Нижегородский научно-исследовательский
радиофизический институт
Министерства общего и профессионального образования
Российской Федерации

Препринт № 443

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ПЕРЕФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ И ДИФРАКЦИОННАЯ ФОКУСИРОВКА АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ

Ю.В.Петухов

Нижний Новгород, 1998

Ю.В.Петухов

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ПЕРЕФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ СТРУКТУРЫ И ДИФРАКЦИОННАЯ ФОКУСИРОВКА АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ // Препринт № 443 . Нижний Новгород: НИРФИ, 1998. - 37 стр.

УДК 534.231.1

Показано, что периодическое по трассе океанического волновода переформирование пространственной (по глубине и горизонтальному расстоянию) интерференционной структуры акустического поля, генерируемого точечным источником тонального излучения, сопровождается его дифракционной фокусировкой с соответствующим пространственным периодом. Установлено, что в океанических волноводах с монотонной угловой зависимостью длины цикла бриллюэновских лучей пространственный период переформирования интерференционной структуры поля и его дифракционной фокусировки пропорционален квадрату характерного вертикального масштаба соответствующего волновода и обратно пропорционален длине волны излучения, а в волноводах с немонотонной зависимостью, имеющей экстремумы, - пропорционален кубу этого масштаба и обратно пропорционалсн квадрату длины волны излучения.

Yu.V.Petukhov

THE PERIODICAL SPATIAL REFORMING OF INTERFERENCE STRUCTURE AND DIFFRACTION FOCUSING OF ACOUSTIC FIELD IN OCEANIC WAVEGUIDES // Preprint N 443. Nizhny Novgorod, 1998. - 37 p.

It was shown that periodical along the path reforming of spatial (from the depth and horizontal distance) interference structure of acoustic field generated by point tone source is accompanied by it's diffraction focusing with corresponding spatial period in oceanic waveguide. It was stated that in oceanic waveguides with monotonous angle dependence of Brilluen ray cycle the spatial period of interference field structure reforming and it's diffraction focusing is proportional to the square of waveguide's characteristic scale and inversely proportional to the wavelength; in waveguides with non-monotonous angle dependence of ray cycle such period is proportional to the cube of thise scale and inversely proportional to the square of wavelength.

Поскольку обсуждаемые в настоящей работе акустические явления в океанических волноводах взаимосвязаны с аналогичными электромагнитными явлениями в оптике, то представляется важным их сопоставление на протяжении всего изложения материала. Поэтому во введении обратим внимание на весьма важное оптическое явление, которое, как отмечалось в [1-4], еще в 1836 году обнаружил Тэлбот, заключающееся в том, что при освещении плоской решетки с периодической прозрачностью параллельным пучком света на определенном расстоянии в отраженном свете наблюдается "самоотражение" решетки, т.е. появляется ее изображение. Объяснение этому явлению дал в 1881 году Релей (см. также [1-4]), который показал, что при нормальном падении параллельного пучка света с длиной волны λ на дифракционную решетку с периодом d в отраженном свете возникает множество ее изображений на соответствующих значениям $\lambda / d << 1$ горизонтальных расстояниях:

$$r_m = R_d \, m \, , \tag{1}$$

$$R_d = 2 d^2 / \lambda \, , \tag{2}$$

где $m=1,2, \ldots$ - номер изображения. Это же явление, но в пучках света, прошедших через объекты с периодической прозрачностью, исследовалось затем достаточно подробно теоретически и экспериментально в [1-4].

Существующая же прямая аналогия между представлением поля плоского светящегося периодического объекта в свободном пространстве и точечного источника в изоскоростном волноводе с идеально отражающими границами раздела, а именно, представление его в виде суммы вкладов от мнимых источников (одномерной светящейся решетки) [5-8], позволяла, казалось бы, с очевидностью сделать вывод о периодическом формировании изображений источника в соответствующих оптических [5-8] и акустических [9-12] волноводах. При точечном источнике тонального излучения такие изображения отвечали бы фокусировкам поля на соответствующих расстояниях. Однако, эти явления были заново обнаружены при изучении распространения электромагнитных волн в многомодовых оптических [5-8] и акустических волн в многомодовых акустических [9-12] волноводах, причем независимо друг от друга и от результатов работ [1-4]. Хотя следует отметить, что в [12], безотносительно к [1-4], указывалось на возможные аналогии с фокусировкой поля зонной пластинкой в оптике и линейной излучающей антенной бесконечной длины, составленной из мнимых источников.

