

Нижегородский научно-исследовательский
радиофизический институт
Министерства общего и профессионального образования
Российской Федерации

Препринт № 440

К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН,
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ РЕЗКИХ ГРАНИЦ
РАЗДЕЛА В АТМОСФЕРЕ

Л.А.Гасилова

Ю.В.Петухов

Нижний Новгород, 1997

Гасилова Л.А., Петухов Ю.В.

К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН,

РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ РЕЗКИХ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА
В АТМОСФЕРЕ // Препринт № 440 . - Нижний Новгород : НИРФИ,
1997. - 32 с.

УДК 551.596.1

Для реализуемых в атмосфере Земли и Солнца условий определены частотные зависимости фазовых и групповых скоростей, а также коэффициентов возбуждения точечным источником массы, поверхностных волн, распространяющихся вдоль границы раздела находящихся в поле тяжести изотермических газообразных сред с различными значениями термодинамических параметров. Установлены диапазоны частот, в которых существуют либо поверхностные, либо вытекающие волны, переизлучающие акустико-гравитационные или внутренние гравитационные волны в соответствующие среды.

L.A. Gasilova, Yu.V. Petukhov

ON THE THEORY OF SURFACE WAVES PROPAGATING
ALONG SHARP BOUNDARIES IN THE ATMOSPHERE // Preprint
N 440 - Nizhny Novgorod, 1997. 32 p.

Frequency dependences for phase and group velocities and excitation coefficients of surface waves, generated by a point mass source and propagating along boundary of isothermic gaseous media with various thermodynamical parameters, are investigated. Conditions, which can be observed in Earth's and Solar atmospheres, are considered. Frequency ranges, in which surface or leaky waves (generating acoustical-gravity or internal gravity waves in corresponding medium) exists, are determined.

Изучение дисперсионных свойств и частотных зависимостей коэффициентов возбуждения поверхностных волн, распространяющихся вдоль соответствующих границ раздела атмосферных слоев с достаточно резкими изменениями термодинамических параметров сред, представляет интерес в связи с исследованиями волновых процессов в атмосфере Земли [1-11] и Солнца [12-15], а также на поверхности нейтронных звезд [16]. Характерные условия для существования таких поверхностных волн в атмосфере Земли реализуются, во-первых, на границе раздела с океаном [1, 6, 9 - 11], во-вторых, на высотах термосферы, где из-за резкого возрастания температуры, скорость звука увеличивается почти в 1.82 раза [3, 6, 7]. Аналогичная ситуация имеет место на Солнце, а именно, при переходе из конвективной зоны в фотосферу и из хромосферы в корону [12].

Поэтому целью настоящей работы является изучение частотных зависимостей фазовых и групповых скоростей, а также коэффициентов возбуждения точечным источником массы поверхностных волн, распространяющихся вдоль резкой границы раздела двух изотермических газообразных сред, находящихся в поле тяжести.

При решении поставленной задачи предположим, что вертикальная ось координат z направлена вверх, против направления действия силы тяжести, ускорение свободного падения которой равно g , а постоянным

значениям адиабатической скорости звука c_j и показателя адиабаты γ_j в верхней ($z > 0, j = 1$) и нижней ($z < 0, j = 2$) средах отвечают экспоненциально спадающие с ростом высоты z зависимости равновесных плотностей в соответствующих средах

$$\rho_j(z) = \rho_{0j} \exp(-\gamma_j g z / c_j^2)$$

Здесь ρ_{0j} - равновесные плотности сред на границе раздела $z = 0$.

Предположим также, что в нижней среде в точке с координатами $z = 0, r = -h$ расположен источник массы с зависящей от времени t производительностью

$$Q(t) = M(t) \delta(r) \delta(z + h)$$

где $M(t)$ - некоторая функция, характеризующая физические процессы в источнике, $\delta(r)$ и $\delta(z + h)$ - дельта-функции, r - горизонтальное расстояние в цилиндрической системе координат.

С учетом выбранной модели волновой системы линеаризованные уравнения для возмущений давления p'_j в соответствующих средах запишутся в следующем виде [17]:

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N_j^2 \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{c_j^2 \partial t^2} - \Delta \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N_j^2 \right) \times \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\Gamma_j \frac{\partial}{\partial z} \right) \right\} \times \\ \times \exp [g z / c_j^2] p'_j = \rho_j(z) \exp [g z / c_j^2] \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N_j^2 \right)^2 \frac{\partial Q}{\partial t} \delta_{j2} \quad (1)$$

где $\Delta = r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \right]$, $\delta_{j2} = \begin{cases} 0, & j=1 \\ 1, & j=2 \end{cases}$ - символ Кронекера, N_j^2 -

квадрат частоты Брента-Вяйсяля в соответствующей среде, Γ_j - коэффициент Эккарта:

$$N_j^2 = g^2 (\gamma_j - 1) / c_j^2, \quad \Gamma_j = g(2 - \gamma_j) / 2c_j^2.$$

Для однозначного решения задачи необходимо задать граничные условия, выражающие непрерывность нормальной компоненты колебательной скорости v_{zj} и полной производной по времени от суммарного давления $P_j = p_j' + p_j$ на границе раздела $z = 0$:

$$v_{z1} = v_{z2}, \quad \partial p_1' / \partial t - \rho_{01} g v_{z1} = \partial p_2' / \partial t - \rho_{02} g v_{z2}, \quad (2)$$

где p_j - равновесное давление в соответствующей среде. В выражениях (2) удобно воспользоваться уравнением связи возмущений давления и вертикальной компоненты колебательной скорости [17]

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial z} \exp \left\{ \frac{gz}{c_j^2} \right\} p_j' + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + N_j^2 \right) p_j(z) \exp \left\{ \frac{gz}{c_j^2} \right\} v_{zj} = 0. \quad (3)$$

Если теперь от величин p_j' и v_{zj} перейти к их спектральным Фурье-компонентам

$$\bar{p}_j = \int_{-\infty}^{\infty} p_j'(t) \exp(-i \omega t) dt, \quad \bar{v}_{zj} = \int_{-\infty}^{\infty} v_{zj}(t) \exp(-i \omega t) dt$$

то, с использованием (1) - (3) найдем следующие интегральные выражения, описывающие волновые процессы в соответствующих средах:

$$\bar{p}_1 = - \frac{i \rho_{01} \bar{M}(\omega) g^2 \exp(\gamma_2 g h / 2 c_2^2 - \gamma_1 g z / 2 c_1^2) (1 - w_1^2) (1 - w_2^2)}{2 c_2^3 G^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-v_2 \bar{h} - v_1 \bar{z}) H_0^{(2)}(x\bar{r}) x dx}{D_d(x, G)}, \quad (4)$$

$$\bar{v}_{z1} = \frac{\bar{M}(\omega) g^2 \exp(\gamma_2 g h / 2 c_2^2 + \gamma_1 g z / 2 c_1^2) (1 - w_2^2)}{2 c_2^4 G^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} (w_3 - v_1) \times$$

$$\times \frac{\exp(-v_2 \bar{h} - v_1 \bar{z}) H_0^{(2)}(x\bar{r}) x dx}{D_d(x, G)};$$

$$\bar{p}_2 = \frac{i \bar{M}(\omega) \rho_{02} g^2 \exp(\gamma_2 g (\bar{h} - \bar{z}) / 2 c_2^2) (1 - w_2^2)}{4 c_2^3 G^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{D_d \exp(-v_2(\bar{z} + \bar{h})) + D_r \exp(-v_2(\bar{z} - \bar{h}))}{D_d(x, G) v_2} \right] H_0^{(2)}(x\bar{r}) x dx,$$

