Научно-исследовательский радиофизический институт
Министерства общего и профессионального образования
Российской Федерации

Препринт N 430

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТОКА В РАМОЧНОЙ АНТЕННЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В ХОЛОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

Т. М. Заборонкова,
А. В. Кудрин
Е. Ю. Петров

Нижний Новгород, 1996

Заборонкова Т. М., Кудрин А. В., Петров Е. Ю.
О распределении тока в рамочной антенне, расположенной в холодной анизотропной плазме // Препринт N 430. — Нижний Новгород: НИРФИ, 1996. 18 с.

УДК 533.951

Рассмотрена задача о распределении тока в рамочной антенне, представляющей собой бесконечно тонкую идеально проводящую узкую ленту, свернутую в кольцо. Антенна расположена в анизотропной плазменной среде перпендикулярно внешнему магнитному полю и возбуждается сторонней ЭДС. Главное внимание сосредоточено на области частот, в которой возможно возбуждение электростатических волн. Задача сведена к бесконечной системе интегральных уравнений с логарифмическим ядром. На основании решения этих уравнений получено приближенное выражение для распределения тока в антенне. Результаты представлены в виде, удобном для выполнения численных расчетов.*

Zaboronkova T. M., Kudrin A. V., Petrov E. Yu.
Current distribution along a loop antenna, immersed in an anisotropic plasma // Preprint N 430. — Nizhny Novgorod: NIRFI, 1996. 18 p.

We consider the problem of determining the current distribution along a loop antenna consisting of an infinitely thin, perfectly conducting strip, which is coiled into the ring. The antenna is immersed in an anisotropic plasma perpendicularly to an ambient magnetic field and exited by the given EMF. The main attention is focused on the frequency band in which an excitation of electrostatic waves is possible. The problem is reduced to the infinite set of integral equations with the logarithmic kernel. On the basis of solving these equations, an approximate expression is obtained for the antenna current distribution. The results are given in the form convenient for performing numerical calculations.

---

*Поддержано грантом РФФИ N 96-02-18666.

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию различных излучателей и, в частности, металлических антенн, расположенных в холодной бесстолкновительной замагниченной плазме, посвящено значительное число работ (см., например, [1–15] и цитируемую там литературу). Повышенный интерес вызывают характеристики антенных систем в частотных интервалах, отвечающих так называемым резонансным условиям [3, 7, 15], когда показатель преломления одной из нормальных волн плазменной среды обращается в бесконечность. Такие условия реализуются во многих экспериментах по возбуждению электромагнитных излучений в лабораторной и космической плазме [16–18]. Характерной особенностью большинства работ, посвященных тонким металлическим антеннам в плазме, является использование в резонансных областях частот заданных распределений тока как вдоль антенного провода, так и по его поперечному сечению [1] [1, 5, 6]. При этом берутся, как правило, простейшие распределения тока вдоль провода — линейные ("треугольные") для электрических вибраторов [1, 5] и однородные для рамочных (магнитных) антенн [6]. Такой подход, однако, может быть оправданным (в качестве первого приближения) лишь для излучателей малых электрических размеров. В общем случае необходимо отыскание распределения тока на антенне при заданных действующих на нее сторонних ЭДС.

В настоящей работе рассматривается задача о распределении тока в тонкой круговой рамочной антенне, находящейся в замагниченной ($\vec{H}_0 \| \vec{z}_0$) плазменной среде. Главное внимание здесь сосредоточено именно на резонансном диапазоне частот. При рассмотрении мы ограничимся наиболее простым случаем анизотропной плазмы, описываемой тензором диэлектрической про-

[1] Заметим, что при наличии плазменного резонанса вид "размытия" тока по поперечному сечению может существенно сказываться как на значении полной мощности излучения, так и на характере распределения излучаемой мощности по пространственному спектру возбуждаемых волн [19].