В [5,12] соответствующее (1) выражение для горизонтальных расстояний

$$r_m = R_H m \quad , \tag{3}$$

$$R_H = 8H^2/\lambda \quad , \tag{4}$$

на которых формируются изображения источника, т.е фокальные области, в изоскоростном волноводе с поперечным размером H были определены в параксиальном приближении (для мод низких номеров с малым углами скольжения) из аналогичного [1-4] условия синфазного сложения мод при $r = r_m$; вследствие чего поперечные сечения волновода на этих расстояниях $r = r_m$ названы в [5] синфазными. Здесь следует обратить внимание на то, что, как отмечалось в [12], в изоскоростном водном слое выражение для пространственного периода фокусировки поля R_H (4) имеет место лишь при условии расположения источника и приемника на одинаковых глубинах; при произвольном же относительном расположении корреспондирующих точек по глубине волновода фокусировки поля появляются с периодом, в два раза меньшим, чем (4)

$$R_H = 4H^2/\lambda \ . \tag{5}$$

Как следует из (4), (5), изоскоростные волноводы способны передавать лишь монохроматические изображения, поэтому фокусировка полей, генерируемых точечными источниками, будет заметно проявляться в соответствующих оптических [5] и акустических [12] волноводах лишь при тональном излучении. Вполне естественно, что хроматическая аберрация в таких волноводах приведет к расплыванию фокальных областей в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Передача же цветовых изображений в оптических [13-17] и широкополосных в океанических [18-20] волноводах возможна лишь при определенных плавных изменениях показателя преломления соответствующих волн в поперечных сечениях. Анализируя полученные в [13-20] результаты, можно убедиться (и это будет показано ниже) в том, что данное явление имеет место лишь при такой стратификации показателя преломления, при которой длина цикла параксиальных лучей практически не зависит от угла их выхода. Именно в волноводах подобного типа параксиальные лучи, выходящие из расположенного на оси канала источника излучения, фокусируются в определенных фокальных точках, равноудаленных друг от друга на оси канала [13-20]. Если учесть, что, во-первых, с использованием предложенного в [21,22] подхода в [23,24] показано, что класс таких волноводов весьма ограничен; во-вторых, соответствующие зависимости показателя преломления от глубины не реализуются в океане [25,26], то может показаться, что даже для представляющего здесь основной интерес монохроматического излучения явление фокусировки, связанное с существованием синфазных сечений, не играет столь существенной роли при формировании пространственной интерференционной структуры акустических полей в стратифицированных по глубине океанических волноводах, по сравнению с изоскоростными волноводами, характерными для мелководных районов Мирового океана [25,26]. Такое заключение было бы вполне оправданным, если бы явления фокусировки полей в изоскоростных [5,12] и стратифицированных [13,15,16,18-20] волноводах с практически неизменной длиной цикла у параксиальных лучей имели абсолютно тождественный характер, что, кстати, подразумевалось в [13, 27]. Однако из весьма общих рассуждений, основанных на анализе представлений для поля в изоскоростных и стратифицированных волноводах [28,29], следует, что, во-первых, обсуждаемое явление фокусировки в изоскоростных волноводах [5,12] имеет дифракционный, а в стратифицированных волноводах [13,20] - рефракционный характер; во-вторых, должно наблюдаться аналогичное [5,12] явление дифракционной фокусировки полей и в стратифицированных волноводах.

В самом деле, в стратифицированном по глубине океаническом волноводе представление поля с помощью многократного рассеяния обобщает справедливое для изоскоростного волновода представление в виде многократного отражения, которое, в свою очередь, при не зависящих от угла падения коэффициентах отражения от плоских границ раздела соответствующих сред совпадает с представлением поля, следующим из картины мнимых источников [28,29]. Поскольку же каждому из этих представлений соответствует своя лучевая теория, причем в последнем случае она является точной [29], то полю точечного источника в океаническом волноводе с плавной стратификацией показателя преломления акустических волн можно также сопоставить поле достаточно протяженной излучающей антенны, которая теперь, в отличие от ее аналога в изоскоростном волноводе, является непрерывной и криволинейной. При этом соответствующие "мнимые" источники с определенными амплитудами и фазами будут распределены по ее апертуре с некоторым пространственным периодом z_H, пропорциональным характерной ширине канала H_g. Из такой аналогии следует, что в стратифицированных по глубине океанических волноводах должно наблюдаться явление дифракционной фокусировки поля с пространственным периодом, зависящим от характерного масштаба волновода H_g и длины волны излучения λ, причем чисто геометрическая - рефракционная - фокусировка поля, например, существование фокальных точек для определенных типов каналов [23], будет определяться характером непрерывного распределения "мнимых" источников на каждом пространственном масштабе z_H.