(5)

$$\bar{v}_{z2} = - \frac{\bar{M}(\omega) g^2 \exp(\gamma_2 g (\bar{h} + \bar{z}) / 2 c_2^2)}{4 c_2^4 G^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_0^{(2)}(x\bar{r}) x}{D_d(x, G) v_2} \times$$

$$\times \left[D_d (w_4 - v_2) \exp(-v_2(\bar{z} + \bar{h})) + D_r (w_4 + v_2) \exp(v_2(\bar{z} - \bar{h})) \right] dx.$$

В (4), (5) использованы следующие безразмерные функции :

$$D_d(x, G) = (w_3 - v_1) [1 - w_2^2 - G (w_4 + v_2)] - R_{12} (w_4 + v_2) \times \\ \times [1 - w_1^2 - G (w_3 - v_1)], \quad (6)$$

$$D_r(x, G) = R_{12} (w_4 - v_2) [1 - w_1^2 - G (w_3 - v_1)] - (w_3 - v_1) \times \\ \times [1 - w_2^2 - G (w_4 - v_2)], \quad (7)$$

$$v_1 = \sqrt{w_3^2 + (x^2 - b^2) (1 - w_1^2)}, \quad v_2 = \sqrt{w_4^2 + (x^2 - 1) (1 - w_2^2)} \quad (8)$$

и безразмерные величины:

$$G = g / \omega c_2, \quad w_1^2 = G^2 b^2 (\gamma_1 - 1), \quad w_2^2 = G^2 (\gamma_2 - 1), \\ w_3 = G b^2 (2 - \gamma_1) / 2, \quad w_4 = G (2 - \gamma_2) / 2, \quad R_{12} = \rho_{01} / \rho_{02}, \\ b = c_2 / c_1, \quad x = c_2 / c_f, \quad \bar{z} = k_2 z, \quad \bar{h} = k_2 h, \quad \bar{r} = k_2 r. \quad (9)$$

Здесь ω - циклическая частота, $\bar{M}(\omega)$ - Фурье-спектр функции $M(t)$, c_f - фазовая скорость волн, $k_2 = \omega / c_2$, $H_0^{(2)}(x\bar{r})$ - функция Ханкеля второго рода.

В рассматриваемой системе основной интерес представляют ее собственные решения - поверхностные волны, которым отвечают полюса подынтегральных выражений (4), (5); поэтому обратимся к анализу соответствующего этим волнам дисперсионного уравнения $D_d(x, G) = 0$, которое с использованием (6) запишется в следующем виде

$$(w_3 - v_1) [1 - w_2^2 - G(w_4 + v_2)] - R_{12} [1 - w_1^2 - G(w_3 - v_1)] \times \\ \times (w_4 + v_2) = 0, \quad (10)$$

а также - коэффициентов возбуждения для давления $K_{pj}(x_s, G)$ и колебательной скорости $K_{vj}(x_s, G)$:

$$K_{p1}(x_s, G) = \frac{\sqrt{x_s} \exp(-v_2(x_s)\bar{h} - v_1(x_s)\bar{z} - \gamma_1 g z / 2 c_1^2)}{G^{3/2} \Phi(x_s, G)} \times \\ \times (1 - w_1^2)(1 - w_2^2), \\ K_{p2}(x_s, G) = \frac{\sqrt{x_s} D_r(x_s) \exp(-v_2(x_s)(\bar{z} - \bar{h}) - \gamma_2 g z / 2 c_2^2)}{v_2(x_s) G^{3/2} \Phi(x_s, G)} \times \\ \times (1 - w_2^2); \quad (11)$$

$$K_{v1}(x_s, G) = \frac{\sqrt{x_s} \exp(-v_2(x_s)\bar{h} - v_1(x_s)\bar{z} + \gamma_1 g z / 2 c_1^2)}{G^{3/2} \Phi(x_s, G)} \times \\ \times (w_3 - v_1)(1 - w_2^2), \\ K_{p2}(x_s, G) = \frac{\sqrt{x_s} D_r(x_s) \exp(-v_2(x_s)(\bar{z} - \bar{h}) + \gamma_2 g z / 2 c_2^2)}{v_2(x_s) G^{3/2} \Phi(x_s, G)} \times \\ \times (w_4 + v_2), \quad (12)$$

через которые выражаются Фурье-компоненты \bar{p}_j и \bar{v}_{zj}

$$\bar{p}_1 \approx - \frac{\bar{M}(\omega) \rho_{01} \exp(\gamma_2 g h / 2c_2^2) \sqrt{2\pi g^3}}{c_2^2 \sqrt{\Gamma}} K_{p1}(x_s, G) \times \exp(-i x_s \bar{\Gamma} + i \pi / 4), \quad (13)$$

$$\bar{p}_2 \approx \frac{\bar{M}(\omega) \rho_{02} \exp(\gamma_2 g h / 2c_2^2) \sqrt{2\pi g^3}}{2c_2^2 \sqrt{\Gamma}} K_{p2}(x_s, G) \times \exp(-i x_s \bar{\Gamma} + i \pi / 4)$$

$$\bar{v}_{z1} \approx - \frac{i \bar{M}(\omega) \exp(\gamma_2 g h / 2c_2^2) \sqrt{2\pi g^3}}{c_2^3 \sqrt{\Gamma}} K_{v1}(x_s, G) \times \exp(-i x_s \bar{\Gamma} + i \pi / 4) \quad (14)$$

$$\bar{v}_{z2} \approx \frac{i \bar{M}(\omega) \exp(\gamma_2 g h / 2c_2^2) \sqrt{2\pi g^3}}{2c_2^3 \sqrt{\Gamma}} K_{v2}(x_s, G) \times \exp(-i x_s \bar{\Gamma} + i \pi / 4)$$

В выражениях (11), (12) функция $\Phi(x_s, G)$ имеет следующий вид:

$$\Phi(x_s, G) = (\partial D_d(x, G) / \partial x)_{x=x_s} = - \frac{x(1-w_1^2)}{v_1} (1-w_2^2 -$$

$$\begin{aligned}
 & -G(w_4 + v_2) + G R_{12}(w_4 + v_2) - \frac{x(1-w_2^2)}{v_2} (G(w_3 - v_1) + \\
 & + R_{12}(1-w_1^2 - G(w_3 - v_1))) \Big|_{x=x_S}
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Отметим, что здесь $x_S = x_S(G)$ - корень дисперсионного уравнения (10), а выражения (13), (14) следуют из (4), (5) при использовании теории вычетов и асимптотики функции Ханкеля при больших значениях аргумента.