ницаемости вида

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$, $\eta < 0$ [2]. Напомним, что этот случай реализуется при $\omega < \omega_p$ в сильно замагниченной плазме — $(\omega_H \Omega_H)^{1/2} < \omega \ll \omega_H$, $\omega_p^2/\omega \ll \omega_H$, а также в области достаточно низких частот $\omega \ll \Omega_H$ (здесь ω — круговая частота поля, ω_p и ω_H — плазменная частота и гирочастота электронов соответственно, Ω_H — гирочастота ионов) [20].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим бесконечно тонкую идеально проводящую ленту ширины $2b$, свернутую в кольцо радиуса a. Плоскость кольца перпендикулярна внешнему магнитному полю $\vec{H}_0$. Будем полагать, что описанная рамочная антенна возбуждается гармонической во времени $\left(\sim \exp(-i\omega t)\right)$ сторонней ЭДС, поле которой имеет единственную азимутальную составляющую $E_\varphi^{\text{ст}}$, отличную от нуля только при $\rho = a$, $|z| < b$ и равную

$$E_\varphi^{\text{ст}} = \frac{\mathcal{E}^{\text{ст}}}{2\delta_0 a}\left[U(\varphi - \varphi_0 + \delta_0) - U(\varphi - \varphi_0 - \delta_0)\right]. \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{E}^{\text{ст}} = \text{const}$, U — единичная функция Хевисайда, ρ, φ, z — цилиндрические координаты.

Плотность тока, возбуждаемого на антенне сторонним полем (2), будем искать в виде

$$\vec{j} = \vec{\varphi}_0\, I(\varphi, z)\, \delta(\rho - a), \tag{3}$$

---

[2] Задача о распределении тока вдоль линейной вибраторной антенны, ориентированной вдоль внешнего магнитного поля и расположенной в плазме с тензором диэлектрической проницаемости вида (1), рассмотрена в [3, 4].

где $|z| < b$, δ — дельта-функция Дирака. Линейная плотность тока $I(\varphi, z)$ может быть, очевидно, представлена следующим образом:

$$I(\varphi, z) = I_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \Big(I_{m,c}(z)\cos m\varphi + I_{m,s}(z)\sin m\varphi\Big). \qquad (4)$$

Аналогичное представление допускает и величина $E_\varphi^{\text{ст}}$:

$$\begin{aligned} E_\varphi^{\text{ст}} &= \frac{\mathcal{E}^{\text{ст}}}{\pi a}\left[\frac{1}{2} + \right. \\ &+ \left.\sum_{m=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{m\delta_0}{\pi}\right)(\cos m\varphi_0 \cos m\varphi + \sin m\varphi_0 \sin m\varphi)\right], \end{aligned} \qquad (5)$$

где

$$\operatorname{sinc}\theta = \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta}.$$

Заметим, что при $\delta_0 \to 0$, т.е. при переходе в (2) к δ-функции по φ — $E_\varphi^{\text{ст}} = \mathcal{E}^{\text{ст}} a^{-1}\delta(\varphi - \varphi_0)$, все величины $\operatorname{sinc}(m\delta_0/\pi)$ обращаются в единицу.

Нетрудно убедиться, что азимутальная и продольная компоненты электрического поля, возбуждаемого током (3), записываются при $\rho = a$ в виде:

$$\begin{aligned} E_\varphi = &-\frac{2\pi\omega k_0 a}{c^2} \times \\ &\times \int_{-b}^{b} I_0(z') \int_0^{\infty} \frac{n_\perp}{n_{\|,e}} J_1^2(k_0 a n_\perp) \exp\Big(i k_0 n_{\|,e} |z - z'|\Big)\, dn_\perp\, dz' + \\ &+ \frac{2\pi\omega k_0 a}{c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-b}^{b} \Big(I_{m,c}(z')\cos m\varphi + I_{m,s}(z')\sin m\varphi\Big) \times \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\eta} \int\limits_0^\infty \frac{n_\perp (n_\perp^2 - \eta)}{n_{\|,o}} \left(\frac{m J_m(k_0 a n_\perp)}{k_0 a n_\perp} \right)^2 \exp\left(i k_0 n_{\|,o} |z - z'| \right) dn_\perp - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^\infty \frac{n_\perp}{n_{\|,e}} J'^2_m(k_0 a n_\perp) \exp\left(i k_0 n_{\|,e} |z - z'| \right) dn_\perp \right\} dz', \tag{6}$$