Именно поэтому целями настоящей работы являются, во-первых, доказательство существования аналогичного наблюдаемому в изоскоростных волноводах [5,12] явления дифракционной фокусировки полей в стратифицированных по глубине океанических волноводах; во-вторых, получение достаточно общих выражений для пространственного периода такой фокусировки.

Для решения поставленных задач воспользуемся предложенным в [30,31] подходом к анализу пространственной интерференционной структуры акустического поля в океанических волноводах и запишем выражение для зависимости его интенсивности J(r) от горизонтального расстояния r в следующем виде

$$J(r) = 2\pi p_0^2 \frac{R_0^2}{r} \left[\sum_{l=1}^{L(\omega)} |A_l|^2 + \sum_{l \neq l'}^{L(\omega)} \sum_{l'=1}^{L(\omega)} A_l A_{l'}^* \cos[(k_l - k_{l'}) r] \right], \tag{6}$$

справедливом в дальней зоне точечного источника $k_l r >> 1$ тонального излучения с циклической частотой ω, расположенного на глубине z_S. Здесь:

$$A_l = \psi_l(z_S)\,\psi_l(z) \Big/ \sqrt{k_l} \tag{7}$$

амплитуда моды с номером l, k_l - ее горизонтальное волновое число, $\psi_l(z)$ - соответствующие ортонормированные собственные функции волновода, $L(\omega) = \max(l)$ - число возбуждаемых мод, z - глубина приема, p_0 - амплитуда возмущения давления, создаваемого точечным источником в однородной среде на сферической поверхности радиуса R_0. Из (6) следует (см. [30,31]), что отнормированная на геометрическое расхождение интенсивность акустического поля $J_0(r) = r\,J(r)$ в волноводе является квазипериодической по r функцией с определенными пространственными периодами (периодами интерференции)

$$R_{l,l'} = 2\pi \Big/ (k_l - k_{l'}) \tag{8}$$

и соответствующими им пространственными периодами биений

$$R_g(l, l'; n, n') = R_{l,l'}\,R_{n,n'} \Big/ \left| R_{l,l'} - R_{n,n'} \right| , \tag{9}$$

которые ниже будем называть пространственными периодами переформирования интерференционной структуры акустического поля в волноводах.

Далее будем интересоваться лишь хорошо прогнозируемой и тем самым, представляющей основной интерес, крупномасштабной интерференционной структурой акустического поля, формирующейся различными парами соседних мод, для которых выражения (8), (9) запишутся в следующем виде:

$$R_{l,l+1} = 2\pi \Big/ (k_l - k_{l+1}) , \tag{10}$$

$$R_g(l, l+1; n, n+1) = R_{l,l+1}\,R_{n,n+1} \Big/ \left| R_{l,l+1} - R_{n,n+1} \right| . \tag{11}$$

Из сказанного следует, что пространственная интерференционная структура акустического поля в океаническом волноводе будет полностью перестраиваться (переформировываться) с максимально возможным пространственным периодом R_{max}, значение которого заведомо принадлежит диапазону значений пространственного периода переформирования для двух соседних пар мод из всего возможного их набора:

$$R_{max} = \max [R_g(l, l+1; l+1, l+2)] . \qquad (12)$$

Представляет также интерес минимальный пространственный период переформирования R_{min} интерференционной структуры поля в волноводе, ограничивающий снизу диапазон возможных значений пространственного периода переформирования интерференционной структуры двух соседних пар мод:

$$R_{min} = \min [R_g(l, l+1; l+1, l+2)] , \qquad (13)$$

поскольку именно в соответствующих диапазонах горизонтальных расстояний

$$m R_{min} \le r \le m R_{max} \quad (m=1, 2, \dots) \qquad (14)$$

эффект переформирования крупномасштабной интерференционной структуры поля должен заметнее всего проявляться. В этих же диапазонах расстояний (14) должно наблюдаться явление дифракционной фокусировки поля, поскольку переформирование его интерференционной структуры с пространственным периодом R_{max} (12) подразумевает хотя бы частичное проявление ее особенностей, имевших место при $0 < r << R_{min}$ и, в том числе, в непосредственной близости от точечного источника. Здесь следует отметить, что именно проявлением эффекта периодической дифракционной фокусировки поля в диапазоне расстояний (14) обусловлено обнаруженное в [31] явление периодического пространственного переформирования дальних зон акустической освещенности в открытом к поверхности подводном звуковом канале.

Перейдем теперь к получению аналитического выражения для пространственного периода дифракционной фокусировки поля в стратифицированном океаническом волноводе с плавной, но достаточно произвольной зависимостью квадрата показателя преломления акустических волн $n^2(z)$ от глубины, считая свободную поверхность $z = 0$ и дно $z = H$ идеально отражающими.

