Научно–исследовательский радиофизический институт
Министерства общего и профессионального образования
Российской Федерации

Препринт N 435

Геометрические методы в задачах о спектре многочастичных систем в магнитных полях с фиксированным псевдомоментом. II.

Г. М. Жислин

Нижний Новгород, 1997

Жислин Г. М.
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ О СПЕКТРЕ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ В МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ С ФИКСИРОВАННЫМ ПСЕВДОМОМЕНТОМ. II. // *Препринт N 435.* — Нижний Новгород: НИРФИ, 1997. 39 с.

УДК 517.43

Мы изучаем дискретный спектр многочастичных гамильтонианов H_0 нейтральных систем в однородном магнитном поле при фиксации псевдомомента. Установлена общая теорема, описывающая при некоторых условиях дискретный спектр оператора H_0 в терминах свойств дискретного спектра некоторых эффективных одномерных операторов, структура спектра которых известна. На этой основе получены условия конечности и бесконечности дискретного спектра и спектральные асимптотики оператора H_0. Показано, что результаты работы применимы, например, к гамильтониану атома гелия. Работа продолжает исследование, начатое в [12].

Поддержано Грантами РФФИ 96-01-00478 и ИНТАС 95-0414

Введение

В настоящей работе мы продолжаем начатое в [1] изучение спектра многочастичных гамильтонианов H_0 нейтральных систем в однородном магнитном поле после фиксации псевдомомента и отделения движения центра масс в направлении поля. Мы стартуем здесь с найденного в [1] вида оператора H_0 (см.(1.1)) и с установленной там теоремы о локализации существенного спектра. Главная цель данного исследования — добыть информацию о дискретном спектре оператора H_0, ибо дискретный спектр ранее был изучен только для системы типа атома водорода [1].

Как и в большинстве работ о дискретном спектре, мы рассматриваем здесь ситуацию, когда граница дискретного (и существенного) спектра оператора H_0 определяется только распадениями $Z_2 = \{C_1, C_2\}$ исходной системы[1)] на две устойчивые подсистемы, т.е. когда величина $inf H_{03}(Z_2)$ (см. (1.4)) есть точка дискретного спектра этого оператора. При выполнении этого условия в работе впервые получены достаточные условия конечности и бесконечности дискретного спектра (Теоремы 1.2, 1.3) и — в ситуации когда дискретный спектр бесконечен — спектральные асимптотики (Теорема 1.4).

Чтобы определить область применимости этих результатов,

[1)] Мы называем систему распавшейся на подсистемы C_1, C_2, если ее гамильтониан не содержит потенциалов взаимодействия между частицами из разных подсистем. В то же время разности координат $x_i - x_j$, $y_i - y_j$ $i \in C_1, j \in C_2$ могут входить в кинетическую часть гамильтониана.

нами предпринято изучение спектральных свойств операторов $H_{03}(Z_2)$. Показано, что если кластеры C_1, C_2 в Z_2 не нейтральны, то граница существенного спектра оператора $H_{03}(Z_2)$ есть $inf H_{03}(Z_3')$ для некоторого разбиения $Z_3' = \{C_1', C_2', C_3'\}$, получающегося из Z_2 дроблением какой-либо из подсистем C_1, C_2 (Теорема 1.5). Отсюда следует, что условие применимости Теорем 1.2-1.4 есть неравенство

$$inf H_{03}(Z_2) < inf H_{03}(Z_3'). \tag{0.1}$$

Для его проверки надо исследовать природу нижней точки спектра операторов $H_{03}(Z_2)$, $H_{03}(Z_3')$. К сожалению, нам удалось сделать это только для 3-х–частичных систем, включая атом гелия, для которых таким образом впервые найдены спектральные асимптотики (двухчастичные системы были изучены ранее в [1]).

В общем случае n–электронных атомов мы устанавливаем здесь только некоторое достаточное условие, обеспечивающее выполнение неравенства (0.1) (Теорема 1.6). С его помощью нам удалось доказать (0.1) пока только для $n = 1, 2$. Мы надеемся однако, что использование Теорем 1.5,1.6 позволит в дальнейшем установить справедливость условия типа (0.1) для произвольных атомов и тем самым доказать для них применимость наших общих результатов (Теоремы 1.2,1.4).

В заключение отметим, что главные результаты статьи — Теоремы 1.2,1.5,1.6 установлены на пути дальнейшего развития геометрических методов с применением более сложных, чем ранее типов разбиения конфигурационного пространства и что все утверждения работы учитывают перестановочную симметрию системы.

§ 1. Определения и основные результаты

1.1 Мы рассматриваем нейтральную квантовую систему $Z_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$ n частиц в однородном магнитном поле, направление которого принято за направление оси z. Пусть

$m_i, e_i, r_i = (x_i, y_i, z_i)$ — масса, заряд и радиус-вектор частицы с номером i, $M = \sum\limits_{j=1}^{n} m_j$, $Q = \sum\limits_{j=1}^{n} e_j = 0$. Относительные координаты j-ой частицы мы обозначаем через q_j:

$$q_j = (q_{j\perp}, q_{j3}) = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3}) = r_j - \sum_{t=1}^{n} m_t r_t \cdot M^{-1}.$$

Тогда оператор энергии системы Z_1 после отделения движения центра масс в направлении 3-ей оси и после сужения на подпространтво функций с фиксированными значениями ν_1, ν_2 компонент псевдомомента может быть записан в следующей форме [1]

$$H_0 = T_\perp^0 + T_3^0 + F + V(q), \tag{1.1}$$

где

$$T_\perp^0 = -\sum_{t=1}^{n} m_t \sum_{p=1}^{2} \left(\frac{1}{i}\nabla_{tp}^0 - \mathcal{D}_{tp}\right)^2, \quad T_3^0 = -\sum_{t=1}^{n} m_t (\nabla_{t3}^0)^2,$$

$$\nabla_{tp}^0 = \frac{1}{m_t}\frac{\partial}{\partial q_{tp}} - \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_{jp}}, \quad p = 1,2,3 \tag{1.2}$$

$$\mathcal{D}_{t1} = \nu_1\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{nm_t}\right) + B\sum_{j=1}^{n}(q_{j2} - q_{t2})\left(\frac{e_t - e_j}{nm_t} + \frac{2e_j}{M}\right),$$

$$\mathcal{D}_{t2} = \nu_2\left(\frac{1}{M} - \frac{1}{nm_t}\right) - B\sum_{j=1}^{n}(q_{j1} - q_{t1})\left(\frac{e_t - e_j}{nm_t} + \frac{2e_j}{M}\right),$$

$$F = (\nu_1 + \mathcal{E}_2)^2 + (\nu_2 - \mathcal{E}_1)^2, \;\; \mathcal{E}_j = 2B\sum_{t=1}^{n} q_{tj} e_t, \;\; V(q) = \sum_{s<t}^{1,n} V_{st}(|q_s - q_t|).$$

Относительно потенциалов $V_{st}(|q_1|)$ мы предполагаем, что

$$V_{st}(|q_1|) \in \mathcal{L}_{2,loc}(R^3), \;\; V_{st}(|q_1|) \in C^2 \quad \text{при } |q_1| \neq 0,$$

$$V_{st}(|q_1|) = e_s e_t |q_1|^{-\gamma} \quad \text{при } |q_1| > a,$$

где $\gamma > 0$, $a > 0$ — некоторые константы.

1.2 Пусть

$$R_0 = \{q | q = (q_1, \ldots, q_n), \quad q_i = r_i - \sum_{t=1}^{n} m_t r_t \cdot M^{-1} \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

R_0 — конфигурационное пространство относительного движения системы Z_1; очевидно при $q \in R_0$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j q_j = 0.$$

Оператор H_0 рассматривается в пространстве $\mathcal{L}_2(R_0)$. Расширим H_0 с области $\mathcal{D}(H_0) = C_0^2(R_0)$ до самосопряженного, сохраняя для полученного оператора и его области прежние обозначения H_0 и $\mathcal{D}(H_0)$. Пусть S — группа перестановок тождественных частиц системы Z_1 и α — произвольный тип неприводимого представления группы S,[2)] $P^{(\alpha)}$ — проектор в $\mathcal{L}_2(R_0)$ на подпространство функций, преобразующихся под действием операторов T_g: $T_g\psi(q) = \psi(g^{-1}q) \quad g \in S$ по представлению типа α, $H_0^{(\alpha)}$ — ограничение оператора H_0 на подпространство $B^{(\alpha)} = P^{(\alpha)}\mathcal{L}_2(R_0)$.

В настоящей работе изучается дискретный спектр оператора $H_0^{(\alpha)}$ с областью $\mathcal{D}(H_0^{(\alpha)}) = P^\alpha \mathcal{D}(H_0)$.

1.3 Пусть $Z_s = \{C_1, \ldots, C_s\}$ — произвольное разбиение системы Z_1 на s не пересекающихся не пустых кластеров C_t,

$$M[C_t] = \sum_{i \in C_t} m_i, \quad Q[C_t] = \sum_{i \in C_t} e_i,$$

$$R_{03}(Z_s) = \{q | q \in R_0, \quad \sum_{k \in C_t} m_k q_{k3} = 0 \quad t = 1, 2, \ldots, s\},$$

$$R_{c3}(Z_s) = \{q | q \in R_0, \quad q_j = (0, 0, q_{j3}) \; j = 1, \ldots, n,$$
$$(q, q')_1 = 0 \quad \forall q' \in R_{03}(Z_s)\},$$

где для любых $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $q' = (q'_1, \ldots, q'_n)$ из R_0

$$(q, q')_1 = \sum_{j=1}^{n} m_j (q_j, q'_j)_{R^3}. \tag{1.3}$$

[2)]для физической значимости результатов нужно брать только те α, которые разрешены для системы Z_1 принципом запрета Паули; в настоящей работе α может быть любым.

Очевидно,

$$R_0 = R_{03}(Z_s) \oplus R_{c3}(Z_s).$$

$R_{03}(Z_s)$ и $R_{c3}(Z_s)$ суть конфигурационное пространство относительного движения и пространство движения центров масс кластеров $C_1 \dots C_s$ в направлении от z.

Оператор энергии составной системы Z_s, состоящей из не взаимодействующих между собой кластеров C_t, после отделения движения центра масс каждого кластера в направлении оси z, может быть записан в виде

$$H_{03}(Z_s) = T_\perp^0 + T_3^0(Z_s) + F + V_{Z_s}(q), \tag{1.4}$$

где

$$T_3^0(Z_s) = -\sum_{t=1}^{s} \sum_{i \in C_t} \frac{1}{m_t} \left(\frac{\partial}{\partial q_{i3}(Z_s)} - \frac{m_i}{M[C_t]} \sum_{p \in C_t} \frac{\partial}{\partial q_{p3}} \right)^2,$$

$$V_{Z_s}(q) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{s} \sum_{i,j \in C_t,\ i \neq j} V_{ij}(|q_i - q_j|),$$

$$q_i - q_j = (q_{i1} - q_{j1}, q_{i2} - q_{j2}, q_{i3}(Z_s) - q_{j3}(Z_s)),$$

$$q_{i3}(Z_s) = q_{i3} - \frac{1}{M[C_t]} \sum_{k \in C_t} m_k q_{k3} \quad \text{при } i \in C_t.$$

Оператор $H_{03}(Z_s)$ будет рассматриваться в пространстве $\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_s))$.

1.4 Пусть $\hat{S} = \hat{S}(Z_s)$ — группа перестановочной симметрии системы Z_s, порожденная группами $S[C_t]$ $t = 1, 2, \dots s$ перестановок тождественных частиц в кластерах $C_1, \dots, C_s$ и перестановками между собой тождественных кластеров C_i из Z_s, если таковые имеются. Обозначим возможные типы неприводимых представлений группы $\hat{S}$ в $\mathcal{L}_2(R_0)$, $\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_s))$ и $\mathcal{L}_2(R_{c3}(Z_s))$ соответственно через $\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_0$ и $\hat{\alpha}_c$ [3], их матрицы — через $\mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha})}, \mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha}_0)}$ и

[3] когда мы говорим о представлении группы S или ее подгрупп в каком-либо подпространстве из $\mathcal{L}_2(R_0)$, мы всегда имеем в виду представление операторами T_g (см. §1.2).