Прежде чем приступить к анализу дисперсионных свойств поверхностных волн в двух принципиально различных ситуациях $c_1 > c_2$ и $c_1 < c_2$, которые, как отмечалось во введении, реализуются при соответствующих условиях в природных средах, сделаем некоторое общее замечание относительно дисперсионного уравнения (10). А именно, из (10) следует, что при $\omega = N_1$, т.е. при $w_1^2 = 1$, его левая часть тождественно равно нулю для всех значений $x = x_S$. Однако из этого не следует сделанный в [8] вывод о существовании на одной лишь частоте $\omega = N_1$ при $c_1 > c_2$ поверхностной волны с фазовой скоростью распространения, совпадающей с адиабатической скоростью звука в верхней среде $c_f = c_1(x_S = b)$. Дело в том, что при $\omega = N_1$ одновременно со знаменателем, т.е. с $D_d(x, G)$, тождественно обращаются в нули и числители соответствующих подынтегральных функций в (4), (5), поэтому на этой частоте из (4), (5) получаем следующие выражения:

$$\bar{p}_1 = \frac{i b^2 \rho_{01} \bar{M}(\omega) g^2 \exp(\gamma_2 g h / 2c_2^2 - \gamma_1 g z / 2c_1^2) (\gamma_1 - 1)}{c_2^3 G_1} \times$$

$$\times (1 - w_2^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-v_2(G_1) \bar{h} - v_1(G_1) \bar{z}) H_0^{(2)}(x\bar{r}) x dx}{F_d(x, G_1)}, \quad (16)$$

$$\bar{v}_{z1} = \frac{\bar{M}(\omega) g^2 \exp(\gamma_2 g h / 2c_2^2 + \gamma_1 g z / 2c_1^2) (1 - w_2^2)}{2 c_2^4 G_1^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{v1}(x, G_1) H_0^{(2)}(x\bar{r}) x dx}{F_d(x, G_1)};$$

$$\bar{p}_2 = \frac{i \bar{M}(\omega) \rho_{02} g^2 \exp(\gamma_2 g (\bar{h} - \bar{z}) / 2c_2^2) (1 - w_2^2)}{4 c_2^3 G_1^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{p2}(x, G_1) H_0^{(2)}(x\bar{r}) x dx}{v_2(x, G_1) F_d(x, G_1)}, \quad (17)$$

$$\bar{v}_{z2} = - \frac{\bar{M}(\omega) g^2 \exp(\gamma_2 g (\bar{h} + \bar{z}) / 2c_2^2)}{4 c_2^4 G_1^2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{v2}(x, G_1) H_0^{(2)}(x\bar{r}) x dx}{v_2(x, G_1) F_d(x, G_1)},$$

где с целью сокращения записи подынтегральных функций введены следующие обозначения:

$$F_d(x, G_1) = [1 - w_2^2 - G_1(w_4 + v_2(G_1))] \varphi_1(x) + G_1 R_{12} \times \\ \times (w_4 + v_2(G_1)) \varphi_2(x),$$

$$F_{v1} = \exp(-v_2(G_1)\bar{h} - v_1(G_1)\bar{z}) \varphi_1(x),$$

$$F_{p2} = F_d(x, G_1) \exp(-v_2(G_1)(\bar{z} + \bar{h})) + \\ + F_r(x, G_1) \exp(v_2(G_1)(\bar{z} - \bar{h})),$$

$$F_{v2} = F_d(x, G_1)(w_4 - v_2(G_1)) \exp(-v_2(G_1)(\bar{z} + \bar{h})) \\ + F_r(x, G_1) \times (w_4 + v_2(G_1)) \exp(v_2(G_1)(\bar{z} + \bar{h}))$$

$$F_r(x, G_1) = -G_1 R_{12}(w_4 - v_2(G_1)) \varphi_2(x) - \left[1 - w_2^2 - \right. \\ \left. - G_1(w_4 - v_2(G_1)) \right] \varphi_1(x), \quad (18)$$

$$\varphi_1(x) = b^2(2 - \gamma_1)/2 - [b^2\gamma_1^2/2 - 2x^2(\gamma_1 - 1)] / (2 - \gamma_1)$$

$$\varphi_2(x) = b^2(3\gamma_1 - 2)/2 - [b^2\gamma_1^2/2 - 2x^2(\gamma_1 - 1)] / (2 - \gamma_1)$$

$$G_1 = 1/b \sqrt{\gamma_1 - 1}.$$

Непосредственной подстановкой значения $x = b$ в выражение для $F_d(x, G_1)$ (18) можно убедиться, что последнее не обращается в нуль:

$$F_d(b, G_1) = \frac{b^2 \gamma_1 (3\gamma_1 - \gamma_1^2 - 2)}{\gamma_2 (\gamma_1 - 1) (2 - \gamma_1)} [2 - \gamma_2 + \\ + \sqrt{\gamma_2^2 - 4b^2(\gamma_2 - 1) + 4b^2(\gamma_1 - 1)(b^2 - 1)}] \neq 0 \quad (19)$$

Из сказанного (см. (16), (17), (19)) следует, что на частоте $\omega = N_1$ фазовая скорость распространения поверхностной волны не может совпадать с адиабатической скоростью звука в верхней среде $c_f = c_2 / \chi_s(G_1) \neq c_1$ и, как будет показано чуть ниже, при $c_1 > c_2$ заметно меньше ее $0 < c_f < c_1$ во всем диапазоне частот.

Обратимся теперь к изучению дисперсионных свойств и частотных зависимостей коэффициентов возбуждения поверхностных волн в конкретных ситуациях - $c_1 > c_2$ и $c_1 < c_2$.

Рассмотрим сначала первый случай, который реализуется в атмосфере Земли на высотах термосферы $b^2 = 0.3$, а также - в атмосфере Солнца, при переходе из хромосферы в корону $b^2 = 0.025$. Здесь сразу следует обратить внимание на весьма важное обстоятельство, которое не было учтено в [8]. А именно, в этом случае уравнения состояния граничащих сред имеют одинаковый вид

$$P_j = \frac{\rho_j c_j^2}{\gamma_j} \left[(1 + \rho'_j / \rho_j)^{\gamma_j} - 1 \right] + p_j, \quad (20)$$

где ρ'_j - возмущение плотности в волне и, что очень важно,

$\rho_j = \rho_j c_j^2 / \gamma_j$. Тогда из равенства равновесных давлений на границе раздела сред

$$p_1(z=0) = p_{01} = p_{02} = p_2(z=0), \quad (21)$$

выражающего условие статического равновесия сред в поле тяжести, с использованием (20) находим, что величина отношения равновесных плотностей R_{12} на границе раздела сред взаимосвязана с соответ-

ствующими величинами отношений адиабатических скоростей звука и показателей адиабат:

$$R_{12} = \rho_{01} / \rho_{02} = \frac{c_2^2}{c_1^2} (\gamma_1 / \gamma_2) = b^2 \frac{\gamma_1}{\gamma_2}. \quad (22)$$

Поэтому в рассматриваемом случае ($c_1 > c_2$) будем анализировать дисперсионное уравнение (10), в котором величина R_{12} определена равенством (22). При этом удобно предварительно определить на плоскости $c_f - \omega$ области, в которых имеет смысл искать решения такого уравнения (10).