Поскольку явление формирования изображений источника в волноводах отчетливо наблюдается лишь при достаточно многомодовом режиме распространения волн (см. [5-8, 12-16, 20]), то для решения поставленной задачи воспользуемся приближением ВКБ, предполагая выполненными условия его применимости [29,32]. Как известно [29,32] , дисперсионное уравнение для горизонтальных волновых чисел мод в приближении ВКБ имеет следующий вид:

$$k \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{n^2(z) - \beta_l^2}\, dz = \pi(l - \nu) , \qquad (15)$$

где:

$$\beta_l = k_l / k = \cos\chi_l , z_1 = \begin{cases} 0 \\ z_{lB} \end{cases} , z_2 = \begin{cases} z_{lH} \\ H \end{cases} , \quad l = [1, L] ,$$

$$\nu = \begin{cases} 1/2 , z_1 = z_{lB} , z_2 = z_{lH} \\ 1/4 , z_1 = 0 , z_2 = z_{lH} \end{cases} , \nu = \begin{cases} 1/2 , z_1 = 0 , z_2 = H \\ 1/4 , z_1 = z_{lB} , z_2 = H \end{cases} .$$

Здесь χ_l - угол скольжения бриллюэновского луча на оси канала $z = z_0$; z_{lB} и z_{lH} - соответственно верхние и нижние горизонты поворота бриллюэновских лучей; $n(z) = c(z_0) / c(z)$, $c(z)$ - зависимость скорости звука от глубины, $k = \omega / c(z_0)$.

В приближении ВКБ разностное выражение (10) с использованием разложения в ряд величины β_{l+1} с точностью до членов третьего порядка малости

$$\beta_{l+1} \approx \beta_l + \frac{d\,\beta_l}{d\,l} + \frac{d^2\beta_l}{2!\,d\,l^2} + \frac{d^3\beta_l}{3!\,d\,l^3} \quad , \tag{16}$$

и следующего из (15) дифференциального соотношения

$$\frac{d\,\beta_l}{d\,l} = -\frac{2\,\pi}{k\,D_l} \quad , \tag{17}$$

где D_l - длина цикла соответствующего бриллюэновского луча

$$D_l = 2\,\beta_l \int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{d\,z}{\sqrt{n^2(z) - \beta_l^2}}, \tag{18}$$

можно представить в виде следующего приближенного при $D_l k >> 1$ равенства

$$R_{l,l+1} \approx D_l \times \left[1 + \frac{\pi}{k\,D_l^2} \frac{d\,D_l}{d\,\beta_l} - \frac{2\,\pi^2}{3\,k^2\,D_l^3} \left[\frac{d^2\,D_l}{d\,\beta_l^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3}{D_l} \left(\frac{d\,D_l}{d\,\beta_l} \right)^2 \right] \right]^{-1} . \tag{19}$$

Совершенно аналогично, из разностного выражения (11) с использованием (17), (19) и разложения в ряд

$$D_{l+1} \approx D_l + \frac{d\,D_l}{d\,l} + \frac{d^2 D_l}{2!\,d\,l^2} \tag{20}$$

находим следующее равенство

$$R_g(\,l, l+1; l+1, l+2) \approx \frac{k}{2\,\pi} D_l^3 \left[1 - \frac{2\pi}{k\,D_l^2} \frac{d\,D_l}{d\,\beta_l} \right] \times$$

$$\times\left[\left|\frac{dD_l}{d\beta_l}-\frac{2\pi}{kD_l}\left[\frac{d^2D_l}{d\beta_l^2}-\frac{2}{D_l}\left(\frac{dD_l}{d\beta_l}\right)^2\right]\right|\right]^{-1}. \qquad (21)$$

Для дальнейших рассуждений важно обратить внимание на тот факт, что, как показано в [33,34] , океанические волноводы можно классифицировать по типу зависимостей D_l от лучевого параметра β_l. Поэтому в океанических волноводах с монотонной зависимостью D_l от β_l, т.е. в отсутствие у нее экстремумов

$$\frac{dD_l}{d\beta_l}\neq 0\ , \qquad (22)$$

из (12), (13) с использованием (21), (22) при $kD_l >> 1$ находим весьма простые выражения для минимального и максимального пространственных периодов дифракционной фокусировки поля

$$R_{min}=\frac{kH_g^2}{2\pi}\min\left[\bar{D}_l^3\Big/\left|\frac{d\bar{D}_l}{d\beta_l}\right|\right], \qquad (23)$$

$$R_{max}=\frac{kH_g^2}{2\pi}\max\left[\bar{D}_l^3\Big/\left|\frac{d\bar{D}_l}{d\beta_l}\right|\right], \qquad (24)$$

где $\bar{D}_l = D_l / H_g$ - нормированная на характерную ширину волновода H_g длина цикла бриллюэновского луча.