$\mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha}_c)}$, их размерности через $|\hat{\alpha}|, |\hat{\alpha}_0|$ и $|\hat{\alpha}_c|$. Будем писать (следуя схеме [2]), что

$(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_c) \prec \alpha$, если хотя бы одна неприводимая компонента тензорного произведения представлений $\mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha}_0)} \otimes \mathcal{D}_g^{(\hat{\alpha}_c)}$ группы $\hat{S}(Z_s)$ содержится в неприводимом представлении типа α группы S после сужения его с S на $\hat{S}$,

$\hat{\alpha}_0 \prec \alpha$, если найдется такой тип $\hat{\alpha}_c$, что $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_c) \prec \alpha$.

Обозначим через $P^{(\hat{\alpha}_0)}(Z_s)$ проектор в $\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_s))$ на подпространство функций, преобразующихся по представлению типа $\hat{\alpha}_0$, и положим

$$H_{03}^{(\hat{\alpha}_0)}(Z_s) = H_{03}(Z_s)P^{(\hat{\alpha}_0)},$$

$$H_{03}(\alpha; Z_s) = \sum_{\hat{\alpha}_0 \prec \alpha} H_{03}^{(\hat{\alpha}_0)}(Z_s) = \sum_{\hat{\alpha}_0 \prec \alpha} H_0(Z_s)P^{(\hat{\alpha}_0)},$$

$$\mu^{(\alpha)} = \min_{Z_s,\ s \geq 2} inf H_{03}(\alpha; Z_s).$$

Если разбиение $Z_k' = \{C_1', \ldots, C_k'\}$ получено из Z_s дроблением хотя бы одного кластера из Z_s, то мы будем писать $Z_k' < Z_s$. Так как

$$inf H_{03}(\alpha; Z_s) \leq inf H_{03}(\alpha; Z_k') \quad \text{при } Z_k' < Z_s,$$

то

$$\mu^{(\alpha)} = \min_{Z_2} inf H_{03}(\alpha; Z_2). \tag{1.5}$$

Для произвольного оператора A мы обозначаем далее через $\sigma_{ess}(A)$, $\sigma_d(A)$, $\sigma_p(A)$ и $\sigma_{pp}(A)$ соответственно его существенный, дискретный, точечный и чисто точечный спектр.

1.5 Теорема 1.1 *Для любых* α

$$\sigma_{ess}(H_0^\alpha) = [\mu^\alpha; +\infty). \tag{1.6}$$

Доказательство теоремы 1.1 дано в [1]. Мы приводим ее здесь потому, что будем неоднократно к ней обращаться и т.к. хотим дать более простое (эквивалентное) определение соотношению

$\hat{\alpha}_0(Z_2) \prec \alpha$, используемому в определении оператора $H_{03}(\alpha; Z_2)$, и, значит, в выражении (1.5) для числа $\mu^{(\alpha)}$.

Пусть $\mathcal{N}^{\alpha}_{\hat{\alpha}}(Z_2)$ – кратность представления типа $\hat{\alpha}$ группы $\hat{S}(Z_2)$ в представлении типа α после сужения последнего с S на $\hat{S}(Z_2)$. Если кластеры C_1, C_2 не тождественны ($C_1 \not\sim C_2$), то группа $\hat{S}(Z_2)$ в $\mathcal{L}_2(R_{c3}(Z_2))$ имеет только тождественное представление, т.к. перестановки из $\hat{S}(Z_2)$ не меняют координаты векторов из $R_{c3}(Z_2)$. Поэтому в данном случае $\mathcal{D}^{\hat{\alpha}_0}_g \otimes \mathcal{D}^{\hat{\alpha}_c}_g = \mathcal{D}^{\hat{\alpha}_0}_g$ и соотношение $\hat{\alpha}_0(Z_2) \prec \alpha$ означает, что $\mathcal{N}^{\alpha}_{\hat{\alpha}_0} \geq 1$. Если кластеры C_1 и C_2 — тождественны ($C_1 \sim C_2$), то группа $\hat{S}(Z_2)$ имеет в $R_{c3}(Z_2)$ два одномерных неприводимых представления, типы которых мы обозначаем через $\hat{\alpha}^{\pm}_c$. В обоих представлениях перестановкам частиц внутри C_j $j = 1, 2$ отвечает число 1, а перестановке кластеров $C_1 \leftrightarrow C_2$ в представлении типа $\hat{\alpha}^+_c$ отвечает число 1, а в представлении типа α^-_c — число -1. Поэтому представление $\mathcal{D}^{\hat{\alpha}}_g := \hat{\mathcal{D}}^{\hat{\alpha}_0}_g \otimes \mathcal{D}^{\hat{\alpha}_c}_g$ при $\hat{\alpha}_c = \hat{\alpha}^{\pm}_c$ неприводимо; $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}_0$ при $\hat{\alpha}_c = \hat{\alpha}^+_c$; при $\hat{\alpha}_c = \hat{\alpha}^-_c$ мы обозначим его тип через $-\hat{\alpha}_0$. Соотношение $\hat{\alpha}_0 \prec \alpha$ в этом случае означает, что хотя бы одна из величин $\mathcal{N}^{\alpha}_{\hat{\alpha}_0}(Z_2)$, $\mathcal{N}^{\alpha}_{-\hat{\alpha}_0}(Z_2)$, не равна нулю. Положим

$$d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0) = \mathcal{N}^{\alpha}_{\hat{\alpha}_0}(Z_2) \quad \text{при } C_1 \not\sim C_2,$$

$$d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0) = \mathcal{N}^{\alpha}_{\hat{\alpha}_0}(Z_2) + \mathcal{N}^{\alpha}_{-\hat{\alpha}_0}(Z_2) \quad \text{при } C_1 \sim C_2.$$

Тогда условие $\hat{\alpha}_0 \prec \alpha$ эквивалентно условию $d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0) \geq 1$.

1.6 Пусть

$$O(\alpha) = \{Z_2 | inf H_{03}(\alpha; Z_2) = \mu^{(\alpha)}\},$$

$$O_d(\alpha) = \{Z_2 | Z_2 \in O(\alpha), \mu^{(\alpha)} \in \sigma_d(H_{03}(\alpha; Z_2))\}.$$

$O_d(\alpha)$ — это множество устойчивых двухкластерных систем Z_2, нижняя грань энергии которых является нижней гранью существенного спектра оператора $H^{(\alpha)}_0$. Мы будем изучать дискретный спектр оператора $H^{(\alpha)}_0$ в предположении, что

$$O(\alpha) = O_d(\alpha). \tag{1.7}$$

Разумеется, это условие выполняется не всегда, однако оно является обычным для работ по исследованию дискретного спектра (см. например, [2-4]). Кроме того отметим, что в отсутствие магнитного поля равенство (1.7) выполняется, в частности, для любых атомов и положительных ионов, а также для однократных отрицательных ионов [4]. При $Z_2 \in O_d(\alpha)$ обозначим через $W(\alpha; Z_2)$ собственное подпространство оператора $H_{03}(\alpha; Z_2)$, отвечающее его собственному значению $\mu^{(\alpha)}$.

Кроме выполнения равенства (1.7) мы предполагаем также, что

A_1) Все $Z_2' \in O(\alpha)$ могут быть получены из одного $Z_2 \in O(\alpha)$ перестановками тождественных частиц;

A_2) Представление группы $\hat{S}(Z_2)$ в $W(\alpha; Z_2)$ неприводимо, т.е. найдется такой тип $\hat{\alpha}_0$, что

$$P^{(\hat{\alpha}_0)}W(\alpha; Z_2) = W(\alpha; Z_2) \quad \text{и } dim W(\alpha; Z_2) = |\hat{\alpha}_0|.$$

Условия A_1), A_2) носят чисто технический характер и служат для упрощения формулировок и доказательств. Мы будем указывать, какие изменения в формулировках необходимо сделать, если A_1) или A_2) не выполняется.

1.7 Условие (1.7) подсказывает, что вклад распадения $Z_2 = \{C_1, C_2\}$ в дискретный спектр оператора $H_0^{(\alpha)}$ должен зависеть от взаимодействия между кластерами C_1, C_2 из Z_2, когда система Z_2 находится в основном состоянии. Оценивая это взаимодействие сверху и снизу для больших значений $|\zeta_3| = \left| \sum\limits_{j \in C_1} \frac{m_j q_{j3}}{M[C_1]} - \sum\limits_{i \in C_2} \frac{m_i q_{i3}}{M[C_2]} \right|$ можно получить одномерные эффективные потенциалы

$$\begin{array}{ll} V_{Z_2}^{\pm}(\zeta_3) = Q(Z_2)|\zeta_3|^{-\gamma} \pm c_0|\zeta_3|^{-\gamma_0}, & \text{если } |\zeta_3| \geq b_0, \\ V_{Z_2}^{+}(\zeta_3) = Q(Z_2)b_0^{-\gamma}, \quad V_{Z_2}^{-}(\zeta_3) \equiv 0, & \text{если } |\zeta_3| < b_0. \end{array} \tag{1.8}$$

и ввести далее эффективные одномерные операторы в $\mathcal{L}_2(R^1)$:

$$h_{Z_2}^{\pm} = -M(Z_2)^{-1}\frac{d^2}{d\zeta_3^2} + V_{Z_2}^{\pm}(\zeta_3), \tag{1.9}$$

где b_0 и c_0 — некоторые константы, $M(Z_2)^{-1} = M[C_1]^{-1}+M[C_2]^{-1}$, $Q(Z_2) = Q[C_1]\cdot Q[C_2]$, $\gamma_0 = min(\gamma + d, 3)$ и

$d = 2$, если выполнено условие A_2) или более общее условие

A_3) все функции из $W(\alpha; Z_2)$, отвечающие одному и тому же типу перестановочной симметрии, имеют одну и ту же четность относительно инверсии $q_{i3} \to -q_{i3}$ [4)]

$d = 1$ — в остальных случаях.

Для $\lambda < 0$ обозначим через $N(\lambda; h^{\pm}_{Z_2})$ и $N(\mu^{(\alpha)} + \lambda, H^{(\alpha)}_0)$ размерности линейных оболочек собственных векторов операторов $h^{\pm}_{Z_2}$ и $H^{(\alpha)}_0$, отвечающих собственным значениям этих операторов, не превосходящим соответственно λ и $\mu^{(\alpha)} + \lambda$,

1.8 Основной результат этой работы — Теорема 1.2.

Теорема 1.2 *Пусть (1.7) верно и* $Q(Z_2) < 0 \quad \forall Z_2 \in O(\alpha)$. *Тогда для любого типа* α *неприводимого представления группы* S, *всех* $\lambda < 0$ *и некоторой константы* c^o

$$-c^o + d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0)N(\lambda; h^{+}_{Z_2}) \leq N(\mu^{(\alpha)} + \lambda; H^{(\alpha)}_0) \leq c^o+$$

$$+d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0)N(\lambda; h^{-}_{Z_2}). \tag{1.10}$$

Замечания.

1. Эффективные операторы $h^{\pm}_{Z_2}$ не зависят явно от фиксированного значения псевдомомента $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, однако от ν может зависеть константа c^0 в (1.10). Кроме того – и это наиболее важно – от ν может зависеть граница существенного спектра – число μ^α и класс $O(\alpha)$, а следовательно – и эффективный потенциал. Однако сейчас мы не готовы привести какие-либо примеры.

2. Если $Q(Z_2) = 0$, то доказательство Теоремы 1.2 остается в силе, однако для получения содержательных результатов надо

[4)] условие A_2) является достаточным для справедливости A_3), ибо если бы A_3) не выполнялось для какого-то типа $\hat{\alpha}'_0$ неприводимого представления группы $\hat{S}(Z_2)$ в $W(\alpha; Z_2)$, то тогда подпространство $W(\alpha; Z_2)$ содержало бы не менее двух базисов представления типа $\hat{\alpha}'_0$, один из которых — четный, а другой — не четный по отношению к инверсии $q_{j3} \to -q_{j3}$, что противоречило бы требованию $dim W(\alpha, Z_2) = |\hat{\alpha}'_0|$, содержащемуся в A_2).