Поскольку в поверхностных волнах возмущения давления экспоненциально спадают при удалении от границы раздела сред, то должны выполняться условия $v_j^2 > 0$. Это означает, что из равенств $v_j^2 = 0$ можно найти зависимости фазовых скоростей $c_{jf}(\omega)$, определяющие на плоскости $c_f - \omega$ границы областей существования поверхностных волн:

$$c_{1f} = c_2 \sqrt{\frac{1 - w_1^2}{b^2 (1 - w_1^2) - w_3^2}}, \quad (23)$$

$$c_{2f} = c_2 \sqrt{\frac{1 - w_2^2}{1 - w_2^2 - w_4^2}}. \quad (24)$$

Из (23), (24) нетрудно получить характерные асимптотические значения для c_{jf}

$$c_{jf} = \begin{cases} c_{0j}, \omega \rightarrow 0 \\ 0, \omega \rightarrow N_j \\ \infty, \omega \rightarrow \omega_{ja} \\ c_j, \omega \rightarrow \infty \end{cases}, \quad (25)$$

где максимальные скорости внутренних гравитационных волн c_{0j} и частоты отсечки акустико-гравитационных волн ω_{ja} в соответствующих изотермических средах определяются известными соотношениями [18]:

$$\begin{aligned} c_{0j} &= 2c_j \sqrt{\gamma_j - 1} / \gamma_j \\ \omega_{ja} &= \gamma_j g / 2c_j \end{aligned} \quad (26)$$

На рис. 1а приведены граничные зависимости $c_{jf}(\omega)$ и отмечены запрещенные для $c_f(\omega)$ области.

С учетом сказанного выше относительно допустимой области значений для $c_f(\omega)$ и с использованием (10), (22) были выполнены численные расчеты частотных зависимостей фазовой $c_f(\omega)$ и групповой $c_g(\omega)$ скоростей распространения поверхностных волн при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 1.4$ и различных значениях параметра b . Из приведенных на рис. 1б соответствующих результатов численного моделирования можно сделать следующие выводы.

Во-первых, зависимости $c_f(\omega)$ и $c_g(\omega)$ являются непрерывными для условий распространения в земной атмосфере. При этом $c_f(\omega)$ на достаточно низких частотах $\omega < \omega_{2a}$ стремится к значе-

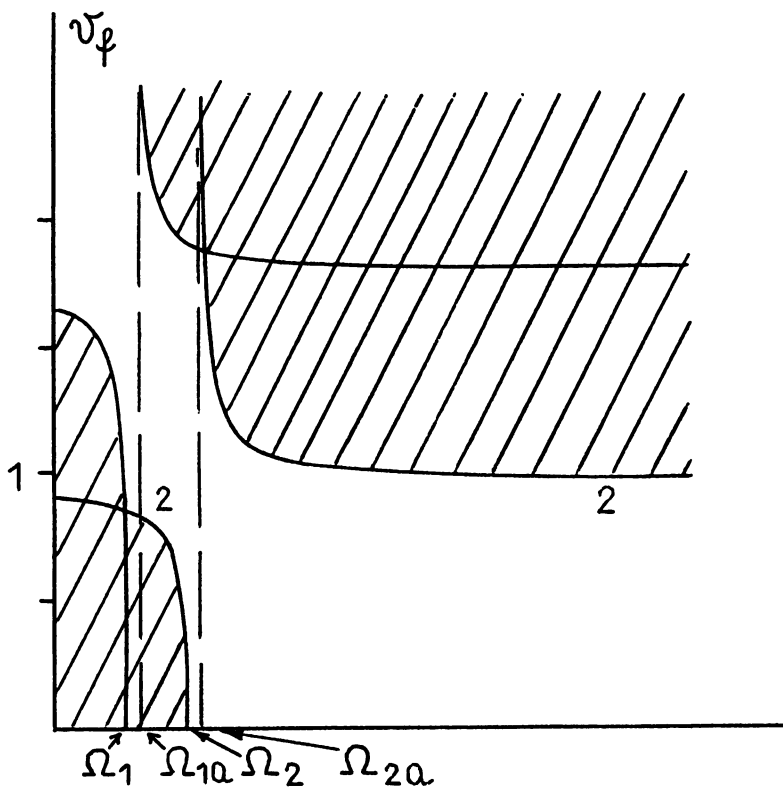


Рис. 1 а Нормированные зависимости от безразмерной частоты $\Omega = \omega c_2 / g$ - граничных значений фазовых скоростей $v_f = c_{j1} / c_2$ при $j=1$ (кривая 1) и $j=2$ (кривая 2), отделяющих "запрещенные" (заштрихованная часть) и "разрешенные" области существования поверхностных волн на плоскости $c_f - \omega$ для условий, реализуемых в атмосфере Земли $b^2 = 0.3$, где $\Omega_{ja} = \omega_{ja} c_2 / g$, $\Omega_j = N_j c_2 / g$.

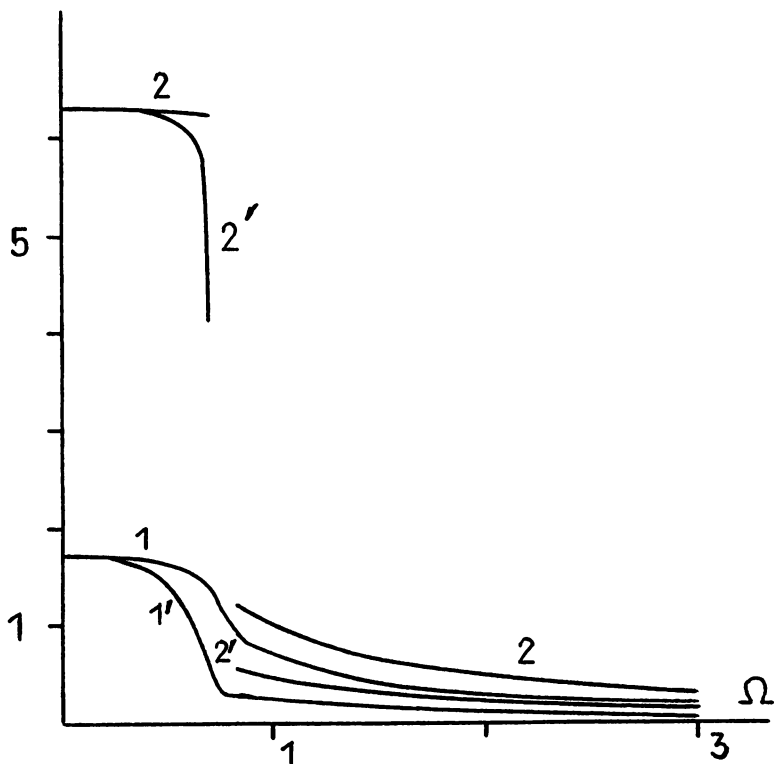


Рис. 16. Нормированные зависимости от безразмерной частоты $\Omega = \omega c_2 / g$ - фазовых $v_f = c_f / c_2$ (кривые 1, 2) и групповых $v_g = c_g / c_2$ (кривые 1', 2') скоростей поверхностных волн для условий, реализуемых в атмосферах Земли $b^2 = 0.3$ (кривые 1, 1') и Солнца $b^2 = 0.025$ (кривые 2, 2').