Таким образом, полученные зависимости (23), (24) позволяют утверждать, что в океанических волноводах с монотонной зависимостью длины цикла бриллюэновских лучей от лучевого параметра пространственный период дифракционной фокусировки поля пропорционален квадрату характерного вертикального масштаба соответствующего волновода и обратно пропорционален длине волны излучения.

В океанических волноводах с немонотонной зависимостью $D_l(\beta_l)$, которая при определенных значениях $\beta_l = \beta_c$ имеет экстремумы

$$\left(\frac{dD_l}{d\beta_l}\right)_{\beta_l = \beta_c} = 0 \ , \tag{25}$$

отвечающие формированию в таких волноводах слаборасходящихся акустических пучков [33,34], из (12) с использованием (21), (25) находим следующее выражение для пространственного периода дифракционной фокусировки поля:

$$R_{max} = \frac{k^2 H_g^3}{4\pi^2}\left[\bar{D}_l^4(\beta_c) \Bigg/ \left|\left(\frac{d^2\bar{D}_l}{d\beta_l^2}\right)_{\beta_l=\beta_c}\right|\right]. \tag{26}$$

Поэтому в океанических волноводах с немонотонной зависимостью длины цикла бриллюэновских лучей от лучевого параметра пространственный период дифракционной фокусировки поля (26) пропорционален уже кубу характерного вертикального масштаба соответствующего волновода и обратно пропорционален квадрату длины волны излучения.

Остановимся теперь на аналитическом доказательстве в рамках приближения ВКБ того факта, что пространственное переформирование интерференционной структуры акустического поля в волноводах обуславливает дифракционную его фокусировку с тем же пространственным периодом R_{max} (24) (26).

Для решения этой задачи воспользуемся результатами анализа модовой структуры поля в волноводах, полученными в [12,34,35]; причем, исключительно лишь с целью сокращения записи соответствующих промежуточных выражений, рассмотрим океанический волновод с открытым к поверхности подводным звуковым каналом и акустически прозрачным дном, что, естественно, не ограничивает общности полученных ниже зависимостей для R_{min} и R_{max}. В этом случае для поля давления, формируемого рефрагированными $1 \le l \le L_r$ и взаимодействующими с поверхностью океана $L_r + 1 \le l \le L$ модами, с использованием ВКБ приближения получим следующее выражение [31,32] :

$$p' = 4\, p_0\, R_0 \sqrt{\frac{2\pi}{k\, r}} \exp(-i\, \omega\, t) \sum_{l=1}^{L(\omega)} \frac{\exp(i\, k\, r\, \beta_l)}{D_l \sqrt{\gamma_l(z_S)\, \gamma_l(z)}} \times$$

$$\times \sin[\varphi_l(z_S)] \sin[\varphi_l(z)], \tag{27}$$

где:

$$\gamma_l(z) = \sqrt{n^2(z) - \beta_l^2}\ , \tag{28}$$

$$\varphi_l(z) = \begin{cases} k \int\limits_{z_{lB}}^{z} \gamma_l(z)\, dz + \pi/4 = F_l(z)\ , \quad 1 \le l \le L_r \\ (\, n(0) \le \beta_l \le n(z_S)\,) \\ k \int\limits_{0}^{z} \gamma_l(z)\, dz = \Phi_l(z)\ , \quad L_r + 1 \le l \le L \\ (\, n(H) \le \beta_l \le n(0)\,) \end{cases}, \tag{29}$$

а t - время. Число рефрагированных L_r и всех возбуждаемых мод L определим из дисперсионного уравнения (15) при соответствующих значениях $z_{lB} = 0$, $\beta_l = n(0)$ и $z_{lH} = H$, $\beta_l = n(H)$:

$$\begin{aligned} L_r &= \frac{k}{\pi} \int\limits_{0}^{H_r} \sqrt{n^2(z) - n^2(0)}\, dz + \frac{1}{2}, \\ L &= \frac{k}{\pi} \int\limits_{0}^{H} \sqrt{n^2(z) - n^2(H)}\, dz + \frac{1}{4}\ , \end{aligned} \tag{30}$$

где H_r - характерная ширина подводного звукового канала, определяемая из уравнения $n(0) = n(H_r)$.