$$E_z = -i \frac{2\pi\omega}{c^2 \eta} \sum_{m=1}^\infty \int\limits_{-b}^{b} \left(I_{m,s}(z') \cos m\varphi - I_{m,c}(z') \sin m\varphi \right) \times$$

$$\times m \int\limits_0^\infty n_\perp J_m^2(k_0 a n_\perp) \exp\left(i k_0 n_{\|,o} |z - z'| \right) dn_\perp \operatorname{sign}(z - z') \, dz'.$$

В приведенных выражениях используются следующие обозначения:

$$n_{\|,o} = \sqrt{\varepsilon + \mu^2 n_\perp^2}, \quad n_{\|,e} = \sqrt{\varepsilon - n_\perp^2}, \quad \mu^2 = -\frac{\varepsilon}{\eta} = \frac{\varepsilon}{|\eta|},$$

J_m и J'_m — функции Бесселя и их производные по аргументу соответственно, $k_0 = \omega/c$ — волновое число в свободном пространстве. Отметим, что зависимости $n_{\|,\alpha}(n_\perp)$ ($\operatorname{Im} n_{\|,\alpha} > 0$) описывают поверхности показателя преломления нормальных волн — обыкновенной ($\alpha = \mathrm{o}$) и необыкновенной ($\alpha = \mathrm{e}$). Обе эти волны в рассматриваемом случае являются распространяющимися.

Из граничных условий для электрического поля при $\rho = a$, $|z| \le b$

$$E_\varphi + E_\varphi^{\text{ст}} = 0 \tag{7}$$

и

$$E_z = 0 \tag{8}$$

несложно получить (с учетом выражений (6)) интегральные уравнения для величин $I_0(z)$, $I_{m,c}(z)$, $I_{m,s}(z)$. Так, из условия (7) имеем:

$$\int_{-b}^{b} \mathcal{K}_{\varphi,0}(z-z')\,I_0(z')\,dz' = -\frac{c\mathcal{E}^{\text{ст}}}{4\pi^2(k_0a)^2},$$

$$\int_{-b}^{b} \mathcal{K}_{\varphi,m}(z-z')\,I_{m,c}(z')\,dz' = -\frac{c\mathcal{E}^{\text{ст}}}{2\pi^2(k_0a)^2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{m\delta_0}{\pi}\right)\cos m\varphi_0, \quad (9)$$

$$\int_{-b}^{b} \mathcal{K}_{\varphi,m}(z-z')\,I_{m,s}(z')\,dz' = -\frac{c\mathcal{E}^{\text{ст}}}{2\pi^2(k_0a)^2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{m\delta_0}{\pi}\right)\sin m\varphi_0,$$

$$m = 1, 2, \ldots, \quad |z| \le b;$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\varphi,0}(\zeta) &= -\int_0^\infty \frac{n_\perp}{\sqrt{\varepsilon - n_\perp^2}}\,J_1^2(k_0an_\perp)\exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon-n_\perp^2}\,|\zeta|\right)dn_\perp, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (10)\\
\mathcal{K}_{\varphi,m}(\zeta) &= \int_0^\infty \left[\frac{n_\perp(n_\perp^2-\eta)}{\eta\sqrt{\varepsilon+\mu^2n_\perp^2}}\,\frac{m^2\,J_m^2(k_0an_\perp)}{(k_0an_\perp)^2}\times\right. \\
&\times \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon+\mu^2n_\perp^2}\,|\zeta|\right) - \\
&- \left.\frac{n_\perp}{\sqrt{\varepsilon-n_\perp^2}}\,J'^2_m(k_0an_\perp)\exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon-n_\perp^2}\,|\zeta|\right)\right]dn_\perp.
\end{aligned}$$