иметь более точные выражения для эффективных потенциалов $V^{\pm}_{Z_2}(\zeta_3)$. Мы не находим их, чтобы не усложнять изложение, но главным образом потому, что при $Q(Z_2) \equiv Q[C_1] \cdot Q[C_2] = 0$ выполняется $Q[C_1] = -Q[C_2] = 0$, а в этой ситуации мы не имеем подходов к проверке условия (1.7) (см. Теорему 1.5) и не можем указать ни одного примера, где оно выполняется.

3. При нарушении условия A_1) мы разбиваем множество $O(\alpha)$ на непересекающиеся классы $\mathcal{K}_i$ так, чтобы все Z'_2 из класса $\mathcal{K}_i$ получались бы из некоторого $Z_{2i} \in \mathcal{K}_i$ перестановками тождественных частиц и чтобы ни одно $Z_2 \in \mathcal{K}_j$ при $j \neq i$ не обладало бы этим свойством. Тогда вместо (1.10) будет справедливо соотношение

$$-c^o + \sum_i d_{Z_{2i}}(\alpha; \hat{\alpha}_{0i}) N(\lambda; h^+_{Z_{2i}}) \leq N(\mu^{(\alpha)} + \lambda, H_0^{(\alpha)}) \leq c^o +$$

$$+ \sum_i d_{Z_{2i}}(\alpha, \hat{\alpha}_{0i}) N(\lambda; h^-_{Z_{2i}}),$$

где $\hat{\alpha}_{0i}$ определяется для разбиения Z_{2i} также, как $\hat{\alpha}_0$ для Z_2. При этом мы предполагаем, что для каждого Z_{2i} условие A_2) выполняется, если там положить $Z_2 = Z_{2i}$, $\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_{0i}$.

4. Если условие A_2) не выполнено для разбиения Z_2 или для какого-то разбиения Z_{2i} (см. замечание 3), то в неравенствах (1.10), (1.11) вместо коэффициентов $d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0)$ и $d_{Z_{2i}}(\alpha, \hat{\alpha}_{0i})$ надо взять соответственно

$$d_{Z_2}(\alpha) = \sum_{s=1}^{s_0} k_0^{(s)} d_{z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_0^{(s)}) \quad \text{и} \quad d_{Z_{2i}}(\alpha) = \sum_{t=1}^{t_i} k_i^{(t)} d_{Z_2}(\alpha, \hat{\alpha}_{0i}^{(t)}),$$

где $\hat{\alpha}_0^{(s)}$ и $\hat{\alpha}_{0i}^{(t)}$ — все типы неприводимых представлений групп $\hat{S}(Z_2)$ и $\hat{S}(Z_{2i})$, для которых соответственно

$$P^{(\hat{\alpha}_0^{(s)})} W(\alpha; Z_2) \neq 0 \quad s = 1, \ldots, s_0,$$

$$P^{\hat{\alpha}_{0i}^{(t)})} W(\alpha; Z_{2i}) \neq 0 \quad t = 1, 2, \ldots, t_i,$$

$k_0^{(s)}$ и $k_i^{(t)}$ – кратности представлений типов $\hat{\alpha}_0^{(s)}$ и $\alpha_{0i}^{(t)}$ в $W(\alpha; Z_2)$ и $W(\alpha; Z_{2i})$. При этом в зависимости от выполнения (или не выполнения) условия A_3) (§1.7) показатель γ_0 во втором слагаемом эффективного потенциала (1.8) равен $min(\gamma+2,3)$ или $min(\gamma+1,3)$.

5. Эффективные операторы $h^{\pm}_{Z_2}$ и формулировка Теоремы 1.2 практически совпадают с эффективными операторами и теоремой 1 из [3], однако это совпадение чисто внешнее. В [3] исследуются ограничения операторов многочастичных систем на подпространства функций фиксированного веса m $SO(2)$ симметрии, в то время как здесь изучаются ограничения на подпространство состояний с фиксированным значением псевдомомента. А главное — результаты [3] вообще не применимы к нейтральным системам, ибо для таких систем использование $SO(2)$ симметрии не позволяет найти границу существенного спектра (нет ХВЖ–теоремы).

1.9 Используя Теорему 1.2 и известные спектральные свойства операторов $h^{\pm}_{Z_2}$ [5,6], можно установить спектральные свойства оператора $H_0^{(\alpha)}$. Считаем далее, что α – произвольно, (1.7) выполняется и $Q(Z_2) < 0$ для $\forall Z_2 \in O(\alpha)$.

Теорема 1.3 *Дискретный спектр оператора* $H_0^{(\alpha)}$
конечен, если $\gamma > 2$ *или если* $\gamma = 2$ *и* $Q(Z_2) \geq -4^{-1}M(Z_2)^{-1}$
бесконечен, если $\gamma = 2$ *и* $Q(Z_2) < -4^{-1}M(Z_2)^{-1}$ *или если* $\gamma < 2$ *и* $Q(Z_2) < 0$

Теорема 1.4

1. При $\lambda \to -0$, $\gamma < 2$ *и* $Q(Z_2) < 0$

$$N(\mu^{(\alpha)} + \lambda; H_0^{(\alpha)}) = |\lambda|^{(\gamma-2)/2\lambda} d(\alpha, \hat{\alpha}_0) M(Z_2)^{1/2} |Q(Z_2)|^{1/\gamma} J(\gamma) + \mathcal{R},$$

где $J(\gamma) = \gamma^{-1} \int\limits_1^{\infty} (u-1)^{1/2} u^{-(\gamma+1)/\gamma} du$, $\mathcal{R} = O(|ln|\lambda||)$.

2. При $\lambda \to -0$, $\gamma = 2$ *и* $Q(Z_2) < -4^{-1}M(Z_2)^{-1}$

$$N(\mu^{(\alpha)} + \lambda; H_0^{(\alpha)}) = \frac{1}{2\pi} |ln|\lambda|| d(\alpha, \hat{\alpha}_0) (4|Q(Z_2)|M(Z_2) - 1)^{1/2} +$$

$$+ o(|ln|\lambda||).$$

Замечания.

1. Теоремы 1.3, 1.4 сформулированы для простоты в предположениях A_1), A_2). Для получения формулировок в общем случае надо использовать замечания 3,4 к Теореме 1.2. и учесть, что если нарушено условие A_2) и хотя бы для одного Z_{2i} не выполняется A_3), то при $\gamma < 1$ $\quad \mathcal{R} = O(|\lambda|^{(\gamma-1)/2\gamma})$.

2. При $\gamma = 1$ (кулоновские потенциалы) $J(\gamma) = J(1) = \pi/2$.

1.10 Попробуем применить полученные результаты к гамильтониану атома гелия с фиксированным псевдомоментом. Пусть $Z_1 = (1,2,3)$, где 1 – номер ядра, 2 и 3 – номера электронов, $e_2 = e_3 = -e_1/2$, $m_2 = m_3$, $V_{ij}(r_{ij}) = e_i e_j |r_{ij}|^{-1}$. Возможные типы симметрии α системы Z_1 отвечают симметричному (тождественному) и антисимметричному представлению группы перестановок 2-х электронов. Для обоих типов α

$$O(\alpha) = \{Z_2(2), Z_2(3)\}, \quad \text{где } Z_2(j) = \{C_{1j}, C_{2j}\},$$

$$C_{1j} = Z_1 \backslash (j),\ C_{2j} = (j), \quad j = 2,3$$

Очевидно, $Q(Z_2(j)) < 0$. Т.к. оператор $H_{03}(Z_2(j))$ не обладает перестановочной симметрией, то $H_{03}(\alpha; Z_2(j)) = H_{03}(Z_2(j))$. В §§ 1.14-1.15 будет показано, что $\sigma_d(H_{03}(Z_2(j))) \neq \emptyset$ и, значит, (1.7) выполняется. Используя Теоремы 1.2, 1.4 и замечание 4 к Теореме 1.2, мы получаем

$$N(\mu^\alpha + \lambda; H_0^\alpha) = |\lambda|^{-1/2} \left(\frac{m_2(m_1 + m_2)}{M} \right)^{1/2} d(\alpha) \cdot \frac{\pi}{2} + O(|ln|\lambda||),$$

где $d(\alpha) = dim W(\alpha; Z_2(j))$. Мы ожидаем, что $d(\alpha) = 1$, но пока это не доказано.

1.11 Применимость Теорем 1.2-1.4 к конкретным системам зависит от справедливости для них соотношения (1.7). Мы уверены, что проверка (1.7) должна быть основана на знании положения $\sigma_{ess}(H_{03}(\alpha; Z_2))$ для $Z_2 \in O(\alpha)$. Поэтому далее мы устанавливаем Теорему 1.5 о локализации $\sigma_{ess}(H_{03}(\alpha; Z_2))$ и на ее основе для систем типа атомов даем простое достаточное условие непустоты $\sigma_d(H_{03}(\alpha; Z_2))$ – Теорему 1.6. Использование Теорем 1.5, 1.6 позволяет доказать соотношение (1.7) для 3-х частичных систем типа атома гелия. Мы надеемся в будущем установить с их помощью справедливость (1.7) для произвольных атомов. Пусть

$$\mu(\alpha; Z_2) = \min_{Z_s' < Z_2} inf H_{03}(\alpha; Z_s'). \tag{1.12}$$

Теорема 1.5 *Пусть* $Q(Z_2) < 0$. *Тогда*

$$\sigma_{ess}(H_{03}(\alpha; Z_2)) = [\mu(\alpha; Z_2), +\infty). \tag{1.13}$$

Замечание. Так как каждое разбиение системы Z_1 и на s подсистем при $s > 3$ одновременно является и разбиением на 3 подсистемы, то в (1.12) мы можем брать только $Z_s' = Z_3'$.

1.12 Чтобы понять смысл Теоремы 1.5 сравним ситуации с магнитным полем и без него. Будем обозначать через $\hat{\mathcal{H}}_0(Z_s')$ оператор энергии составной системы $Z_s' = \{C_1', \ldots, C_s'\}$ в отсутствие магнитного поля после отделения движения центров масс кластеров $C_1' \ldots C_s'$ в R^3. Тогда в ситуации без магнитного поля именно оператор $\hat{\mathcal{H}}_0(Z_2)$ соответствует оператору $H_{03}(Z_2)$. Согласно [7] (см. также [8])

$$inf\{\lambda | \lambda \in \sigma_{ess}(H_{03}(Z_2))\} = \inf_{\{\psi_p\}} \underline{\lim}(\hat{\mathcal{H}}_0(Z_2)\psi_p, \psi_p), \tag{1.14}$$

где $\{\psi_p\}$ — последовательности Вейля, отвечающие всем возможным распадениям системы $Z_2' = \{C_1', C_2'\}$ исходной системы $Z_2 = \{C_1, C_2\}$. Если ψ_p описывает распадение $Z_2' = Z_2$, т.е. уход частиц кластера $C_1\{C_2\}$ от кластера $C_2\{C_1\}$, то "уходящая на бесконечность" подсистема C_j обязана распадаться, ибо положение ее центра масс фиксировано. Если ψ_p описывает распадение $Z_2' = \{C_1', C_2'\} \neq Z_2$, то т.к. взаимодействие между кластерами C_1 и C_2 отсутствует, Z_2' отвечает распадению на кластеры $C_1' \bigcap C_1$,

$C_1' \bigcap C_2, C_2' \bigcap C_1, C_2' \bigcap C_2$, из которых не менее 3-ех не пустые. Таким образом, в отсутствие магнитного поля любая последовательность Вейля ψ_p для оператора $\hat{\mathcal{H}}_0(Z_2)$ описывает какое-то распадение Z_s' $s \geq 3$ и, значит,

$$\inf\{\lambda|\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{H}_0(Z_2))\} \geq \min_{Z_s' < Z_2} inf \hat{\mathcal{H}}_0(Z_s'). \qquad (1.15)$$

Рассмотрим теперь ситуацию с магнитным полем. Аналогично (1.14) (см. [7,8])

$$\inf\{\lambda|\lambda \in \sigma_{ess}(H_{03}(Z_2))\} = \inf_{\{\psi_p\}} \underline{\lim}(H_{03}(Z_2)\psi_p, \psi_p), \qquad (1.16)$$

где $\{\psi_p\}$ — последовательности Вейля для оператора $H_{03}(Z_2)$. Движение центра масс каждого кластера $C_j \in Z_2$ отделено лишь в направлении от z. Поэтому рассуждения, приведенные ранее в §1.12 в отсутствие магнитного поля применимы только к последовательностям Вейля, описывающим или распадения $Z_2' \neq Z_2$, или $Z_2' = Z_2$ – но в направлении оси z. Другими словами, если ψ_p отвечает распадению $Z_2' = \{C_1', C_2'\} \neq Z_2$ или распадению $Z_2' = Z_2$ за счет увеличения расстояний между частицами кластеров C_1, C_2 в направлении оси z, то аналогично предыдущему можно заключить, что ψ_p описывает какое-то распадение $Z_s' < Z_2$ $s \geq 3$. Однако, если ψ_p описывает распадение $Z_2' = Z_2$ за счет увеличения расстояний между кластерами C_1, C_2 в плоскости x, y, то сделать такой вывод априори нельзя. Другими словами, априори мы не можем исключить, что существенный спектр оператора $H_{03}(Z_2)$ возникает за счет бесконечного увеличения расстояний между кластерами C_1, C_2 в плоскости x, y. Так вот, Теорема 1.5 показывает, что в случае $Q(Z_2) < 0$ такая ситуация невозможна (вследствии фиксации псевдомомента), т.е. что при $Q(Z_2) < 0$ граница существенного спектра оператора $H_0(\alpha; Z_2)$ определяется распадением не менее чем одного кластера $C_i \in Z_2$ (а не движением нераспавшихся кластеров C_1, C_2 в плоскости x, y). Доказательство Теоремы 1.5 дано в §§ 3.1–3.8.