нию, чуть меньшему c_1 , а на относительно высоких частотах $\omega \gg \omega_{2a}$ ее поведение незначительно отличается от присущего гравитационной поверхностной волне $c_f(\omega) \propto g/\omega$.

Во-вторых, с увеличением адиабатической скорости звука в верхней среде, т.е. с уменьшением параметра b^2 , темп возрастания $c_f(\omega)$ в диапазоне низких частот $0 \leq \omega < \omega_{2a}$ (приблизительно пропорциональный $1/b$) заметно превышает темп возрастания $c_f(\omega)$ в диапазоне относительно высоких частот $\omega > \omega_{2a}$. В результате этого, начиная с определенного значения параметра b^2 , зависимость $c_f(\omega)$ в определенном диапазоне частот $\omega_{1c} < \omega < \omega_{2c}$ "заходит" в запрещенную для нее область (см. рис. 1 а, б), где волна становится вытекающей, вследствие излучения ею акустико-гравитационных волн в нижнюю среду. Поэтому поверхностной волне в атмосфере Солнца соответствуют две ветви одной зависимости $c_f(\omega)$ - низкочастотная при $0 \leq \omega \leq \omega_{1c}$ и высокочастотная при $\omega_{2c} \leq \omega < \infty$. Значения же характерных критических частот $\omega_{jc}(b, \gamma)$ находятся из уравнения

$$D_d(x_2, G) = 0, \quad (27)$$

следующего из (10), (22) при $x = x_2(G) = c_2/c_{2f}$, численные решения которого находятся в диапазоне частот $\omega > \omega_{2a}$. Здесь следует отметить, что в [8], где с самого начала - в исходных уравнениях движения граничащих сред - показатель адиабаты считал-

ся неизменным $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, сделано ошибочное утверждение о существовании в отсутствии скачка плотности ($\rho_{01} = \rho_{02}$) в диапазоне

частот $\sqrt{\frac{2}{\gamma}} \omega_{1a} < \omega < \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \omega_{a2}$ поверхностной волны, частотная

зависимость фазовой скорости которой в точности совпадает с аналогичной для волн на глубокой воде: $c_f(\omega) = g/\omega$. В самом деле, при

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\rho_{01} = \rho_{02}$ и $c_1 \neq c_2$ из (22) следует, что должно нарушаться условие статического равновесия границы раздела сред (21), находящихся в поле тяжести, поскольку $\rho_{01} \neq \rho_{02}$. Представляется вполне естественным при $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\rho_{01} = \rho_{02}$ и необходимом условии равновесия $\rho_{01} = \rho_{02}$ (21), которое предполагалось в [8], потребовать также выполнения равенства адиабатических скоростей звука в граничащих средах $c_1 = c_2$. Последнее же означает, что при сформулированных в [8] условиях не имеет смысла говорить о какой-либо границе раздела сред и, тем более, о распространяющейся вдоль нее поверхностной волне.

Ситуация, при которой $\rho_{01} = \rho_{02}$, $\rho_{01} = \rho_{02}$ и $c_1 \neq c_2$ возможна лишь при различном газовом составе граничащих сред, т.е. когда $\gamma_1 \neq \gamma_2$. В этом случае из (22) следует равенство

$$b^2 = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 = \gamma_2 / \gamma_1, \quad (28)$$

из которого видно, что при реально возможных для газов значениях показателей адиабат: $1 < \gamma_1 \leq 1.4$ и $1 < \gamma_2 \leq 1.4$, не удастся достичь заметных различий в значениях соответствующих им скоростей звука c_1, c_2 , и, тем самым, смоделировать условия распространения, характерные для атмосферы Земли и Солнца. Однако, как показали численные расчеты, даже при следующем из (28) - возможном - отношении скоростей звука в граничащих средах, дисперсионное уравнение (10) не имеет действительных решений, которые, как известно, только и отвечают поверхностным волнам.

Таким образом, для существования поверхностных волн на границе раздела газообразных сред, находящихся в поле тяжести, необходимо наличие скачка плотности при переходе через нее.

Кроме $c_f(\omega)$ и $c_g(\omega)$, были также проведены численные расчеты частотных зависимостей коэффициентов возбуждения поверхностных волн для возмущения давления $K_{pj}(\omega)$ (11) и колебательной скорости $K_{vj}(\omega)$ (12). Из приведенных на рис. 2 результатов расчетов $|K_{pj}(\omega)|$ и $|K_{vj}(\omega)|$ можно сделать следующие выводы.

Во-первых. В целом зависимости $|K_{pj}(\omega)|$ и $|K_{vj}(\omega)|$ повторяют друг друга с тем лишь различием, что коэффициент возбуждения для колебательной скорости принимает несколько большие значения по сравнению с аналогичной величиной для возмущения давления.

Во-вторых. В коэффициентах возбуждения имеются два максимума, из которых наиболее существенный по величине расположен на относительно более высокой частоте. С увеличением адиабатической скорости звука в верхней среде ширина обоих максимумов возрастает,

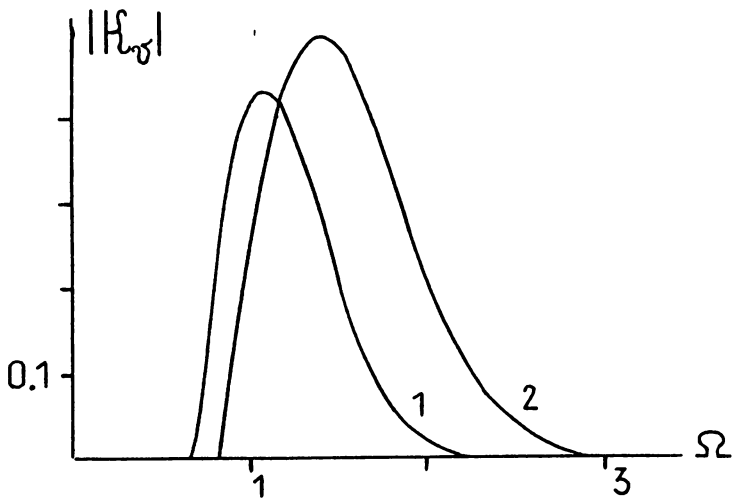
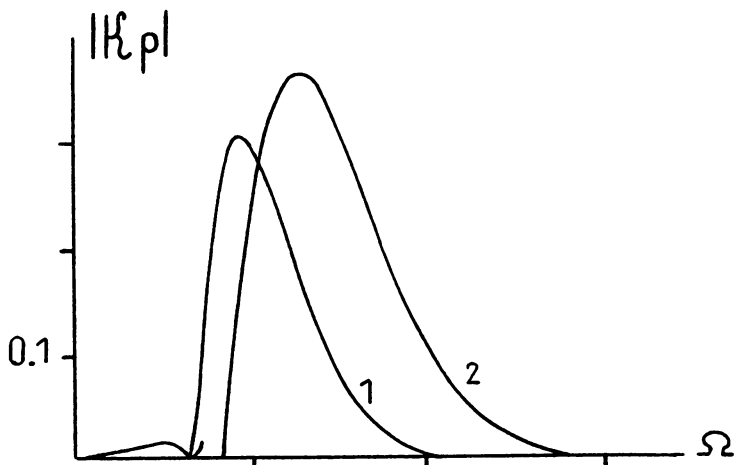


