi V)$, то далее естественно оценить величину

$$(\chi V\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) = (\chi V g, g) + (\chi V \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \Phi_i, \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \Phi_j)+$$

$$+2Re(\chi V \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \Phi_i, g) \tag{4.21}$$

При большом $b > 0$

$$|(V\chi g, g)| \leq \epsilon\|g\|^2 \tag{4.22}$$

Аналогично (4.9), (4.10)

$$|(\chi V \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \Phi_i, \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \Phi_j) - \sum_{i=1}^{m} q_0 \|\Phi_i |t_3|^{-\gamma/2}\|^2| \leq$$

$$\leq C\sum_{i=1}^{m} \|\Phi_i |t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2 \tag{4.23}$$

$$\chi|V(\tilde{t})-q_0|t_3|^{-\gamma}|\le C|\tilde{t}_\perp|^2|t_3|^{-2-\gamma}\quad \text{при } |t_3|>b. \tag{4.24}$$

4.5. Для оценки "перекрестного члена" в (4.21) заметим, что

$$|(\chi V\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\Phi_i,g)|\le|(\chi(V-q_0|t_3|^{-\gamma})\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\Phi_i,g)|+$$

$$+|(q_0|t_3|^{-\gamma}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\Phi_i,g)|+|(1-\chi)q_0|t_3|^{-\gamma}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\Phi_i,g)| \tag{4.25}$$

и оценим каждое из слагаемых в правой части (4.25). Аналогично (4.8) получаем неравенство

$$|((1-\chi)q_0|t_3|^{-\gamma}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\Phi_i,g)|\le\epsilon\|g\|^2+C\sum_{i=1}^{m}\|\Phi_i|t_3|^{-(2+\gamma)}\|^2\,. \tag{4.26}$$

В силу (4.24) и (4.7)

$$|(\chi(V-g|t_3|^{-\gamma})\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\Phi,g)|\le\epsilon\|g\|^2+C\sum_{i=1}^{m}\|\Phi_i|t_3|^{-(2+\gamma)}\|^2 \tag{4.27}$$

Наконец, по построению

$$(|t_3|^{-\gamma}\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\Phi_i,g)=0 \tag{4.28}$$

Применяя соотношения (4.26)–(4.28) для оценки в (4.25), получим

$$|(\chi V\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\Phi_i,g)|\le\epsilon\|g\|^2+C\sum_{i=1}^{m}\|\Phi_i|t_3|^{-(2+\gamma)}\|^2 \tag{4.30}$$

Используя (4.22), (4.23) и (4.30), мы выводим из (4.21), что

$$(\chi V\psi_{Z_2},\psi_{Z_2})\ge-\epsilon\|g\|^2+\sum_{i=1}^{m}q_0(\Phi_i,|t_3|^{-\gamma}\Phi_i)-$$

$$-C\sum_{i=1}^{m}\|\Phi_i|t_3|^{-(1+\gamma/2)}\|^2 \tag{4.31}$$

Складывая (4.20) и (4.31), имеем

$$(V\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) \geq -2\epsilon||g||^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\{(\Phi_i, q_0|t_3|^{-\gamma}\Phi_i) - \epsilon||\Phi_i|t_3|^{-(1+\gamma/2)}||^2\} \tag{4.32}$$

Наконец, очевидно

$$||\psi_{Z_2}|t_3|^{-(1+\gamma/2)}||^2 \leq \epsilon||g||^2 + C\sum_{i=1}^{m}||\Phi_i|t_3|^{-(1+\gamma/2)}||^2 \tag{4.33}$$

Используя для оценки функционала $L_2[\psi v_1] \equiv L_2[\psi_{Z_2}]$ в неравенстве (4.15) соотношения (4.18), (4.17), (4.32) и (4.33), мы получаем окончательно, что при $\psi \perp \mathcal{M}_2'$

$$(H_0\psi, \psi) \geq \mu||\psi||^2 + \sum_{i=1}^{m}\left\{\frac{-1}{M_R}\left(\frac{\partial^2}{\partial t_3^2}\Phi_i, \Phi_i\right) + q_0(|t_3|^{-\gamma}\Phi_i, \Phi_i) - \right.$$

$$\left. -C||\Phi_i|t_3|^{-(1+\gamma/2)}||\right\} \tag{4.34}$$

и $c_0 = C$ (см п 3.4).

Так как $\psi \perp \mathcal{M}_2$, то ~~в сумме в фигурных скобках~~ функции $\Phi_i(t_3)$ не могут содержать проекции на собственные функции оператора $h_b(V^{(2)})$, отвечающие собственным значениям $\lambda' \leq \lambda$, и, значит, выражение в ~~фигурных~~ квадратных скобках будет больше, чем $\lambda\sum_{i=1}^{m}||\Phi_i||^2$. Так как $\lambda < 0$ и $\sum_{i=1}^{m}||\Phi_i||^2 = ||\psi_{Z_2}||^2 - ||g||^2 \leq ||\psi||^2$, то из (4.34) получаем, что при $\psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda)$ выполняется $(H\psi, \psi) \geq (\mu + \lambda)||\psi||^2$.

Теорема доказана.

Литература

1. J. E. Avron, J. W. Herbst, B. Simon, Ann. Phys., 114(1978), New York, 431.
2. Г. М. Жислин, Алгебра и анализ, 8, N 1 (1996), 190–199.
3. С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, ТМФ 97, N 1 (1993), 94–112.
4. G. Zhislin, Preprint ESI N 166 (1994), Wienn.
5. С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, Алгебра и анализ, 5, N 2 (1993), 108–125.
6. W. Kirsch, B. Simon, Correction to the classical behavior of the number of bound states of Schrodinger operator, Preprint.
7. В. Я. Иврий, ДАН СССР, 276, N 2 (1984), 268–270.
8. С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, Алгебра и анализ, 3, N 6 (1991), 119–155.
9. М. А. Антонец, Г. М. Жислин, И. А. Шерешевский, Приложение к книге К. Йоргенс, И. Вайдман "Спектральные свойства гамильтоновых операторов", Москва, "Мир", 1976.
10. S. A. Vugalter, G. M. Zhislin, ROMP, 19 (1984), 39–90.
11. С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, ТМФ 55, N 1 (1983), 66–77.
12. A. Jensen and S. Nakamura, The 2D Schrödinger equation for a neutral pair in a constant magnetic field, preprint R-96-2017 Aalborg University, 1996