1.13 Для систем типа атомов с помощью Теоремы 1.5 можно получить простое достаточное условие того, что при $Z_2 \in O(\alpha)$

$\mu^{(\alpha)} \in \sigma_d(H_{03}(\alpha, Z_2))$. Пусть, далее, система $Z_1 = (1, \dots, n)$ состоит из $(n-1)$ тождественных частиц с номерами $2, 3, \dots, n$ и зарядами $e_i = e \quad i = 2, \dots, n$, и частицы с номером 1 и зарядом $e_1 = -(n-1)e, \quad n \geq 2$. Пусть потенциалы взаимодействия

$$V_{ij}(|r_1|) = e_i e_j \cdot |r_1|^{-\gamma} \quad 0 < \gamma < 1,5.$$

Как показано в [9] без учета симметрии (с учетом симметрии это следует из [1]) множество $O(\alpha)$ содержит все двухкластерные распадения $Z_2(j) = \{C_{1j}, C_{2j}\}$, где $C_{1j} = Z_1 \backslash (j), \quad C_{2j} = j$ $j = 2, 3, \dots, n$ и, значит, $\mu^{(\alpha)} = inf H_{03}(\alpha; Z_2(2))$. Из Теоремы 1.5 следует, что

$$\mu(\alpha; Z_2) = inf H_{03}(\alpha; Z_3(2,3)),$$

где $Z_3(2,3) = \{Z_1 \backslash (2,3); (2); (3)\}$

Теорема 1.6 *Пусть*

$$\mu(\alpha; Z_2) \in \sigma_p(H_{03}(\alpha; Z_3(2,3))). \tag{1.17}$$

Тогда

$$\mu^{(\alpha)} \in \sigma_d(H_{03}(\alpha; Z_2(2)). \tag{1.18}$$

Замечание. Так как операторы $H_{03}(\alpha; Z_2(i)) \quad i = 2, 3, \dots, n$ и $H_{03}(\alpha; Z_3(i,j)) \quad j \neq i, \quad i, j = 2, 3, \dots, n$ унитарно эквивалентны соответственно $H_{03}(\alpha; Z_2(2))$ и $H_{03}(\alpha, Z_3(2,3))$, то в формулировке Теоремы 1.6 можно вместо $Z_2(2)$ и $Z_3(2,3)$ взять $Z_2(i)$ и $Z_3(i,j)$ при любых $i, j \geq 2, \quad j \neq i$.

1.14 Доказательство Теоремы 1.6 проводится в конце §3, а здесь мы покажем, что для 3-ех–частичной системы $Z_1 = \{1, 2, 3\}$ типа атома гелия условие (1.17) выполнено. В рассматриваемом случае $Z_2(2) = \{(1,3), (2)\}, \quad Z_3 = Z_3(2,3) = \{(1), (2), (3)\}$ и оператор $H_{03}(Z_3)$ есть оператор энергии 3-ех не взаимодействующих друг с другом частиц с отделенным движением каждой частицы в направлении оси z и с фиксированным псевдомоментом (ПМ). Другими словами, $H_{03}(Z_3)$ — это оператор, полученный из оператора

$$\mathcal{H}_{03}(Z_3) = \sum_{j=1}^{3} m_j^{-1} \left(\frac{1}{i} \nabla_{j\perp} - e_j A_j \right)^2$$

после фиксации ПМ. Оператор $\mathcal{H}_{03}(Z_3)$ имеет чисто точечный спектр, накопляющийся к $+\infty$. Но каждая точка спектра оператора с фиксированным ПМ есть точка спектра оператора энергии этой же системы до фиксации ПМ. Поэтому оператор $H_{03}(Z_3)$ как и $\mathcal{H}_{03}(Z_3)$ имеет чисто точечный спектр. Таким образом (1.17) выполнено; значит, для 3-ех–частичных систем типа атома гелия выполняется (1.18), а следовательно и условие (1.7), т.е. Теоремы 1.2, 1.4 применимы к $Z_1 = \{1,2,3\}$.

1.15 К сожалению, уже для 4-ех–частичной системы подход §1.14 не дает результата. Действительно, пусть $Z_1 = \{1,2,3,4\}$ – атом лития, 1 – номер ядра, $Z_2(j) = \{(Z_1\backslash(j),(j)\}$ $j = 2,3,4$, $Z_3(i,j) = \{Z_1\backslash(i,j),(i),(j)\}$, $i \neq j$. Ясно, что $\mu^{(\alpha)} = inf H_{03}(Z_2(3))$ и $\mu(\alpha; Z_2(3)) = inf H_{03}(\alpha; Z_3(3,4))$. Для простоты рассуждений отвлечемся от перестановочной симметрии. Ясно, что $\mu(Z_2(3)) := inf \lambda, \lambda \in \sigma_{ess}(H_{03}(Z_2(3)))$ есть нижняя грань спектра четырехчастичного оператора $H_{03}(Z_3(3,4))$ с фиксированным псевдомоментом, у которого сохранено взаимодействие лишь между 1-ой и 2-ой частицей. Нам надо доказать, что $\mu(Z_2(3)) \in \sigma_p(H_{03}(Z_2(3,4))$. В случае атома гелия для доказательства аналогичного утверждения мы привлекаем к рассмотрению соответствующий оператор энергии до фиксации псевдомомента. Попробуем сделать это и сейчас. Пусть $\mathcal{H}_{03}(Z_3(3,4))$ — это оператор, из которого после фиксации ПМ получается $H_{03}(Z_3(3,4))$. Тогда обычное разделение переменных показывает, что $inf\mathcal{H}_{03}(Z_3(3,4)) \in \sigma_p(\mathcal{H}_{03}(Z_3(3,4))$ в том и только в том случае, если $\lambda[C] := inf\mathcal{H}_{03}[C]$, $C = \{1,2\}$ есть собственное значение этого оператора. Однако справедливость включения $\lambda[C] \in \sigma_p(\mathcal{H}_{03}[C])$ нам неизвестна. Отметим лишь, что для ограничения $\mathcal{H}_{03}[C, \sum_{m_0}]$ оператора $\mathcal{H}_{03}[C]$ на подпространство функций всех типов m, $m \geq m_0$, неприводимых представлений группы $SO(2)$ утверждение

$$\lambda[C, \sum_{m_0}] := inf\mathcal{H}_{03}[C; \sum_{m_0}] \in \sigma_p(\mathcal{H}_{03}[C])$$

может быть доказано с помощью методики [3]. Однако отсюда автоматически не следует, что

$$\lambda[C] = inf \mathcal{H}_{03}[C] = \lim_{m_0 \to -\infty} \lambda[C; \sum_{m_0}] \in \sigma_p(\mathcal{H}_{03}[C]), \tag{1.19}$$

так что вопрос о применимости Теоремы 1.6 остается открытым.

§ 2. Доказательство теоремы 1.2.

2.1 Основная идея доказательства состоит в построении таких подпространств функций $\mathcal{M}_i(\lambda)$ $i = 1, 2$, что для всех $\lambda < 0$

$$(H_0^\alpha \psi, \psi) \leq (\mu^{(\alpha)} + \lambda)\|\psi\|^2 \quad \text{если } \psi \in \mathcal{M}_1(\lambda), \tag{2.1}$$

$$(H_0^\alpha \psi, \psi) > (\mu^{(\alpha)} + \lambda)\|\psi\|^2 \quad \text{если } \psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda), \tag{2.2}$$

и в последующей оценке размерности этих подпространств через величины $N(\lambda; h^{\pm}_{Z_2})$. Построение пространства $\mathcal{M}_1(\lambda)$, оценка его размерности и доказательство неравенства (2.1) делаются так же, как в [3]. Поэтому мы приводим здесь только определение $\mathcal{M}_1(\lambda)$. Построение пространства $\mathcal{M}_2(\lambda)$, оценка величины $dim \mathcal{M}_2(\lambda)$ и доказательство неравенства (2.2), осуществляются с помощью одновременного применения подходов из [2] и из [3]. При этом хотя $\mathcal{M}_2(\lambda)$ строится как и в [3] на основе линейной оболочки произведений собственных функций одномерного эффективного оператора (отвечающих его собственным значениям, не превосходящим λ) и собственных функций основного состояния системы Z_2, определяющей границу сплошного спектра, но в отличие от [3] носители этих функций "срезаются" конусами относительного движения распавшейся системы не в направлении 3-ей оси, а во всем пространстве, и лишь потом из этих конусов выделяются области, отвечающие распадениям только в направлении 3-ей оси. Таким образом, мы проводим здесь двойное разбиение конфигурационного пространства R_0. Отметим, что разбиение пространства R_0 только в направлении оси z может привести к цели лишь в случае $Q[C_1]Q[C_2] > 0$ [3], который для нейтральных систем невозможен.

2.2 Приступаем к построению пространства $\mathcal{M}_2(\lambda)$ с требуемыми свойствами. Так как оператор $H_0^{(\alpha)}$ зависит только от относительных координат q, то мы можем начать так же, как в [4], где магнитное поле отсутствует. А именно, по произвольному $\mathcal{E}ilon > 0$ строим такое конечномерное пространство $\mathcal{M}_2^0$, что при $\psi(q) \in \mathcal{D}(H_0^{(\alpha)})$, $\psi \perp \mathcal{M}_2^0$, выполняется неравенство

$$(H_0^{(\alpha)}\psi, \psi) \geq \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \{(H_0^{(\alpha)}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) - \mathcal{E}\|\psi_{Z_2}|\zeta_{Z_2}|^{-(\gamma+2)/2}\|^2 -$$

$$-C(\mathcal{E})\|\psi_{Z_2}\chi(t_{Z_2})|\zeta_{Z_2}|^{-1}\|^2\} + \mu^{(\alpha)}(\|\psi\|^2 - \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \|\psi_{Z_2}\|^2), \quad (2.3)$$

где

$$\psi_{Z_2} = \psi u_{Z_2}\omega_b, \quad u_{Z_2} = u(t_{Z_2}), \quad \omega_b = \omega_b(|\zeta_{Z_2}|),$$

$$t_{Z_2} = |P_0(Z_2)q|_1 \cdot |P_c(Z_2)q|_1^{-1},$$

$P_0(Z_2)$ и $P_c(Z_2)$ — проекторы в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_1$, (см. (1.3)) соответственно на подпространства

$$R_0(Z_2) = \{q^0(Z_2)\} = \{q|q \in R_0, \ \sum_{j\in C_t} m_j q_j = 0 \ \ t = 1,2\},$$

$$R_c(Z_2) = \{q^c(Z_2)\} = \{q|q \in R_0, \ \ (q, q^0)_1 = 0 \quad \text{для } \forall q^0 \in R_0(Z_2)\},$$

$$|P_0(Z_2)q|_1^2 = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2} \frac{1}{M[C_t]} \sum_{i,j\in C_t} m_i m_j |q_i - q_j|^2,$$

$$|P_c(Z_2)q|_1^2 = (q,q) - |P_0(Z_2)q|_1^2 = M(Z_2)|\zeta_{Z_2}|^2$$

(см. [10], стр. 125),

$$q_i - q_j = q_i^0(Z_2) - q_j^0(Z_2), \quad q_j^0(Z_2) = q_j - \zeta_{Z_2}[C_t] \ \ j \in C_t,$$

$$\zeta_{Z_2} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = (\zeta_\perp, \zeta_3) = \zeta[C_1] - \zeta[C_2],$$

$$\zeta[C_1] = M[C_t]^{-1} \sum_{j\in C_t} m_j q_j \ \ t = 1,2;$$

$u(s), \omega_b(s) \in C^2[0,+\infty)$, $u(s) \equiv 1$ при $0 \le s \le \delta$, $u(s) \equiv 0$ при $s \ge \beta > \delta, \omega_b(s) \equiv 0$ при $0 \le s \le b < b_1$, $\omega_b(s) = 1$ при $s \ge b_1, \chi(q) \equiv 1$ при $q \in \Omega = \{q | t_{Z_2} \in [\delta, \beta], \; |\zeta_{Z_2}| \ge b\}$, $\chi(q) \equiv 0$ при $q \bar{\in} \Omega$.