Как отмечалось в [12,35] и показано в [34], поле в волноводе при многомодовом режиме распространения и достаточном удалении корреспондирующих точек от границ раздела имеет пучковую структуру, определяемую осцилляционной зависимостью модуля коэффициента возбуждения мод от их номера. Каждому такому модовому пучку соответствует определенное значение номера рефрагированной $l_{max}(q) = l_{r\,max}(q_r)$ и взаимодействующей с поверхностью океана $l_{max}(q) = l_{s\,max}(q_s)$ моды, при котором достигается максимум модуля ее амплитуды $|A_l|$ на глубине источника $z = z_s$; поэтому уравнения для определения $l_{max}(q)$ следуют из равенства $\sin^2[\varphi_l(z_S)] = 1$ [34] и имеют достаточно простой вид:

$$F_l(z_S)\big|_{l=l_{r\,max}} = \frac{\pi}{2}(2q_r - 1), \tag{31}$$

$$\Phi_l(z_S)\big|_{l=l_{S\,max}} = \frac{\pi}{2}(2q_S - 1), \tag{32}$$

где $q_r = [1, Q_r]$ и $q_S = [Q_r + 1, Q]$ - соответствующие номера рефрагированных и взаимодействующих с поверхностью океана модовых пучков, Q_r - количество рефрагированных модовых пучков, Q - количество всех модовых пучков, $q = [1, Q]$. Следует иметь в виду, что, если возбуждается достаточно большое число рефрагированных мод $L_r >> 1$, при котором интервал глубин $\Delta z_{lB} = z_{l+1\,B} - z_{lB}$ между горизонтами поворота соседних мод становится настолько малым, что всегда найдется горизонт z_{lB}, весьма близкий к z_S , то номер моды $l_r = l_{r\,max}(1)$, соответствующей первому рефрагированному модовому пучку, будет определяться уже не из уравнения (31), а из дисперсионного уравнения (15) при условии совпадения соответствующих горизонтов $z_{l B} = z_S$:

$$l_r = \frac{k}{\pi} \int\limits_{z_S}^{z_*} \sqrt{n^2(z) - n^2(z_S)}\, dz + \frac{1}{2} \quad , \tag{33}$$

где z_*- сопряженная источнику глубина, определяемая из равенства $n(z_S) = n(z_*)$. Естественно, что решения уравнений (31), (32) должны удовлетворять определенным условиям:

$$\begin{gathered} l_r \le l_{r\,max}(q_r) \le L_r \quad , \\ L_r + 1 \le l_{S\,max}(q_S) \le L \; . \end{gathered} \tag{34}$$

Каждый такой модовый пучок формируется определенной группой мод

$$\begin{gathered} L_q = L_{1q} + L_{2q} - 1 \; ; \\ L_{1q} = l_{max}(q) - l_{min}(q-1) , \\ L_{2q} = l_{min}(q) - l_{max}(q) , \end{gathered} \tag{35}$$

где значения номеров мод $l_{min}(q) = l_{r\,min}(q_r)$ и $l_{min}(q) = l_{s\,min}(q_s)$, отвечающих (следующим за $l_{max}(q) = l_{r\,max}(q_r)$ и $l_{max}(q) = l_{s\,max}(q_s)$ соответственно) положениям минимумов в $|A_l|$, находятся из уравнений:

$$F_l(z_S)\Big|_{l = l_{r\,min}} = \pi q_r \; , \tag{36}$$

$$\Phi_l(z_S)\Big|_{l = l_{S\,min}} = \pi q_S , \tag{37}$$

следующих из равенства $\sin[\varphi_l(z_S)] = 0$. Здесь $q_r = [0, Q_r]$ и $q_s = [Q_r, Q]$. Решения уравнений (36), (37) также должны удовлетворять аналогичным (34) условиям:

$$\begin{gathered} 1 \le l_{r\,min}(q_r) \le L_r \quad , \\ L_r + 1 \le l_{S\,min}(q_S) \le L \, . \end{gathered} \tag{38}$$

С учетом сказанного выражение для поля давления (27) представим в виде суммы соответствующих модовых пучков

$$p' = p_0 R_0 \sqrt{\frac{2\pi}{k\,r}} \exp(-i\omega t) \sum_{q=1}^{Q} \sum_{j=1}^{4} \exp\left[i\frac{\pi}{2}(1-\mu_j-\chi_j) \right] \Pi_{jq} \tag{39}$$