Рис.2. Зависимости от безразмерной частоты $\Omega = \omega c_2 / g$ коэффициентов возбуждения поверхностных волн для возмущения давления $|K_p|$ - а) и вертикальной компоненты колебательной скорости $|K_v|$ - б), рассчитанные при $\bar{h} = 1, \bar{z} = 0$ для условий, реализуемых в атмосферах Земли $b^2 = 0.3$ (кривая 1) и Солнца $b^2 = 0.025$ (кривая 2).

при этом абсолютный максимум смещается в диапазон более высоких частот, а относительный - более низких.

Рассмотрим теперь случай $c_1 < c_2$, причем лишь для одной конкретной модели, а именно, границы раздела океана с атмосферой, которая достаточно подробно в различных приближениях исследовалась в [9 - 11, 19].

Здесь сразу следует обратить внимание на тот факт, что уравнение состояния жидкости, хотя и имеет аналогичный для газа вид (20), однако принципиально отличается от последнего неравенством $\rho_2 \neq \rho_2 c_2^2 / \gamma_2$ [20]. Поэтому из условия статического равновесия границы раздела сред (21), находящихся в поле тяжести, уже не следует соотношение (22), использование которого в данном случае привело бы к физически нереализуемой ситуации $\rho_{01} > \rho_{02}$. Последнее означает, что величина R_{12} в дисперсионном уравнении (10) задается уже в определенной степени независимо от отношения скоростей звука в соответствующих средах.

В дальнейшем при численных расчетах будут использованы следующие значения термодинамических и акустических параметров соответствующих сред: $\gamma_1 = 1.4$, $\gamma_2 = 7$, $c_1 = 340$ м/с, $c_2 = 1500$ м/с и

$R_{12} = 10^{-3}$ [9 - 11, 19]. Однако, прежде чем приступить к численному решению уравнения (10), остановимся на обсуждении некоторых приближенных результатов его анализа, которые уже качественно позволяют представить ожидаемую картину явлений в целом.

Как известно [6, 18, 19], в изотермической атмосфере с абсолютно жесткой нижней границей ($R_{12} = 0$) распространяется поверхностная

волна Лэмба с фазовой скоростью $c_f(\omega) = c_L$, совпадающей с адиабатической скоростью звука $c_L = c_1$; в отсутствие же атмосферы на свободной границе жидкости существует гидродинамическая гравитационная поверхностная волна с фазовой скоростью $c_G = g/\omega$ [21]. Естественно ожидать, что влияние конечного - малого - значения $R_{12} \ll 1$ должно лишь незначительно скорректировать эти результаты. В самом деле, оказалось, что, например, без учета влияния силы тяжести на динамику жидкости ($g = 0, \gamma_2 = 0$) поверхностная волна Лэмба становится незначительно сверхзвуковой $c_L(\omega)/c_1 - 1 \ll 1$ и существует лишь ниже определенной критической частоты $\omega < \omega_L$ [19]. Казалось бы, что учет влияния силы тяжести на динамику жидкости должен привести, по сравнению с [19], лишь к появлению гидродинамической гравитационной волны с незначительно отличающейся от g/ω зависимостью $c_G(\omega)$, которая бы на определенной частоте $\omega = \omega_p \approx g/c_1$ пересекалась с также незначительно измененной зависимостью $c_L(\omega)$. Однако, такое физически вполне оправданное предположение, сделанное в [9], не подтверждают приведенные на рис. 3 результаты численного решения дисперсионного уравнения с принятыми здесь значениями параметров граничащих сред.

В самом деле, как видно (см. рис.3), в рассматриваемой системе, как и при $\gamma_2 = 0$ в [9], существуют две поверхностные волны, но с такими зависимостями фазовых скоростей $c_f(\omega) = c_1 S(\omega)$ и

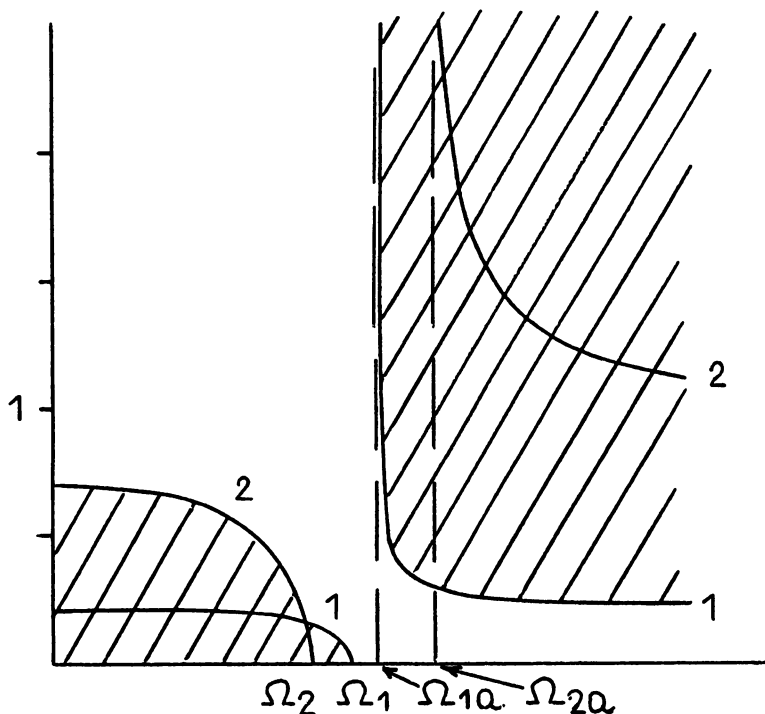


Рис.3 а Рассчитанные для условий, реализуемых на границе раздела океана с атмосферой нормированные зависимости от безразмерной частоты $\Omega = \omega c_2 / g$ граничных значений фазовых скоростей $v_f = c_{jf} / c_2$ при $j=1$ (кривая 1) и $j=2$ (кривая 2), отделяющие “запрещенные” (заштрихованная часть) и “разрешенные” области существования поверхностных волн на плоскости $c_f - \omega$, где $\Omega_{j\alpha} = \omega_{j\alpha} c_2 / g$, $\Omega_j = N_j c_2 / g$.