В §§ 2.3–2.8 мы оцениваем снизу правую часть неравенства (2.3). Используя полученную оценку, в §2.9 определяем подпространство $\tilde{\mathcal{M}}_2(\lambda)$ так, что пространство $\mathcal{M}_2(\lambda) := \mathcal{M}_2^0 \oplus \tilde{\mathcal{M}}_2(\lambda)$ будет обладать требуемыми свойствами.

2.3 Обозначим через $\varphi_i(q_{Z_2})$ $i = 1, 2, \dots, i_0$ ортонормированные собственные функции, образующие канонический базис представления типа $\hat{\alpha}_0$ (см. §1.7) в собственном подпространстве $W(\alpha; Z_2)$ оператора $H_{03}(\alpha; Z_2)$, отвечающем собственному значению μ^α; здесь $i_0 = dim W(\alpha; Z_2)$, $q_{Z_2} = \{q_1(Z_2), \dots, q_n(Z_2)\} \in R_{03}(Z_2)$, $q_i(Z_2) = \{q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}^0(Z_2)\}$. В дальнейших оценках мы неоднократно будем использовать два следующих свойства функций $\varphi_i(q_{Z_2})$:

$$\varphi(q_{Z_2})|q_{Z_2}|^k \in \mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2) \quad k = 1, 2 \tag{2.4}$$

и

$$(L\varphi_i, \varphi_j)_{\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2))} = 0 \quad i \ne j \tag{2.5}$$

для любой функции $L = L(q_{Z_2}, \zeta_{Z_2})$ инвариантной относительно перестановок группы $\hat{S}(Z_2)$ и такой, что $L\varphi_j \in \mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2))$ при любом фиксированном ζ_{Z_2}. Соотношение (2.4) доказывается аналогично Лемме 3.1 [3]. Равенство (2.5) является следствием того факта, что функции $L\varphi_i$ и φ_j принадлежат разным строкам неприводимого представления типа $\hat{\alpha}_0$: этим свойством обладают функции φ_i, φ_j при $i \ne j$ и оно сохраняется при умножении φ_i на функцию $L(q_{Z_2} \zeta_{Z_2})$, инвариантную относительно перестановок из $S(Z_2)$.

Далее мы будем использовать разложение функции ψ_{Z_2} по функциям $\varphi_i(q_{Z_2})$

$$\psi_{Z_2}(q) = \sum_{i=1}^{i_0} \varphi_i(q_{Z_2}) \Phi_i(\zeta_3) + g(q), \tag{2.6}$$

где $\zeta_3 = \zeta_3(Z_2)$, $\Phi_i(\zeta_3) = (\psi_{Z_2}, \varphi_i)_{\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2))}$ и, очевидно,

$$(g(q), \varphi_i(q_{Z_2}))_{\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2))} = 0 \quad \text{при } \forall \zeta_3. \tag{2.7}$$

Пусть $\chi_1(q), \chi_2(q)$ и $\chi_0(q)$ — характеристические функции областей

$$\Omega_1 = \Omega_1(\beta) = \{q | q \in R_0,\ t_{Z_2} \le \beta\},\ \Omega_2 = \Omega_2(b) = \{q | q \in R_0, |\zeta_{Z_2}| \ge b\},$$

$$\Omega_0 = \Omega_0(\beta, b) = \Omega_1 \bigcap \Omega_2.$$

Очевидно, $\chi_0 = \chi_1\chi_2$. В силу (2.6)

$$\psi_{Z_2}(q) = \sum_{i=1}^{i_0} \varphi_i(q_{Z_2})\Phi_i(\zeta_3)\chi_j + g(q)\chi_j \quad j = 0, 2. \tag{2.8}$$

Начинаем последовательно оценивать величины в правой части неравенства (2.3). Фиксируем Z_2 и всюду далее для краткости пишем ζ вместо ζ_{Z_2}. Очевидно

$$|\zeta|^{-1}\chi_j(q) \le B_b(\zeta_3) \quad j = 0, 2, \tag{2.9}$$

где $B_b(\zeta_3) = |\zeta_3|^{-1}$ при $|\zeta_3| \ge b$, $B_b(\zeta_3) = b^{-1}$ при $|\zeta_3| \le b$. Поэтому и в силу (2.5), (2.8) при больших $b = b(\mathcal{E})$

$$\|\psi_{Z_2}|\zeta|^{-(\gamma+2)/2}\|^2 \le \mathcal{E}\|g\|^2 + \sum_{i,j=1}^{i_0} (B_b^{\gamma+2}(\zeta_3)\varphi_i\Phi_i, \varphi_j\Phi_j) \le$$

$$\le \mathcal{E}\|g\|^2 + \sum_{i=1}^{i_0} \|B_b^{\frac{\gamma+2}{2}}(\zeta_3)\Phi_i(\zeta_3)\|^2. \tag{2.10}$$

Т.к. $q^0_{(Z_2)} = P_0(Z_2)q = \{q^0_1(Z_2), \ldots, q^0_n(Z_2)\}$, где $q^0_i(Z_2) = q_i - \zeta[C_t]$ при $i \in C_t$, то

$$|P_0(Z_2)q|_1 \le |q_{Z_2}|_1$$

и при $q \in supp u_{Z_2}$

$$\frac{|q_{(Z_2)}|}{\delta \cdot M(Z_2) \cdot |\zeta|} \ge \frac{|P_0(Z_2)q|_1}{\delta |P_c(Z_2)q|_1} \ge 1. \tag{2.11}$$

При $b > b(a)$ в силу (2.8), (2.9), (2.11) и (2.4) (с $k = 1$)

$$\|\psi_{Z_2}\chi\chi_2|\zeta|^{-1}\|^2 \leq 2\|\sum_{i=1}^{i_0}\varphi_i \cdot \Phi_i \cdot B_b\chi\chi_2\|^2 + 2\|gB_b\|^2 \leq$$

$$\leq c\sum_{i=1}^{i_0}\|\Phi_i(\zeta_3)B_b^{3/2}(\zeta_3)\|^2 + \mathcal{E}\|g\|^2. \tag{2.12}$$

Здесь и далее через c мы будем обозначать константы (возможно, зависящие от $\mathcal{E}$), величина которых не играет роли для доказательства.

2.5 Переходим к оценкам главного члена в неравенстве (2.3) — квадратичной формы $(H_0^{(\alpha)}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2})$. Очевидно

$$(H_0\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) = \left(\left(H_{03}(Z_2) + I_{Z_2} - \frac{1}{M(Z_2)}\frac{d^2}{d\zeta_3^2}\right)\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}\right), \tag{2.13}$$

где $I_{Z_2} = V(q) - V_{Z_2}(q)$. В силу (2.6)

$$(H_{03}(Z_2)\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) \geq \mu^{(\alpha)}\|\psi_{Z_2}\|^2 + \delta_0\|g\|^2, \tag{2.14}$$

где $\delta_0 > 0$ — расстояние от $\mu^{(\alpha)}$ до ближайшей точки спектра оператора $H_0(\alpha; Z_2)$. Далее, очевидно,

$$-\frac{1}{M(Z_2)}\left(\frac{d^2}{d\zeta_3^2}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}\right) \geq -\frac{1}{M(Z_2)}\sum_{i=1}^{i_0}\left(\frac{d^2}{d\zeta_3^2}\Phi_i, \Phi_i\right). \tag{2.15}$$

Основные трудности в оценке величины $(H_0^{(\alpha)}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2})$ связаны с оценкой формы $(I_{Z_2}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2})$. Используя (2.8) с $j = 0$ имеем

$$(I_{Z_2}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) = (\chi_0 I_{Z_2}g, g) + \left(\chi_0 I_{Z_2}\sum_{i=1}^{i_0}\varphi_i\Phi_i, \sum_{t=1}^{i_0}\varphi_t\Phi_t\right) +$$

$$+2Re\left(\chi_0 I_{Z_2}\sum_{i=1}^{i_0}\varphi_i\Phi_i, g\right). \tag{2.16}$$

2.6 Пусть $i \in C_1$, $j \in C_2$. Тогда

$$|q_i - q_j| = |q_i - \zeta[C_1] + \zeta[C_2] - q_j + \zeta_{Z_2}| = |q_i^0(Z_2) - q_j^0(Z_2) + \zeta|.$$

Из §2.2 следует, что при $q \in \Omega_1(\beta)$

$$|q_t^0(Z_2)| \leq c\beta|\zeta| \tag{2.17}$$

и поэтому при малом β и $\forall q \in \Omega_1(\beta)$

$$|q_i - q_j| \geq |\zeta|/2 \tag{2.18}$$

При $q \in \Omega_0$ выполняется $|\zeta| \geq b$. Поэтому и в силу (2.17) при $b \geq 2a$ (см. §1.1)

$$\chi_0 V_{ij}(|q_i - q_j|) = e_i e_j |q_i - q_j|^{-\gamma} \cdot \chi_0. \tag{2.19}$$

Следовательно, при большом b и малом β

$$|(\chi_0 I_{Z_2} g, g)| \leq \mathcal{E}\|g\|^2. \tag{2.20}$$

Для оценки других членов в (2.16) величину $|q_i - q_j|^{-\gamma} = |q_i^0(Z_2) - q_j^0(Z_2) + \zeta|^{-\gamma}$ при $q \in \Omega_0(\beta, b)$, $\beta << 1$ разложим сначала по степеням $|\zeta|^{-1}$, а потом главный член полученного разложения – по степеням $|\zeta_3|^{-1}$. Имеем:

$$\chi_0|q_1^0(Z_2) - q_j^0(Z_2) + \zeta|^{-\gamma} =$$

$$= \chi_0|\zeta|^{-\gamma} + \gamma(\zeta_3, q_{i3}^0 - q_{j3}^0)|\zeta|^{-\gamma-2}\chi_0 + F_1, \tag{2.21}$$

где с учетом (2.9),(2.11)

$$|F_1| \leq c\chi_0(|q_i^0(Z_2)|^2 + |q_j^0(Z_2)|^2)|\zeta|^{-\gamma-2} \leq c|q(Z_2)|^2 B_b^{\gamma+2}(\zeta_3).$$

Далее, пусть $\Omega_3(\beta) = \{q | q \in \Omega_0, |\zeta_\perp| \leq \beta_1|\zeta_3|\}$, $\Omega_4 = \Omega_0 - \Omega_3$ и χ_j — характеристическая функция области $\Omega_j(\beta)$ $j = 3, 4$. Тогда для любого $p > 0$

$$\chi_0|\zeta|^{-p} = \chi_0(\chi_3 + \chi_4)|\zeta|^{-p} = \chi_0\chi_3|\zeta_3|^{-p} + \chi_0\chi_4|\zeta|^{-p} + F_2, \tag{2.22}$$