где:

$$\Pi_{jq} = \sum_{l=l_{\min}(q-1)}^{l=l_{\min}(q)} \frac{\exp(i\Psi_{jl})}{D_l \sqrt{\gamma_l(z_S)\gamma_l(z)}}\ , \tag{40}$$

$$\Psi_{jl} = k\beta_l r + \mu_j \varphi_l(z_S) + \chi_j \varphi_l(z)\ , \tag{41}$$

$$\mu_j, \chi_j = \begin{cases} 1,1; & j=1 \\ 1,-1; & j=2 \\ -1,1; & j=3 \\ -1,-1; & j=4 \end{cases} . \tag{42}$$

В предположении многомодового режима распространения воспользуемся разложением функции Ψ_{jl} (41) в ряд по l вблизи $l = l_{\max}(q)$ с точностью до членов третьего порядка по $\Delta l / L = [\, l - l_{\max}(q)\,] / L$:

$$\Psi_{jl} \approx \Psi_{jl_{\max}(q)} + \left(\frac{\partial \Psi_{jl}}{\partial l} \right)\Bigg|_{l=l_{\max}(q)} \Delta l +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 \Psi_{jl}}{\partial l^2} \right)\Bigg|_{l=l_{\max}(q)} (\Delta l)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 \Psi_{jl}}{\partial l^3} \right)\Bigg|_{l=l_{\max}(q)} (\Delta l)^3 . \tag{43}$$

Тогда, с использованием дифференциального соотношения (17) и приближенного равенства (43), запишем выражение для поля давления (39) в следующем виде:

$$p' = p_0 R_0 \sqrt{\frac{2\pi}{k r}} \sum_{q=1}^{Q} \sum_{j=1}^{4} \frac{P_{jq}}{\left(D_l \sqrt{\gamma_l(z_S)\gamma_l(z)} \right)\Big|_{l=l_{\max}(q)}} \times$$

$$\times \exp\left[i\left(\Psi_{j l_{\max}(q)} - \omega t + \frac{\pi}{2}(1-\mu_j-\chi_j) \right) \right], \qquad (44)$$

где:

$$P_{jq} = \sum_{\Delta l = -L_{1q}+1}^{\Delta l = L_{2q}-1} \exp[-i(\zeta_1 \Delta l + \zeta_2 (\Delta l)^2 + \zeta_3 (\Delta l)^3)]; \qquad (45)$$

$$\zeta_1 = 2\pi \left(\frac{r_{jl}}{D_l} \right)\Bigg|_{l=l_{\max}(q)}, \quad r_{jl} = r + \mu_j D_l(z_S) + \chi_j D_l(z),$$

$$D_l(z) = \beta_l \int_{z_1}^{z} \frac{dz}{\gamma_l(z)}; \qquad (46)$$

$$\zeta_2 = \frac{2\pi^2}{k} \left[\frac{r_{jl}}{D_l^3} \left[\frac{dD_l}{d\beta_l} - \frac{D_l}{r_{jl}} \left(\mu_j \frac{dD_l(z_S)}{d\beta_l} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \chi_j \frac{dD_l(z)}{d\beta_l} \right) \right] \right] \Bigg|_{l=l_{\max}(q)}; \qquad (47)$$

$$\zeta_3 = \frac{4\pi^3}{3k^2} \left[\frac{r_{jl}}{D_l^4} \left[\left[\frac{d^2 D_l}{d\beta_l^2} - \frac{3}{D_l} \left(\frac{dD_l}{d\beta_l} \right)^2 \right] + \frac{3}{r_{jl}} \frac{dD_l}{d\beta_l} \times \right.\right.$$

$$\times\left(\mu_j \frac{d D_l(z_S)}{d\beta_l} + \chi_j \frac{d D_l(z)}{d\beta_l}\right) -$$

$$\left.-\frac{D_l}{r_{jl}}\left(\mu_j \frac{d^2 D_l(z_S)}{d\beta_l^2} + \chi_j \frac{d^2 D_l(z)}{d\beta_l^2}\right)\right]\Bigg]\Bigg|_{l=l_{max}(q)} . \qquad (48)$$

Если, как это сделано в [35], в показателе экспоненты выражения (45) учитывать лишь пропорциональное ζ_1 слагаемое, то, выполнив с использованием формулы для геометрической прогрессии элементарное суммирование, получим тривиальный результат, заключающийся в том, что каждый модовый пучок формируется около двух опорных бриллюэновских лучей, с противоположными по знаку углами скольжения на горизонте источника, и распространяется без дифракционных искажений. Уравнения для траекторий этих лучей

$$r = R_{jm}^{(1)} = m D_{l_{max}(q)} - \mu_j D_{l_{max}(q)}(z_S) - \chi_j D_{l_{max}(q)}(z) \qquad (49)$$