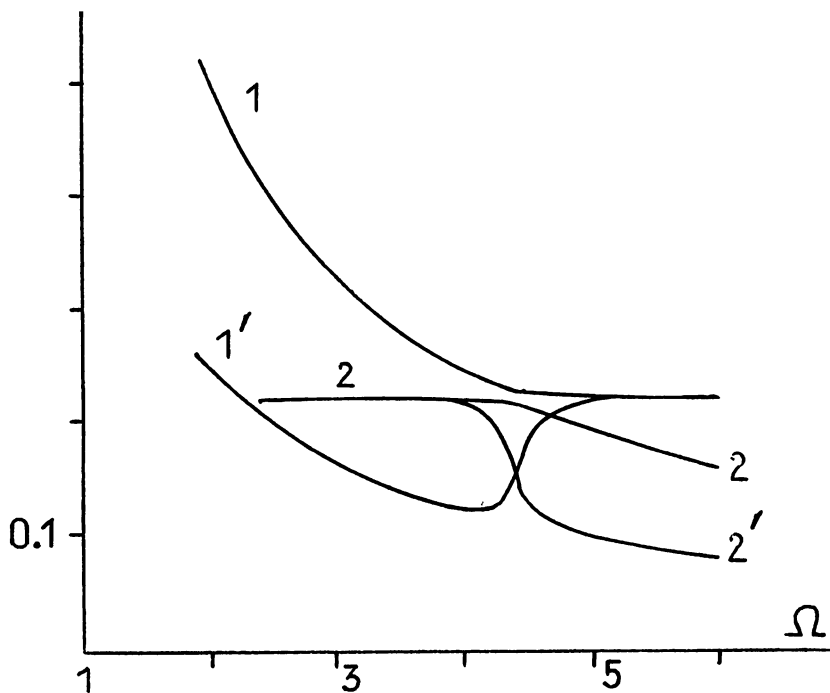


Рис.36. Рассчитанные для условий, реализуемых на границе раздела океана с атмосферой нормированные зависимости от безразмерной частоты $\Omega = \omega c_2 / g$: фазовых $v_f = c_f / c_2$ (кривые 1, 2) и групповых $v_g = c_g / c_2$ (кривые 1', 2') скоростей высокоскоростной $c_f = c_1 S$ (кривые 1, 1') и низкоскоростной $c_f = c_2 S$ (кривые 2, 2') поверхностных волн.

с $f(\omega) = c_{2S}(\omega)$, которые предполагают своеобразное пере замыкание зависимостей $c_L(\omega)$ и $c_G(\omega)$. Действительно, у высокоскоростной поверхностной волны зависимость $c_{1S}(\omega)$ "состоит" из низкочастотной ветви $c_G(\omega)$ и высокочастотной ветви $c_L(\omega)$, в то время как у низкоскоростной - $c_{2S}(\omega)$ - наоборот, из низкочастотной ветви $c_L(\omega)$ и высокочастотной $c_G(\omega)$. При этом, как показали численные расчеты (см. рис. 3), следующая из (6), (15) система уравнений

$$\begin{cases} D_d(x, G) = 0 \\ \Phi(x, G) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

не имеет общих решений, что означает отсутствие точек пересечения у зависимостей $c_{1S}(\omega)$ и $c_{2S}(\omega)$.

Таким образом, несмотря на весьма малую величину R_{12} , взаимное влияние атмосферы и океана приводит, тем не менее, к пере замыканию характерных для каждой из этих сред в отдельности зависимостей $c_L(\omega)$ и $c_G(\omega)$.

Кроме этого, наряду с критической частотой ω_L [9, 19], значение которой незначительно отличается от приведенного в [9, 19], и ниже которой существует высокоскоростная поверхностная волна с $c_{1S}(\omega)$, появляются дополнительные критические частоты как у нее, так и у низкоскоростной поверхностной волны с $c_{2S}(\omega)$. А именно, в диапазоне частот $0 \leq \omega < \omega_{1S}$ волна с $c_{1S}(\omega)$, а - $0 \leq \omega < \omega_{2S}$ волна с $c_{2S}(\omega)$ будут вытекающими, вследствие переизлучения ими внутренних гравитационных волн в океан. Значения же соответствующих

критических частот $\omega_{1S} < \omega_{2S}$ находятся из дисперсионного уравнения (10) $D_d(x_2, G) = 0$ при $x = x_2 = c_2 / c_{2f}$ и $\omega < N_2$. Поскольку же $c_{2S}(\omega) \approx c_1$ при $\omega \rightarrow N_2$, то приближенное выражение для критической частоты ω_{2S} низкоскоростной поверхностной волны можно найти из уравнения $c_{2f} \approx c_1$:

$$\omega_{2S} \approx \omega_{2a} \sqrt{[4b^2(\gamma_2 - 1) / \gamma_2^2 - 1] / [b^2 - 1]} \quad (30)$$

С использованием полученных для $c_{1S}(\omega)$ и $c_{2S}(\omega)$ результатов были рассчитаны частотные зависимости коэффициентов возбуждения соответствующих поверхностных волн (11), (12) (см. рис. 4). При этом оказалось, что, несмотря на отсутствие пересечения у $c_{1S}(\omega)$ и $c_{2S}(\omega)$ в коэффициентах возбуждения для возмущения давления присутствует весьма узкий максимум вблизи той же, что и в [9], частоты $\omega_p \approx g / c_1$, поскольку зависимости $c_{1S}(\omega)$ и $c_{2S}(\omega)$ наиболее близко подходят друг к другу именно на этой частоте (см. рис. 3, 4).

Относительно рассмотренной ситуации $c_1 < c_2$ остается отметить лишь следующее. Как это и было сделано в [9], из вполне очевидных физических соображений следовало бы отнести низкочастотную - $\omega < \omega_p$ у $c_{1S}(\omega)$ и высокочастотную - $\omega > \omega_p$ у $c_2(\omega)$ ветви к одной зависимости - $c_G(\omega)$, характерной для гидродинамической гравитационной поверхностной волны, аналогично как и низкочастотную $\omega < \omega_p$ у $c_{2S}(\omega)$ и высокочастотную $\omega > \omega_p$ у $c_{1S}(\omega)$ ветви к другой зависимости - $c_L(\omega)$, характерной для атмосферной модифицированной поверхностной волны Лэмба. Последнее означало