где в силу (2.9),(2.11)

$$\chi_0\chi_4|\zeta|^{-p} \le \chi_4 B_b^p(\zeta_3) \le B_b^{p+2}(\zeta_3) b^2 |\zeta_\perp|^2 \beta_1^{-2},$$

$$|F_2| \le \frac{p}{2}\chi_0\chi_3|\zeta_\perp|^2 B_b^{p+2}(\zeta_3).$$

Подставим в правую часть (2.21) полученное в (2.22) выражение для $\chi_0|\zeta|^{-p}$ с $p = \gamma$, умножим полученное равенство на $e_i e_j$ и просуммируем по всем $i \in C_1, j \in C_2$. Тогда получим

$$\chi_0 I_{Z_2} = Q|\zeta_3|^{-\gamma}\chi_0\chi_3 + |\zeta|^{-\gamma-2} \sum_{i\in C_1, j\in C_2} e_i e_j \zeta_3 (q_{i3}^0(Z_2) -$$

$$-q_{j3}^0(Z_2))\chi_0 + F_3, \tag{2.23}$$

где $|F_3| \le c B_b^{\gamma+2}(\zeta_3)|q(Z_2)|^2$

2.7 Возвращаемся к оценке членов в (2.16). В силу (2.5) с $L = \chi_0 I_{Z_2}$ имеем

$$\left(\chi_0 I_{Z_2} \sum_{i=1}^{i_0} \varphi_i \Phi_i,\ \sum_{j=1}^{i_0} \varphi_j \Phi_j\right) = \sum_{j=1}^{i_0} (\chi_0 I_{Z_2} \varphi_j \Phi_j, \varphi_j \Phi_j). \tag{2.24}$$

Далее, вследствие условия A_2) (§1.5) и т.к. гамильтониан $H_{03}(Z_2)$ инвариантен относительно инверсии: $q_{j3}^0 \leftrightarrow -q_{j3}^0$ (но не $q_j^0 \leftrightarrow -q_j^0$!), функции φ_j имеют определенную четность и функции $|\varphi_j|^2$ являются четными относительно замены $q_{j3}^0 \to -q_{j3}^0$. Поэтому

$$\int \chi_0 \zeta_3 |\zeta|^{-\gamma-2} (q_{i3}^0(Z_2) - q_{j3}^0(Z_2)) |\varphi_t(q_{Z_2})|^2 dR_{03}(Z_2) = 0.$$

Следовательно, в силу (2.23)

$$(I_{Z_2}\chi_0 \varphi_j \Phi_j, \varphi_j \Phi_j) = Q(Z_2) \int |\zeta_3|^{-\gamma} \chi_0 \chi_3 |\varphi_j \Phi_j|^2 dR_{03}(Z_2) +$$

$$+(F_3 \varphi_j \Phi_j, \varphi_j \Phi_j).$$

Так как исходная система была нейтральна, то подсистемы C_1, C_2 из Z_2 или обе нейтральны ($Q(Z_2) = 0$), или заряжены разноименно ($Q(Z_2) < 0$). Поэтому и в силу (2.4)

$$(I_{Z_2}\chi_1\varphi_j\Phi_j, \varphi_j\Phi_j) \geq Q(Z_2) \int\limits_{|\zeta_3|\geq b_0} |\Phi_j(\zeta_3)|^2|\zeta_3|^{-\gamma}d\zeta_3 -$$

$$-c\int|\Phi_j(\zeta_3)|^2 B_b^{\gamma+2}(\zeta_3)d\zeta_3, \tag{2.25}$$

где c – некоторая константа, $b_0 = (1+\beta_1^2)^{-1/2}b$. Здесь и далее мы используем тот факт, что при $\chi_0\chi_3 = 1$ выполняется $b^2 \leq \zeta_\perp^2 + \zeta_3^2 \leq \zeta_3^2(1+\beta_1^2)$, т.е. $|\zeta_3| \geq b_0$.

2.8 Оценим, наконец, перекрестные члены в (2.15). Пусть $\chi_5(\zeta_3) = 0$ при $|\zeta_3| < b_0$, $\chi_5(\zeta_3) = 1$ при $|\zeta_3| \geq b_0$. Тогда $\chi_0\chi_3\chi_5 = \chi_0\chi_3$ и в силу (2.23)

$$(\chi_0 I_{Z_2}\varphi_j f_j, g) = Q(|\zeta_3|^{-\gamma}\chi_5(\zeta_3)\varphi_j\Phi_j, g) + (F_4\varphi_j\Phi_j, g)+$$

$$+(F_5\varphi_j\Phi_j, g), \tag{2.26}$$

где

$$F_4 = Q(\chi_1\chi_3 - 1)\chi_5|\zeta_3|^{-\gamma}, \quad |F_5| \leq c|q^0(Z_2)|^2 B_b^{\gamma+1}.$$

В силу (2.7)

$$(|\zeta_3|^{-\gamma}\chi_5(\zeta_3)\varphi_j\Phi_j, g) = 0. \tag{2.27}$$

Второе и третье слагаемые в (2.26) оцениваются по неравенству Буняковского:

$$|(F_t\varphi_j\Phi_j, g)| \leq \mathcal{E}||g||^2 + c||F_t\varphi_j\Phi_j||^2 \quad t = 4,5. \tag{2.28}$$

В силу (2.4)

$$||F_5\varphi_j\Phi_j||^2 \leq c||B_b^{\gamma+1}(\zeta_3)\Phi_j||^2. \tag{2.29}$$

Ясно, что $F_4 \neq 0$ только если $\chi_0 = 0$, $\chi_5 = 1$ или $\chi_3 = 0$, $\chi_5 = 1$. Если $|\zeta_3| \geq b$ (и, значит, $|\zeta| \geq b$), то равенства $\chi_0 = 0$, $\chi_5 = 1$ означают, что $\chi_1 = 0$ (см. §2.3), т.е. что

$$|P_0(Z_2)q|_1 \geq \beta|P_c(Z_2)q|_1 = \beta M(Z_2)|\zeta_3|,$$

а равенства $\chi_3 = 0$, $\chi_5 = 1$ эквивалентны условию

$$|\zeta_\perp| \geq \beta_1 |\zeta_3| \geq \beta_1 b;$$

если $b_0 \leq |\zeta_3| < b$ (при $|\zeta_3| < b_0$ выполняется $F_4 \equiv 0$) то, очевидно, $b \cdot |\zeta_3|^{-1} \geq \beta_1$. В силу сказанного при $q \in suppF_4$

$$\tau := (|P_0(Z_2)q|_1 + |\zeta_\perp| + b)|\zeta_3|^{-1} \geq \beta_2 := min\{\beta_1, 1, \beta M(Z_2)\}$$

и в силу (2.4)

$$\|F_4 \varphi_j \Phi_j\|^2 \leq \|F_4 \tau \beta_2^{-1} \varphi_j \Phi_j\|^2 \leq c\|\chi_5 |\zeta_3|^{-\gamma-1} \Phi_j\|^2. \tag{2.30}$$

Из соотношений (2.26)-(2.30) вытекает, что

$$|(\chi_0 I_{Z_2} \varphi_j \Phi_j, g)| \leq \mathcal{E}\|g\|^2 + c\|B_b^{\gamma+1}(\zeta_3)\Phi_j\|^2. \tag{2.31}$$

2.9 Используя (2.3),(2.10),(2.12)–(2.14),(2.16),(2.20) и (2.31), мы получаем, что при $\psi \perp \mathcal{M}_2^0(\lambda)$ (см. §2.2)

$$(H_0^\alpha \psi, \psi) \geq \mu^\alpha \|\psi\|^2 + \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \sum_{j=1}^{i_0} (h_{Z_2}^+ \Phi_j, \Phi_j), \tag{2.32}$$

где аргументы ζ_3 функций $\Phi_j(\zeta_3)$ зависят от Z_2, но мы не указываем на эту зависимость, чтобы не усложнять обозначения.[5] Неравенство (2.32) подсказывает, как определить пространство $\tilde{\mathcal{M}}_2(\lambda)$, чтобы при $\psi \perp (\tilde{\mathcal{M}}_2(\lambda) \oplus \mathcal{M}_2^0)$ выполнялось неравенство (2.2). А именно, положим

$$\tilde{\mathcal{M}}_2(\lambda) = \left\{ \tilde{\psi} | \tilde{\psi} = P^{(\alpha)} \sum_{g \in S} \sum_{i,j} c_{ij}(g) T_g \varphi_i(q_{Z_2}) f_j(\zeta_3) u_{Z_2} \omega_b \right\},$$

где $f_j(\zeta_3)$ — собственные функции оператора $h_{Z_2}^+$, отвечающие его собственным значениям, не превосходящим λ, функции $u_{Z_2} =$

[5]если не выполнено условие A_1), то вид функции Φ_j также зависит от Z_2.

$u(t_{Z_2})$, $\omega_b = \omega_b(\zeta_{Z_2})$, $\varphi_i(q_{Z_2})$ – те же, что в §2.2, $c_{ij}(g)$ — произвольные числа. Пусть

$$\mathcal{M}_2(\lambda) = \mathcal{M}_2^0 + \tilde{\mathcal{M}}_2(\lambda).$$

Тогда при $\psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda)$ разложения (2.6) функций $\psi_{Z_2} \equiv \psi u_{Z_0}\omega_b$ при любом $Z_2 \in O(\alpha)$ не могут содержать слагаемых $\varphi_j(q_{Z_2})\Phi_j(\zeta_3)$ с такими функциями $\Phi_j(\zeta_3)$, для которых

$$(h^+_{Z_2}\Phi_j, \Phi_j) < \lambda\|\Phi_j\|^2.$$

Поэтому и т.к.

$$\|\psi_{Z_2}\|^2 \geq \sum_{j=1}^{i_0} \|\Phi_j\|^2, \quad \|\psi\|^2 \geq \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \|\psi_{Z_2}\|^2$$

мы получаем, что

$$\sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \sum_{j=1}^{i_0} (h^+_{Z_2}\Phi_j, \Phi_j) \geq \lambda\|\psi\|^2.$$

Отсюда и из (2.32) следует неравенство (2.2).

Оценка

$$dim\mathcal{M}_2(\lambda) \leq d_{Z_2}(\alpha;\tilde{\alpha}_0)N(\lambda;h^+_{Z_2}) + const$$

вытекает из Леммы 4.2 [3].

2.10 Для завершения доказательства Теоремы 1.2 строим пространство $\mathcal{M}_1(\lambda)$ так, чтобы при $\psi \in \mathcal{M}_1(\lambda)$ выполнялось неравенство (2.1) и чтобы

$$dim\mathcal{M}_1(\lambda) \geq d_{Z_2}(\alpha;\tilde{\alpha}_0)N(\lambda;h^-_{Z_2}) - c. \qquad (2.33)$$

Пусть

$$\mathcal{M}_1(\lambda) = \{\psi | \psi \in$$
$$\in P^{(\alpha)} \sum_{i,j} \sum_{g \in S} c_{ij}(g) T_g(\varphi_i(q_{Z_2}) f_j(b_0, \zeta_3(Z_2)) u(\tau_3(Z_2)))\}, \qquad (2.34)$$

где $f_j(b_0, \zeta_3(Z_2))$ — собственные функции эффективного оператора $h^-_{Z_2}$ в области $|\zeta_3(Z_2)| \geq b_0$ с нулевым граничным условием при $|\zeta_3(Z_2)| = b_0$, отвечающие всем его собственным значениям меньшим λ, $\varphi_i(q_{Z_2})$ $i = 1, 2 \ldots, i_0$ — те же, что в §2.3, $u(s)$ — та же, что в §2.2, $\tau_3(Z_2) = |P_{03}(Z_2)q^{(3)}|_1 \cdot |\zeta_3(Z_2))^{-1}$, $q^{(3)} = (q_1^{(3)}, \ldots, q_n^{(3)}) \in R_0$, $q_j^{(3)} = (0, 0, q_{j3})$ $j = 1, \ldots, n$, $c_{ij}(g)$ — произвольные числа. Пространство (2.34) с точностью до обозначений совпадает с пространством $\mathcal{M}_1(\lambda)$ из [3] (формула (2.5)) и проверка свойств (2.33) и (2.1) проводится в точности так же, как в [3]. Теорема 1.2 доказана.