Из условия (8) получаем уравнения

$$\int_{-b}^{b} \mathcal{K}_{z,m}(z-z')\,I_{m,c}(z')\,dz' = \int_{-b}^{b} \mathcal{K}_{z,m}(z-z')\,I_{m,s}(z')\,dz' = 0, \quad (11)$$

$$m = 1, 2, \ldots, \quad |z| \le b;$$

$$\mathcal{K}_{z,m}(\zeta) = \operatorname{sign}\zeta \int\limits_0^\infty n_\perp J_m^2(k_0 a n_\perp) \exp\left(ik_0\sqrt{\varepsilon + \mu^2 n_\perp^2}\,|\zeta|\right) dn_\perp. \quad (12)$$

Заметим, что особые (сингулярные) интегралы, стоящие в уравнениях (9) и (11), следует понимать в смысле главного значения.

Поведение решений полученных интегральных уравнений определяется свойствами их ядер $\mathcal{K}_{\varphi,m}$, $\mathcal{K}_{z,m}$. В случае достаточно тонкой антенны

$$\frac{a}{b} \gg 1, \qquad \frac{a}{\mu b} \gg 1 \quad (13)$$

свойства этих ядер позволяют получить приближенные решения уравнений (9), (11) в виде сравнительно простых и удобных для использования формул. Наряду с неравенствами (13) мы далее будем также считать выполненными упрощающие условия

$$b \ll 2\delta_0 a \ll a. \quad (14)$$

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ТОКА

Анализ интегральных уравнений (9), (11) начнем с изучения некоторых свойств их ядер, даваемых соотношениями (10), (12). Представим ядра этих уравнений в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\varphi,0}(\zeta) &= K_{\varphi,0}(\zeta) + F_{\varphi,0}(\zeta), \\ \mathcal{K}_{\varphi,m}(\zeta) &= K_{\varphi,m}(\zeta) + F_{\varphi,m}(\zeta), \\ \mathcal{K}_{z,m}(\zeta) &= K_{z,m}(\zeta) + F_{z,m}(\zeta), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$K_{\varphi,0}(\zeta) = i\int\limits_0^\infty J_1^2(k_0an_\perp)\exp\Big(-k_0n_\perp|\zeta|\Big)dn_\perp,$$

$$\begin{aligned} K_{\varphi,m}(\zeta) &= \int\limits_0^\infty\left[\frac{(-1)\,m^2}{(k_0a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}J_m^2(k_0an_\perp)\exp\Big(ik_0n_\perp\mu\,|\zeta|\Big)+\right.\\ &+\left. i\,J_{m-1}^2(k_0an_\perp)\exp\Big(-k_0n_\perp|\zeta|\Big)\right]dn_\perp, \end{aligned} \qquad (16)$$

$$K_{z,m}(\zeta) = \operatorname{sign}\zeta\int\limits_0^\infty n_\perp J_m^2(k_0an_\perp)\exp\Big(ik_0n_\perp\mu\,|\zeta|\Big)dn_\perp;$$

$$F_{\varphi,0}(\zeta) = i\int\limits_0^\infty J_1^2(k_0an_\perp)\left[\frac{in_\perp}{\sqrt{\varepsilon-n_\perp^2}}\exp\Big(ik_0\sqrt{\varepsilon-n_\perp^2}\,|\zeta|\Big)-\right.$$

$$\left.-\exp\Big(-k_0n_\perp|\zeta|\Big)\right]dn_\perp,$$

$$F_{\varphi,m}(\zeta) = \int\limits_0^\infty\left\{\frac{m^2J_m^2(k_0an_\perp)}{(k_0an_\perp)^2}\times\right. \qquad (17)$$