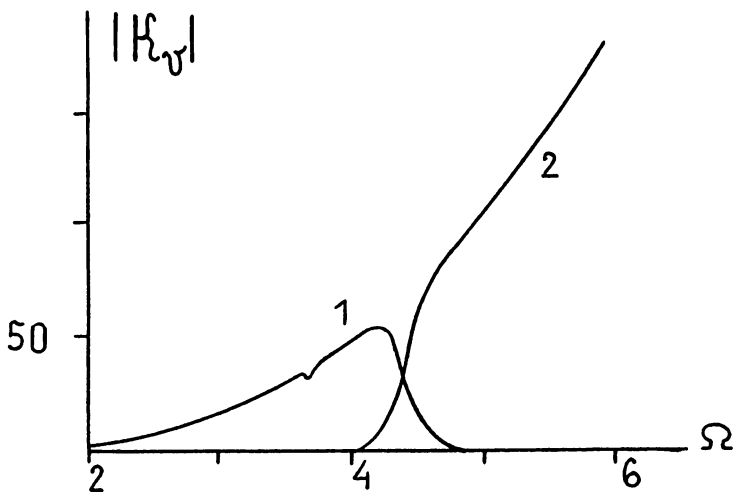
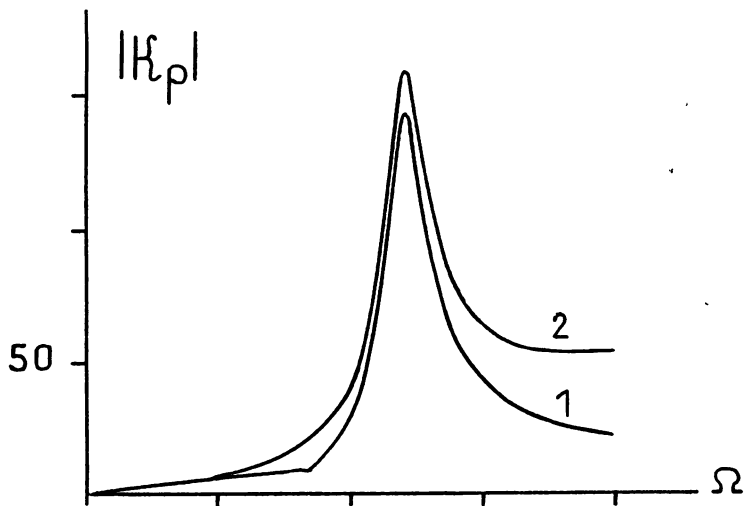


Рис.4. Зависимости от безразмерной частоты $\Omega = \omega c_2 / g$ коэффициентов возбуждения высокоскоростной с $c_f = c_1$ (кривая 1) и низкоскоростной с $c_f = c_2$ (кривая 2) поверхностных волн для возмущения давления $|K_p|$ - а) и вертикальной компоненты колебательной скорости $|K_v|$ - б), рассчитанные при $h = 75$ м, $z = 0$ для условий, реализуемых на границе раздела атмосферы и океана.

бы пересечение зависимостей $c_{1S}(\omega)$ и $c_{2S}(\omega)$, а значит, появление в коэффициентах возбуждения слагаемых, возрастающих пропорционально \sqrt{g} и нарушающих принцип излучения Зоммерфельда [9]. По-видимому, все отмеченные выше противоречия автоматически устранятся при введении в рассматриваемую систему потерь (из-за вязкости или теплопроводности), поскольку только тогда пересечение реальных частей этих зависимостей $\text{Re}[c_{1S}(\omega)]$, $\text{Re}[c_{2S}(\omega)]$, а может быть, одновременно с ними - и мнимых их частей $\text{Im}[c_{1S}(\omega)]$, $\text{Im}[c_{2S}(\omega)]$, не приведет к нарушению принципа излучения Зоммерфельда, так как в коэффициентах возбуждения появятся экспоненциально спадающие с расстоянием множители. Однако такая задача является предметом исследования уже другой работы.

В заключении кратко сформулируем основные результаты настоящей работы.

Во-первых. Для условий, реализуемых в атмосфере Земли и Солнца, определены частотные зависимости фазовых и групповых скоростей, а также коэффициентов возбуждения точечным источником массы поверхностных волн, распространяющихся вдоль границы раздела находящихся в поле тяжести изотермических газообразных сред с различными значениями термодинамических параметров.

Во-вторых. Установлены диапазоны частот, в которых существуют либо поверхностные, либо вытекающие волны, переизлучающие акустико-гравитационные или внутренние гравитационные волны в соответствующие среды.

Полученные здесь результаты принципиально уточняют утверждения, сделанные в [8] , а также существенно дополняют исследования, проведенные в [9-11] .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-02-16116-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tolstoy I. The theory of waves in stratified fluids including the effects of gravity and rotation // *Rev. Mod. Phys.* 1963. V. 35. N 1. P. 207-230.
2. Tolstoy I. Long-period gravity waves in the atmosphere // *J. Geophys. Res.* 1967. V. 72. N 18. P. 4605-4622.
3. Thome G.D. Long-period waves generated in the polar ionosphere during in onset of magnetic storm // *J. Geophys. Res.* 1968. V. 73. N 19 . P. 6319-6336.
4. Francis S.H. Global propagation of atmospheric gravity waves : a review // *J. Atm. Terr. Phys.* 1975. V. 37. N 6-7. P. 1011-1058.
5. Liu C.H., Yeh K.C. Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere // *Revs. Geophys. space Phys/* 1974. V. 12. N 2. P. 193-216.
6. Госсард Э.Э., Хук У.Х. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1978. 532 с.
7. Осташев В.Е. Малые колебания атмосферы для одной модели стратификации температуры // *Изв. АН СССР. ФАО.* 1983. Т. 19. № 2. С. 115-123.
8. Савина О.Н. Поверхностные волны на перепаде атмосферной температуры // *Изв. РАН. ФАО.* 1997. Т. 33 № 1. С. 48-52.
9. Гасилова Л.А., Гордеева И.Ю., Петухов Ю.В. Возбуждение модифицированной поверхностной волны Лэмба в атмосфере подводным источником // *Акуст. журн.* 1992. Т. 38. № 6. С. 1037-1043.

10. Гасилова Л.А., Петухов Ю.В. Влияние гравитационной волны в океане на возбуждение атмосферных поверхностных волн подводным источником // Акуст. журн. 1993. Т. 39. № 5. С. 810-823.
11. Гасилова Л.А., Петухов Ю.В. Влияние термосферы на возбуждение атмосферных поверхностных волн подводным источником // Препринт НИРФИ № 427. Нижний Новгород, 1996. 32 с.
12. Гибсон Э. Спокойное Солнце М. : Мир, 1977. 408 с.
13. Jones W.L. Non-divergent oscillations in the solar atmosphere // Solar Physics. 1969. V. 7. N 1. P. 204-209.
14. Gouch D.O., Rosenthal C.S. The solar f-mode as an interfacial mode at the atmosphere-corona transition // Astrophys. J. 1994. V. 423. N 2. Pt. 1.P. 488-495.
15. Antia H.M., Chitre S.M., Ghosh P. Seismology of the solar f-mode. 1. Basic signatures of shearing velocity fields // Astrophys. J. 1995. V. 451. N 2. Pt. 1. P. 851-858.
16. Bildsten L., Ushomirsky G. Ocean g-mode on rotation neutron stars // Astrophys. J. 1996. V. 460. N 2. Pt.1. P. 827-831.
17. Осташев В.Е. Уравнение для акустических и гравитационных волн в стратифицированной движущейся среде // Акуст.журн. 1987. Т. 32. № 1. С. 150-152.
18. Голицын Г.С., Кляцкин В.И. Колебания в атмосфере, вызываемые движениями земной поверхности // Изв. Ан СССР. ФАО. 1967. Т. 3. № 10. С. 1044-1052.
19. Петухов Ю.В. К теории поверхностных волн Лэмба, Стоунли-Шолтэ и Рэля, распространяющихся вдоль границы раздела Земля-атмосфера // Акуст. журн. 1992. Т. 38. № 4. С. 738-744.

20. Станюкович К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М. Наука, 1971. 854 с.
21. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.