§ 3. Доказательство теорем 1.5, 1.6.

3.1 Доказательство Теоремы 1.5 (§3.2-3.8) по внешней схеме напоминает доказательство Теоремы 2.1 [11]. Как и там для оценки квадратичной формы рассматриваемого оператора по последовательностям g_k, описывающим уход системы из любой ограниченной области конфигурационного пространства, мы делаем сначала разбиение этого пространства в направлении оси z, а потом – в плоскости (x, y). Однако фактическое наполнение этой схемы – иное. В направлении оси z мы приводим сначала разбиение в конфигурационном пространстве кластера C_1 (независимо от состояния C_2), а потом — разбиение в конфигурационном пространстве кластера C_2, когда кластер C_1 находится в ограниченной области. В плоскости (x, y) разбиение стандартное, однако с его помощью впервые устанавливается, что в области, отвечающей уходу кластеров C_1, C_2 друг от друга в плоскости (x, y) (без их распадения), норма волновых функций g_k стремится к нулю, т.е. что такой уход невозможен.

Теорема 1.6 доказывается стандартным образом, но с решающим использованием Теоремы 1.5 из §1.

3.2 Пусть распадение $Z_2 = \{C_1, C_2\}$ фиксировано и $g_k(q)$ – любая последовательность из $P^{(\alpha)}C_0^2(R_{03}(Z_2))$, такая, что

$$\|g_k\| = 1, \ \sup_k (H_{03}(Z_2)g_k, g_k) < +\infty \text{ и } g_k(q) \rightharpoonup 0 \text{ в } \mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2)).$$

Мы докажем, что

$$\underline{\lim}(H_{03}(\alpha; Z_2)g_k, g_k) \geq \mu(\alpha; Z_2), \tag{3.1}$$

где

$$\mu(\alpha; Z_2) = \min_{Z'_s, Z'_s < Z_2, \ s \geq 3} inf H_{03}(\alpha, Z_s).$$

Отсюда будет следовать, что

$$\sigma_{ess}(H_{03}(\alpha; Z_2)) \subseteq [\mu(\alpha, Z_2), +\infty). \tag{3.2}$$

Доказательство противоположного включения проводится стандартным методом по образцу [13] (§§2.7,2.8) и здесь опускается, тем более, что для применения нам достаточно знать (3.2)

3.3 Введем необходимые обозначения. Пусть $Y_{sj} = \{C_{1j}, \ldots, C_{sj}$ – произвольное разбиение кластера C_j на s не взаимодействующих между собой кластеров C_{pj}, $1 \leq p \leq s \leq n_j$, $\bigcup_p C_{pj} = C_j$, $C_{pj} \bigcap C_{lj} = \emptyset \;\; p \neq l$. Введем в рассмотрение пространства

$$R_{03}[Y_{sj}] = \{q | q = (q_1 \ldots q_n),\ q_i = (0,0,0)\, i \bar{\in} C_j,\ q_i = (0,0,q_{i3})\, i \in C_j,$$

$$\sum_{t \in C_{pj}} m_t q_{t3} = 0 \; p = 1, 2, \ldots, s\}$$

$$R_{c3}[Y_{sj}] = \{q | q = (q_1 \ldots q_n),\ q_i = (0,0,0)\, i \bar{\in} C_j,\ q_i = (0,0,q_{i3})\, i \in C_j,$$

$$(q, q')_1 = 0 \quad \text{для } \forall q' \in R_{03}[Y_{sj}]\}$$

и проекторы (в смысле $(\cdot,\cdot)_1$) $P_{\kappa 3}[Y_{sj}]$ в пространстве $R_{03}(Z_2)$ на $R_{\kappa 3}[Y_{sj}]$, $\kappa = 0, c$. Положим

$$\tau(Y_{1j}) = \sum_{p \in C_j} m_p q_{p3}^2, \quad \tau(Y_{sj}) = |P_{03}(Y_{sj})q|_1 \cdot |P_{c3}(Y_{sj})q|_1^{-1}.$$

Выберем далее числа $b_1 > a_1 \gg 1$ и $a_j < b_j \ll 1$, $2 \leq j \leq n_i = |C_i|$, так же как в §2.4 [13], но не для всей системы, а для ее подсистемы C_i и определим вещественные дважды непрерывно дифференцируемые функции $u_{sj}(\tau)$, $\;v_{sj}(\tau)$ так, что $0 \leq u_{sj}(\tau)$, $v_{sj}(\tau) \leq 1$,

$u_{sj}^2(\tau) + v_{sj}^2(\tau) = 1$, $u_{sj}(\tau) = 1$ при $0 \le \tau \le a_j$, $u_{sj}(\tau) = 0$ при $\tau \ge b_j$. Пусть

$$u_{Y_{sj}} = u_{sj}(\tau(Y_{sj})), \quad v_{Y_{sj}} = v_{sj}(\tau(Y_{sj})).$$

3.4 Проведем оценку квадратичной формы $(H_{03}(\alpha; Z_2)g_k, g_k)$ (см. §3.2), разбивая пространство относительного движения кластера C_1 в направлении 3-ей оси с помощью введенных функций $u_{Y_{s1}}, v_{Y_{s1}}$. Пусть

$$\psi(q) = g_k(q), \quad \hat{\psi}_0 = \psi, \quad \hat{\psi}_j = \hat{\psi}_{j-1} \cdot (1 - \sum_{Y_{j,1}} u_{Y_{j,1}}^2)^{1/2},$$

$$\psi_{j-1,Y_{j1}} = \hat{\psi}_{j-1} u_{Y_{j1}} \quad j = 1, 2, \ldots, n_1;$$

$$\psi_j = \sum_{Y_{j1}} \psi_{j-1,Y_{j1}} \; j = 1, 2, \ldots, n-1; \; Z_{s1} = \{Y_{s1}, C_2\}, Z_{s2} = \{C_1, Y_{s2}\}.$$

Аналогично соотношениям (2.5), (2.6) из [13] мы получаем, что для произвольного $\mathcal{E} > 0$ и $a_1 = a_1(\mathcal{E})$, $b_1 = b_1(\mathcal{E})$.

$$(H_{03}(Z_2)g_k, g_k) \ge$$

$$\ge \sum_{j=0}^{n_1-1} \sum_{Z_{j+1,1}} (H_{03}(Z_{j+1,1})\psi_{j,Y_{j+1,1}}, \psi_{j,Y_{j+1,1}}) - 2\mathcal{E} \qquad (3.3)$$

и

$$(H_{03}(Z_{j+1,1})\psi_{j,Y_{j+1,1}}, \psi_{j,Y_{j+1,1}}) \ge \mu(\alpha; Z_2)\|\psi_{j,Y_{j+1,1}}\|^2 \quad j \ge 1, \qquad (3.4)$$

ибо при $j \ge 1$ разбиение $Z_{j+1,1}$ есть разбиение двухкластерной системы $Z_2 = (C_1, C_2)$ не менее чем на 3 кластера за счет дробления кластера C_1.

3.5 Для оценки в (3.3) члена с $j = 0$ мы проводим далее разбиение пространства относительно движения кластера C_2 в направлении оси z (в ситуации, когда для частиц не разбиваемого кластера C_1 выполняется $\sum\limits_{t\in C_1} q_{t3}^2 m_t \le b_1^2$). Для этой цели мы используем функции $u_{Y_{j,2}}$. Положим

$$\omega(q) = \psi_{0,Y_{11}},\ \hat\omega_0 = \omega,\ \ \hat\omega_j = \hat\omega_{j-1}(1 - \sum_{Y_{j,2}} u^2_{Y_{j,2}})^{1/2},$$

$$\omega_{j-1,Y_{j2}} = \hat\omega_{j-1} u_{Y_{j,2}}\ \ j = 1,2,\ldots,n_2;\ \ \omega_j = \sum_{Y_{j2}} w_{j-1,Y_{j2}},$$

$$j = 1,2,\ldots,n_2 - 1$$

и аналогично (3.3),(3.4) получаем

$$(H_{03}(Z_2)\psi_{0,Y_{11}}, \psi_{0,Y_{11}}) \ge \sum_{i=0}^{n_2-1} \sum_{Z_{i+1,2}} (H_{03}(Z_{i+1,2})\omega_{i,Y_{i+1,2}}, \omega_{i,Y_{i+1,2}}) -$$

$$-2\mathcal{E}\|\psi_{0,Z_{11}}\|^2 \tag{3.5}$$

$$(H_{03}(Z_{i+1,2})\omega_{i,Y_{i+1,2}}, \omega_{i,Y_{i+1,2}}) \ge \mu(\alpha, Z_2)\|\omega_{i,Y_{i+1,2}}\|^2\ \ i \ge 1 \tag{3.6}$$

3.6 Нам остается оценить величину $(H_{03}(Z_2)\omega_{0,Y_{12}}, \omega_{0,Y_{12}})$. Для этого разобъем носитель функции $\omega_{0,Y_{12}}$ на области, отвечающие всевозможным распадениям $Z'_s = \{C'_1,\ldots,C'_s\}$ системы Z_1 в плоскости (x,y). С этой целью введем сначала пространства

$$R_{0\perp}(Z'_s) = \{q | q = (q_1,\ldots,q_n),\ q_i = (q_{i\perp}, 0),\ q_{i\perp} = (q_{i1}, q_{i2}),$$

$$\sum_{i\in C_p} m_i q_{i\perp} = 0\ \ p = 1,2,\ldots,s\},$$

$$R_{c\perp}(Z'_s) = \{q | q = (q_1,\ldots,q_n),\ q_i = (q_{i\perp}, 0),\ (q, q')_1 = 0$$

$$\text{для } \forall q' \in R_{0\perp}(Z'_s)\}$$

и обозначим через $P_{\kappa\perp}(Z'_s)$ проектор в смысле скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_1$ на подпространство $R_{\kappa\perp}(Z'_s) = 0, c,\ \ s \ge 2$. Пусть, далее, $q_\perp = (q_{1\perp},\ldots,q_{n\perp})$,

$$\beta_1 = |q_\perp|_1,\ \ \beta(Z'_s) = |P_{0\perp}(Z'_s)q_\perp|_1 \cdot |P_{C\perp}(Z'_s)q_\perp|_1^{-1}\ \ s \ge 2.$$

Определим числа $\tilde{a}_s, \tilde{b}_s$ и функции $\tilde{u}_s(\beta)$, $\tilde{v}_s(\beta)$ аналогично §2.4 [13] и положим

$$\tilde{u}_{Z'_s} = \tilde{u}_s(\beta(Z'_s)),\ \tilde{v}_{Z'_s} = \tilde{v}_s(\beta(Z'_s))\ s = 1, 2, \ldots, n,\ \ f = \omega_{0,Y_{12}},\ \hat{f}_0 = f,$$

$$\hat{f}_i = f_{i-1}(1 - \sum_{Z'_i} \tilde{u}^2_{Z'_i})^{1/2},\ f_{i-1,Z'_i} = \hat{f}_{i-1}\tilde{u}_{Z'_i},\ \ i = 1, \ldots, n,$$

$$f_i = \sum_{Z'_i} f_{i-1,Z'_i}.$$

Аналогично предыдущему получаем:

$$(H_{03}(Z_2)f, f) \geq \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{Z'_{j+1}} \left(H_{03}(Z_2 \bigcap Z'_{j+1}) f_{j,Z'_{j+1}}, f_{j,Z'_{j+1}} \right) -$$

$$-2\mathcal{E}\|f\|^2, \tag{3.7}$$

где через $Z_2 \bigcap Z'_{j+1}$ обозначено разбиение $\tilde{Z}_p = \{\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_p\}$, состоящее из тех кластеров $C_i \bigcap C'_k$, $C_i \in Z_2$, $C'_k \in Z'_s$, которые не пусты. Очевидно при $Z'_s \neq Z_1, Z_2$ мы получаем $\tilde{Z}_p < Z_2\ \ p \geq 3$ и значит

$$(H_{03}(Z_2 \bigcap Z'_{j+1})\varphi_{j,Z'_{j+1}}, \varphi_{j,Z'_{j+1}}) \geq \mu(\alpha, Z_2)\|\varphi_{j,Z'_{j+1}}\|^2$$

$$\text{при } Z'_{j+1} \neq Z_1, Z_2. \tag{3.8}$$

При $Z'_{j+1} = Z_1, Z_2$, очевидно, $Z_2 \bigcap Z'_{j+1} = Z_2$. Поэтому в (3.7) нам остается оценить только слагаемые

$(H_{03}(Z_2)f_{0,Z_1}, f_{0,Z_1})$ и $((H_{03}(Z_2)f_{1,Z_2}, f_{1,Z_2})$.