$$\times\left[\frac{n_\perp(n_\perp^2-\eta)}{\eta\sqrt{\varepsilon+\mu^2n_\perp^2}}\exp\Big(ik_0\sqrt{\varepsilon+\mu^2n_\perp^2}\,|\zeta|\Big)-\frac{n_\perp^2}{\eta\mu}\exp\Big(ik_0n_\perp\mu\,|\zeta|\Big)\right]-$$

$$-\left[\frac{n_\perp J'^2_m(k_0an_\perp)}{\sqrt{\varepsilon-n_\perp^2}}\exp\Big(ik_0\sqrt{\varepsilon-n_\perp^2}\,|\zeta|\Big)+\right.$$

$$\left.\left.+\quad i\,J_{m-1}^2(k_0an_\perp)\exp\Big(-k_0n_\perp|\zeta|\Big)\right]\right\}dn_\perp,$$

$$F_{z,m}(\zeta) = \operatorname{sign}\zeta\int\limits_0^\infty n_\perp J_m^2(k_0an_\perp)\times$$

$$\times\Big[\exp\Big(ik_0\sqrt{\varepsilon+\mu^2n_\perp^2}\,|\zeta|\Big)-\exp\Big(ik_0n_\perp\mu\,|\zeta|\Big)\Big]dn_\perp;\quad m=1,2,\ldots\,.$$

Вычисление интегралов, стоящих в выражениях (16), дает [21]

$$K_{\varphi,0}(\zeta) = \frac{i}{\pi k_0 a} Q_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\zeta^2}{2a^2}\right),$$

$$K_{\varphi,m}(\zeta) = \frac{1}{\pi k_0 a}\left\{\frac{(-1)\,m^2}{(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}\times\right.$$

$$\times\left[\left(\mathrm{Q}_{m-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\mu^2\zeta^2}{2a^2}\right)+i\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{P}_{m-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\mu^2\zeta^2}{2a^2}\right)\right)U\left(1-\frac{\mu\,|\zeta|}{2a}\right)+\right.$$

$$\left.+\;i(-1)^m\,Q_{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2\zeta^2}{2a^2}-1\right)\,U\left(\frac{\mu\,|\zeta|}{2a}-1\right)\right]+$$

$$\left.+\;i\,Q_{m-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{\zeta^2}{2a^2}\right)\right\}, \tag{18}$$

$$K_{z,m}(\zeta) = \frac{1}{i\pi k_0^2 a\mu}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\left[\mathrm{Q}_{m-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\mu^2\zeta^2}{2a^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\;i\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{P}_{m-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\mu^2\zeta^2}{2a^2}\right)\right]U\left(1-\frac{\mu\,|\zeta|}{2a}\right)+$$

$$\left.+\;i(-1)^m\,Q_{m-\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu^2\zeta^2}{2a^2}-1\right)\,U\left(\frac{\mu\,|\zeta|}{2a}-1\right)\right\}.$$

Здесь

$$\mathrm{P}_\nu(x) = \frac{1}{2}\left[P_\nu(x+i0)+P_\nu(x-i0)\right],$$

$$\mathrm{Q}_\nu(x) = \frac{1}{2}\left[Q_\nu(x+i0)+Q_\nu(x-i0)\right], \quad -1<x<1;$$

$P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$ — функции Лежандра 1-го и 2-го рода соответственно.

В случае (13), когда выполняются неравенства $\zeta^2 \ll 2a^2$, $\mu^2\zeta^2 \ll 2a^2$ $\left(|z-z'| = |\zeta| \le 2b\right.$ в уравнениях (9), $\left.(11)\right)$, выражения (18) могут быть упрощены, если воспользоваться асимптотическими представлениями функций Лежандра $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$