3.7 По построению

$$f_{0,Z_1}(q) = f_{0,Z_1}(k, q) = g_k(q)u_{11}(\tau(Y_{11}))u_{12}(\tau(Y_{12})\tilde{u}_1(\beta_1)$$

и, следовательно, при $q \in supp f_{0,Z_1}(k, q)$ для всех k выполняется неравенство

$$|q|_1^2 \leq 2b_1^2(1) + \tilde{b}_1^2(1)$$

Спектр оператора $H_{03}(\alpha, Z_2)$ в ограниченной области пространства $R_{03}(Z_2)$ с нулевым граничным условием – чисто дискретный с единственной предельной точкой $+\infty$. Поэтому и так как $g_k(q)$ сходится слабо к нулю в $\mathcal{L}_2(R_{03}(Z_2))$

$$\underline{\lim}_{k\to\infty}(H_{03}(Z_2)f_{0,Z_1}(k,q), f_{0,Z_1}(k,q)) \geq$$

$$\geq \mu(\alpha; Z_2)\underline{\lim}\|f_{0,Z_1}(k,q)\|. \tag{3.9}$$

3.8 Оценим, наконец, величину $(H_{03}(Z_2)f_{1,Z_2}, f_{1,Z_2})$. Предварительно отметим, что по построению, при $q \in supp f_{1,Z_2}$

$$|P_{0\perp}(Z_2)q_\perp|_1 \leq \tilde{b}_2|P_{c\perp}(Z_2)q_\perp|_1, \quad |q_\perp|_1 \geq \tilde{a}_1,$$

и так как

$$|q_\perp|_1^2 = |P_{0\perp}(Z_2)q_\perp|_1^2 + |P_{c\perp}(Z_2)q_\perp|_1^2,$$

то при $q \in supp f_{1,Z_2}$

$$|P_{c\perp}(Z_2)q_\perp|_1 \geq \tilde{a}_1(1+\tilde{b}_2^2)^{-1/2}. \tag{3.10}$$

Кроме того, в силу Леммы 2.3 ([10] стр. 125)

$$|P_{c\perp}(Z_2)q_\perp|_1^2 = \frac{M[C_1]\cdot M[C_2]}{M}|\zeta_\perp|^2, \tag{3.11}$$

$$|P_{0\perp}(Z_2)q_\perp|_1^2 \geq |q_{i\perp} - \zeta_\perp[C_j]|^2 m_i \quad \text{при } i \in C_j, \tag{3.12}$$

где $\zeta_\perp = \zeta_\perp[C_1] - \zeta_\perp[C_2]$, $\zeta_\perp[C_j] = \sum\limits_{t\in C_j} m_t q_{t\perp}\cdot M[C_j]^{-1}$.

После этих простых замечаний оценим снизу в выражении оператора $H_{03}(Z_2)$ член $F = (\nu_1+\mathcal{E}_2)^2 + (\nu_2 - \mathcal{E}_1)^2$, где $\mathcal{E}_j = 2B\sum\limits_{t=1}^{n} q_{tj}e_t$.

Так как $Q = \sum\limits_{j=1}^{n} e_j = 0$, то

$$\mathcal{E}_j = 2B\sum_{s\in C_1}(q_{sj} - \zeta_j[C_1])e_s + 2B\sum_{s\in C_2}(q_{sj}-\zeta_j[C_2])e_s +$$

$$+2B\sum_{s\in C_2}(\zeta_j[C_2]-\zeta_j[C_1])e_s = G_j(q) - 2BQ[C_2]\zeta_j(Z_2), \tag{3.13}$$

где в силу (3.9)-(3.12)

$$|G_j(q)| \leq \tilde{b}_2 c |\zeta_\perp(Z_2)| \tag{3.14}$$

и c не зависит от $\tilde{b}_2$ и q.

В силу (3.13)

$$F = \nu_1^2 + \nu_2^2 + 2\nu_1(G_2(q) - 2BQ[C_2]\zeta_2(Z_2)) - 2\nu_2(G_1(q)+$$
$$+2BQ[C_1]\zeta_1(Z_2)) + G_2^2(q) - 4BG_2(q)Q[C_2]\zeta_2(Z_2)+$$
$$+4BG_1(q)Q[C_1]\zeta_1(Z_2) + 4B^2(Q[C_2]^2\zeta_2^2(Z) + Q[C_1]^2\zeta_1^2(Z_2)). \tag{3.15}$$

Т.к. число $\tilde{b}_2$ может быть выбрано с самого начала достаточно малым, а число $\tilde{a}_1$ – достаточно большим, то в силу (3.14),(3.15)

$$F \geq 4B^2Q[C_1]^2|\zeta_\perp|^2 - \tilde{b}_2 c|\zeta_\perp|^2 - c|\zeta_\perp| \geq d_0|\zeta_\perp|^2 \geq d_1\tilde{a}_1^2, \tag{3.16}$$

где константы d_0, d_1 не зависят от $\tilde{a}_1$. Следовательно, при достаточно большом $\tilde{a}_1$

$$(H_{03}(Z_2)f_{1,Z_2}, f_{1,Z_2}) \geq \mu(\alpha, Z_2)\|f_{1,Z_2}\|^2. \tag{3.17}$$

Собирая вместе оценки (3.3)–(3.8),(3.17) получаем, что

$$\underline{\lim}(H_{03}(Z_2)g_k, g_k) \geq \mu(\alpha, Z_2) - \mathcal{E}.$$

Отсюда и следует утверждение Теоремы 1.5.

Замечание. Из оценки (3.16) вытекает, что в области $\Omega_1 = supp f_{1,Z_2}$, отвечающей распадению исходной системы на нераспадающиеся кластеры C_1, C_2,

$$\underline{\lim}\|g_k\|_{\Omega_1} = O(\tilde{a}_1^{-1}),$$

где $|\tilde{a}_1| \leq const|\zeta_\perp[C_2] - \zeta_\perp[C_1]|$ и $\tilde{a}_1$ может быть выбрано сколь угодно большим. Таким образом, нами одновременно показано, что последовательность Вейля $g_k(q)$ для оператора $H_{03}(\alpha; Z_2)$ не может отвечать распадению Z_2 на нераспадающиеся кластеры C_1, C_2.

3.9 Доказательство Теоремы 1.6. Пусть (см. п.1.4) $\hat{q}_{33} = q_{33}(Z_2(2)) = q_{33} - \sum\limits_{j=1, j\neq 2}^{n} m_j q_{j3} \cdot (M - m_2)^{-1}$, $f(\hat{q}_{33})$ - гладкая нормированная функция, равна нулю при $|\hat{q}_{33}| \leq 1$, $\hat{q} = q(Z_3(2,3))$ — произвольный вектор из $R_{03}(Z_3(2,3))$, $\varphi(\hat{q})$ — нормированная собственная функция оператора $H_{03}(\alpha; Z_3(2,3))$, отвечающая его собственному значению $\mu(\alpha; Z_3(2,3))$ и обладающая перестановочной симметрией какого-то типа $\alpha'' = \alpha''(Z_2(2,3))$, $\alpha'' \prec \alpha$, $\alpha' = \alpha'(Z_2(2))$ — такой тип перестановочной симметрии системы $Z_2(2)$, что $\alpha'' \prec \alpha' \prec \alpha$. Положим

$$f_k = f(k\hat{q}_{33})k^{1/2}, \psi_k = \varphi f_k, \quad \psi_k^{(\alpha')} = P^{(\alpha')}(Z_2(2))\psi_k.$$

Подставляя функцию $\psi_k^{(\alpha')}$ в квадратичную форму оператора $H_{03}(\alpha; Z_3(2,3))$ и используя известное выражение для оператора $P^{(\alpha')}$, мы после замены переменных $\tau = k\hat{q}_{33}$ и громоздких выкладок, похожих на проведенные в [14] (§7), получаем, что

$$(H_{03}(\alpha, Z_2(2))\psi_k^{(\alpha')}, \psi_k^{(\alpha')}) = (H_{03}(\alpha, Z_2(2))\psi_k, P^{(\alpha')}\psi_k) =$$

$$= \mu(\alpha; Z_2(2))\|\psi_k^{(\alpha')}\|^2 + k(p(k) + O(k)),$$

где при $k \to 0$ $\underline{\lim}\, p(k) < 0$, $\underline{\lim}\|\psi_k^{\alpha'}\|^2 > 0$. Поэтому для малых k

$$inf(H_{03}(\alpha; Z_2(2))\psi_k^{(\alpha')}, \psi_k^{(\alpha')}) < \mu(\alpha; Z_2(2))\|\psi_k^{(\alpha')}\|^2,$$

т.е.

$$\mu^{(\alpha)} := inf H_{03}(\alpha; Z_2(2)) \in \sigma_d(H_{03}(\alpha; Z_2(2)),$$

что и требовалось доказать.

Литература.

1. Г.М. Жислин, С.А. Вугальтер, Геометрические методы в задачах о спектре многочастичных систем в магнитных полях с фиксированным псевдомоментом. Перепринт НИРФИ, N 429, Н.Новгород, 1996, стр. 1–29.

2. С.А. Вугальтер, Г.М. Жислин, Асимптотика дискретного спектра гамильтонианов многочастичных квантовых систем в однородном магнитном поле. Алгебра и анализ, **3**(1991), N 6, стр. 119–155.

3. С.А. Вугальтер, Г.М. Жислин, Спектральные асимптотики N-частичных операторов Шредингера с однородным магнитным полем на подпространствах с фиксированным типом $SO(2)$ симметрии. Алгебра и анализ, **5**(1993), N 2, стр. 108–125.

4. С.А. Вугальтер, Г.М. Жислин, Об асимптотике дискретного спектра данной симметрии многочастичных гамильтонианов. Труды Москов. Матем. Общества, 54(1992), стр. 187–213.

5. В.Я. Иврий, О точных асимптотиках собственных значений для двух классов дифференциальных операторов в R^d, ДАН СССР, **276**(1984), N 2, 268–270.

6. W Kirsch and B. Simon, Corrections to the classical behavior of the number of bound states of Schrodinger operators, Ann. Physics **183**(1988, N 1, 122–130.

7. Ф. Рисс, Б. Секефальви–Надь, Лекции по функциональному анализу, ИЛ, Москва, 1954.

8. Г.М. Жислин, Существенный спектр многочастичных систем в магнитных полях, Алгебра и анализ, **8**(1996), N 1, 190–199.

9. J. E. Avron, J. W. Herbst, B. Simon, Separation of center of mass in homogeneous magnetic field. Ann. Phys., **114**(1978), 431.

10. М. А. Антонец, Г. М. Жислин, И. А. Шерешевский, О дискретном спектре многочастичных гамильтонианов. Приложение к книге К. Йоргенс, И. Вайдманн, Спектральные свойства гамильтоновых операторов, Мир, Москва, 1976.

11. Г. М. Жислин, Локализация существенного спектра операторов энергии квантовых систем с не возрастающим магнитным полем. ТМФ, **107**(1996), N 3, 372–387.

12. С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, Спектральные свойства гамильтонианов с магнитным полем при фиксации псевдомомента. I., ТМФ, **113**(1997), N 3, 413–431.

13. С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин, О локализации существенного спектра n-частичных квантовых систем в магнитном поле. ТМФ, **97**(1993), N 1, 94–112.

14. Г. М. Жислин, Исследование спектра дифференциальных операторов квантово-механических систем многих частиц в пространствах функций заданной перестановочной симметрии. Известия АН СССР, сер. Мат., **33**(1969), 560– 649.