вблизи особых точек $z = \pm 1$ [22]. С учетом соответствующих упрощений ядра исследуемых интегральных уравнений записываются приближенно таким образом:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_{\varphi,0}(\zeta) &\approx -\frac{i}{\pi k_0 a}\left[\ln\frac{|\zeta|}{2a} + C + \psi\left(\frac{3}{2}\right)\right] + F_{\varphi,0}(0),\\
\mathcal{K}_{\varphi,m}(\zeta) &\approx \frac{1}{\pi k_0 a}\left\{\left(\frac{m^2}{(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}} - i\right)\ln\frac{|\zeta|}{2a} + \right.\\
&+ \frac{m^2}{(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}\left[\ln\mu + C + \psi\left(m + \frac{1}{2}\right) - i\,\frac{\pi}{2}\right] -\\
&- \left. i\left[C + \psi\left(m - \frac{1}{2}\right)\right]\right\} + F_{\varphi,m}(0),\\
\mathcal{K}_{z,m}(\zeta) &\approx \frac{i}{\pi k_0^2 a\mu\zeta},
\end{aligned}
\tag{19}
$$

где $C = 0{,}577\ldots$ — постоянная Эйлера–Маскерони, $\psi(z) = \dfrac{d\ln\Gamma(z)}{dz}$ — логарифмическая производная Γ-функции; в (19) учетно, что $F_{z,m}(0) = 0$. В результате интегральные уравнения (9) и (11) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&-\int_{-b}^{b} I_0(z')\ln\frac{|z-z'|}{2a}\,dz' = \frac{ic\mathcal{E}^{\text{ст}}}{4\pi k_0 a} + S_0\int_{-b}^{b} I_0(z')\,dz',\\
&-\int_{-b}^{b} I_{m,c}(z')\ln\frac{|z-z'|}{2a}\,dz' = \frac{c\mathcal{E}^{\text{ст}}}{2\pi k_0 a}\,\frac{(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}{m^2 - i(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}\times\\
&\qquad\times\operatorname{sinc}\left(\frac{m\delta_0}{\pi}\right)\cos m\varphi_0 + S_m\int_{-b}^{b} I_{m,c}(z')\,dz',\\
&-\int_{-b}^{b} I_{m,s}(z')\ln\frac{|z-z'|}{2a}\,dz' = \frac{c\mathcal{E}^{\text{ст}}}{2\pi k_0 a}\,\frac{(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}{m^2 - i(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}\times
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$$\times \operatorname{sinc}\left(\frac{m\delta_0}{\pi}\right)\sin m\varphi_0 + S_m \int_{-b}^{b} I_{m,s}(z')\,dz', \qquad -b \le z \le b,$$

где

$$\begin{aligned} S_0 &= C + \psi\left(\frac{3}{2}\right) + i\pi k_0 a\, F_{\varphi,0}(0), \\ S_m &= \frac{1}{m^2 - i(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}\left\{m^2\left[\ln\mu + C + \psi\left(m+\frac{1}{2}\right) - i\,\frac{\pi}{2}\right] - \right. \\ &- \left. i(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}\left[C + \psi\left(m-\frac{1}{2}\right) + i\pi k_0 a\, F_{\varphi,m}(0)\right]\right\}, \end{aligned}$$

и

$$\int_{-b}^{b}\frac{I_{m,c}(z')}{z-z'}\,dz' = \int_{-b}^{b}\frac{I_{m,s}(z')}{z-z'}\,dz' = 0, \quad -b \le z \le b. \tag{21}$$

Можно показать, что решения уравнений с ядрами вида (19) являются главными членами асимптотик решений исходных интегральных уравнений (9) и (11) при больших значениях параметра $\Lambda = \min\{a/b,\, a/\mu b\}$ (ср. с [23]). Поэтому здесь мы ограничимся анализом лишь уравнений (20), (21). Нетрудно убедиться, что решения уравнений (20) с логарифмическим ядром автоматически удовлетворяют сингулярным уравнениям (21) с ядром Коши [23]. Это обстоятельство позволяет рассматривать далее только уравнения (20). Их решения имеют вид (см. [23, 24]):

$$I_0(z) = \frac{ic\mathcal{E}^{\text{ст}}}{4\pi^2 k_0 a\sqrt{b^2-z^2}}\,\frac{1}{\ln\left(\frac{4a}{b}\right) - S_0}, \tag{22}$$

$$I_{m,c}(z) = \frac{c\mathcal{E}^{\text{ст}}}{2\pi^2 k_0 a\sqrt{b^2-z^2}}\,\frac{(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}{m^2 - i(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}\,\frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{m\delta_0}{\pi}\right)\cos m\varphi_0}{\ln\left(\frac{4a}{b}\right) - S_m},$$

$$I_{m,s}(z) = \frac{c\mathcal{E}^{\text{ст}}}{2\pi^2 k_0 a\sqrt{b^2-z^2}}\,\frac{(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}{m^2 - i(k_0 a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}\,\frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{m\delta_0}{\pi}\right)\sin m\varphi_0}{\ln\left(\frac{4a}{b}\right) - S_m}.$$

Подставляя выражения (22) в (4) получаем следующую формулу для линейной плотности тока $I(\varphi, z)$:

$$I(\varphi,z) = \frac{ic\mathcal{E}^{\text{ст}}}{4\pi^2 k_0 a\sqrt{b^2-z^2}} \left\{ \frac{1}{\ln\left(\frac{4a}{b}\right) - S_0} - \right. \tag{23}$$

$$\left. - 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{i(k_0a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}}{m^2 - i(k_0a)^2\sqrt{\varepsilon\,|\eta|}} \frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{m\delta_0}{\pi}\right)}{\ln\left(\frac{4a}{b}\right) - S_m} \cos m(\varphi - \varphi_0) \right\}.$$

В отношении этой формулы следует заметить, что асимптотические представления функций Лежандра, использовавшиеся для получения выражений (19), становятся, строго говоря, неприменимыми при достаточно больших значениях m, когда $m > m^* \sim [\Lambda]$. Однако, как оказывается, в рассматриваемом здесь случае (14), члены ряда (4) с номерами $m > m^*$ не дают уже заметного вклада в полное значение величины $I(\varphi, z)$. Поэтому указанная неточность аппроксимации ядер интегральных уравнений не сказывается существенно на результатах расчета распределения тока в антенне. Это означает, что при практических вычислениях суммирование в (23) можно оборвать на номерах $m < m^*$.

Полный ток $I_\Sigma(\varphi)$ в сечении $\varphi = \text{const}$ равен, очевидно,

$$I_\Sigma(\varphi) = \int_{-b}^{b} I(\varphi, z)\,dz.$$

Результирующее выражение для $I_\Sigma(\varphi)$ может быть получено из (23) путем замены $\dfrac{1}{\sqrt{b^2-z^2}} \to \pi$. Таким образом, несмотря на расходимость линейной плотности тока $I(\varphi, z)$ при $|z| \to b$, величина $I_\Sigma(\varphi)$ для всех значений φ является конечной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Резюмируя, можно утверждать следующее. Применительно к резонансной области частот получено решение задачи о распределении тока в рамочной антенне, расположенной в холодной анизотропной плазме и представляющей собой узкую свернутую в кольцо идеально проводящую ленту. Построенное решение описывает распределения тока как вдоль, так и поперек ленты. Результаты представлены в виде, удобном для выполнения численных расчетов. Опираясь на полученные результаты, можно анализировать различные частные случаи, а также исследовать все основные характеристики антенны — импеданс, излучаемую мощность, диаграмму направленности излучения и т. д. Однако анализ этих конкретных задач далеко выходит за рамки данной работы.

Авторы признательны РФФИ за финансовую поддержку (грант N 96-02-18666). Работа одного из авторов (Кудрина А. В.) была также поддержана грантом INTAS 93-2492-ext в рамках исследовательской программы Международного центра фундаментальной физики в Москве.

Литература

1. Balmain K. G. The impedance of a short dipole antenna in a magnetoplasma // IEEE Trans. Ant. and Propagat. 1964. V. AP-12. N 5. P. 605–617.

2. Galejs J. On antenna impedances in a cold plasma with a perpendicular static magnetic field // IEEE Trans. Ant. and Propagat. 1968. V. AP-16. N 6. P. 728–736.

3. Lee S. W. Cylindrical antenna in uniaxial resonant plasmas // Radio Sci. 1969. V. 4. N 2. P. 179–189.

4. Чугунов Ю.В. К теории тонкой металлической антенны в анизотропных средах // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т.12. N 6. С.830–836.

5. Wang T. N. C., Bell T. F. Radiation resistance of a short dipole immersed in a cold magnetoionic medium // Radio Sci. 1969. V. 4. N 2. P. 167–177.

6. Wang T. N. C., Bell T. F. VLF/ELF input impedance of an arbitrarily oriented loop antenna in a gold collisionless multicomponent magnetoplasma // IEEE Trans. Ant. and Propagat. 1972. V. AP-20. N 3. P. 394–398.

7. Андронов А. А., Чугунов Ю. В. Квазистационарные электрические поля источников в разреженной плазме // УФН. 1975. Т. 116. Вып. 1. С. 79–113.

8. Беллюстин Н. С., Докучаев В. П. О генерации электромагнитных волн распределенными токами в анизотропной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1975. Т. 18. N 1. С. 17–26.

9. Докучаев В. П., Тамойкин В. В., Чугунов Ю. В. Излучение спиральных волн в магнитоактивной плазме распределенными источниками // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. N 8. С. 1121–1129.

10. Беллюстин Н. С. Об излучении волн свистового диапазона в плазме // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. N 1. С. 22–35.

11. Акиндинов В. В., Еремин С. М., Лишин И. В. Антенны низкой частоты в магнитоактивной плазме (обзор) // Радиотехника и электроника. 1985. Т. 30. Вып. 5. С. 833–850.

12. Ohnuki S., Sawaya K., Adachi S. Impedance of a large circular loop antenna in a magnetoplasma // IEEE Trans. Ant. and Propagat. 1986. V. AP-34. N 8. P. 1024–1029.

13. Еремин С. М. Функция Грина уравнений Максвелла в анизотропной плазме // Радиотехника и электроника. 1987. Т. 32. Вып. 5. С. 922–930.

14. Еремин С. М. Импеданс электрического вибратора в анизотропной плазме // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. Вып. 9. С. 1852–1861.

15. Мареев Е. А., Чугунов Ю. В. Антенны в плазме. — Нижний Новгород: ИПФ АН СССР, 1991. 231 с.

16. Арманд Н. А., Семенов Ю. П., Черток Г. Е. и др. Экспериментальное исследование в ионосфере Земли излучения рамочной антенны в диапазоне очень низких частот, установленной на орбитальном комплексе "Мир – Прогресс-28 – Союз ТМ-2" // Радиотехника и электроника. 1988. Т. 33. Вып. 11. С. 2225–2231.

17. Голубятников Г. Ю., Егоров С. В., Костров А. В. и др. Возбуждение электростатических и свистовых волн антенной магнитного типа // ЖЭТФ. 1988. Т. 94. Вып. 4. С. 124–135.

18. Заборонкова Т. М., Костров А. В., Кудрин А. В. и др. Структура электромагнитных полей рамочных излучателей в магнитоактивной плазме в свистовом диапазоне частот // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39. N 2. С. 192–202.

19. Kondrat'ev I. G., Kudrin A. V., Zaboronkova T. M. Radiation of whistler waves in magnetoactive plasma // Radio Sci. 1992. V. 27. N 2. P. 315–324.

20. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967. 684 с.

21. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983. С. 221–223.

22. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1973. С. 163–166.

23. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. — М.: Наука, 1974. С. 215–244.

24. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. — М.: Наука, 1977. С. 585–595.