находятся из условия выполнения равенства

$$\zeta_1 = 2\pi m_1 \quad (m_1 = 1, 2, \ldots) \quad , \qquad (50)$$

означающего синфазное сложение формирующей данный пучок группы мод вдоль соответствующих бриллюэновских лучей (49). Как отмечалось в [12], учет второго - пропорционального ζ_2 - слагаемого в показателе экспоненты выражения (45) приводит к расфазировке мод, формирующих соответствующий пучок, т.е. - к его дифракционному расплыванию по трассе распространения. Однако на расстояниях $r = R_{jm}^{(2)}$, определяемых выражением

$$R_{jm}^{(2)} = \left[\frac{k}{2\pi} \frac{D_l^3}{\left| \frac{d D_l}{d \beta_l} \right|} \left[m_2 + \frac{2\pi}{k D_l^2} \left(\mu_j \frac{d D_l(z_S)}{d \beta_l} + \chi_j \frac{d D_l(z)}{d \beta_l} \right) \right] - \right.$$

$$\left. - \mu_j D_l(z_S) - \chi_j D_l(z) \right] \Bigg|_{l = l_{\max}(q)} , \qquad (51)$$

следующим из равенства

$$|\zeta_2| = \pi m_2 \ , \ (m_2 = 1, 2, \ldots) \ , \qquad (52)$$

будет наблюдаться дифракционная фокусировка соответствующего модового пучка, а именно: для нечетных L_q и m_2- в фазе при нечетных L_{1q} и L_{2q} и в противофазе при четных L_{1q} и L_{2q} ; для четных m_2- всегда в фазе, независимо от L_{1q} и L_{2q}. Лишь только у пучка, сформированного четным числом мод, при нечетных значениях m будет наблюдаться существенная расфокусировка.

Предполагая выполнение условий $k D_l >> 1$ и (22), из (51) находим следующее приближенное выражение

$$R_{jm}^{(2)} \approx m_2 R_g(l_{\max}(q)) \ , \qquad (53)$$

в котором величина

$$R_g(l_{\max}(q)) = \frac{k H_g^2}{2\pi} \left[\bar{D}_l^3 \Big/ \left| \frac{d \bar{D}_l}{d \beta_l} \right| \right] \Bigg|_{l = l_{\max}(q)} \qquad (54)$$

является пространственным периодом дифракционной фокусировки соответствующего модового пучка. Из всех возможных при $q = [1, Q]$ значений величины $R_g(l_{\max}(q))$ всегда можно найти соответствующие минимальное $R_{\min}$ и максимальное

R_{max} значения пространственного периода дифракционной фокусировки поля, которые определяются из выражений:

$$R_{min} = \frac{k H_g^2}{2\pi} \min \left[\left[\bar{D}_l^3 \Big/ \left| \frac{d\bar{D}_l}{d\beta_l} \right| \right] \Bigg|_{l=l_{max}(q)} \right], \quad (55)$$

$$R_{max} = \frac{k H_g^2}{2\pi} \max \left[\left[\bar{D}_l^3 \Big/ \left| \frac{d\bar{D}_l}{d\beta_l} \right| \right] \Bigg|_{l=l_{max}(q)} \right], \quad (56)$$

аналогичных выражениям для минимального R_{min} (23) и максимального R_{max} (24) пространственных периодов переформирования интерференционной структуры поля в океаническом волноводе.

Следовательно, пространственное переформирование интерференционной структуры акустического поля в океанических волноводах обуславливает дифракционную его фокусировку с соответствующим пространственным периодом.

Здесь следует отметить, что в [36] из принципиально отличающегося от (52) равенства

$$|\zeta_2|(\Delta l)^2 = \pi \quad (57)$$

было получено выражение для оценки предельно допустимого числа мод

$$\Delta l = \sqrt{R_g(l_{max}(q)) / r}\ , \quad (58)$$

складывающихся в фазе и формирующих модовый пучок, где $R_g(l_{max}(q))$ определяется по формуле (54). После этого в [36] из (58) был сделан принципиально неверный физический вывод о том, что на расстояниях $r \geq R_g(l_{max}(q))$ все моды перестают конструктивно интерферировать вдоль опорных бриллюэновских лучей, и формируемый ими первоначально узкий пучок полностью расплывается. В самом деле, из всего сказанного выше относительно дифракционной фокусировки пучков видно, что в [36] не был учтен тот простой факт, что хотя различные моды $(-L_{1q}+1 \le \Delta l \le L_{2q}-1)$ и расфазируются на различных расстояниях $r = R_g(l_{max}(q)) \Big/ (\Delta l)^2$, однако, ввиду целочисленных значений величины $(\Delta l)^2$, они вновь будут определенным образом фазироваться на расстояниях $R_{jm}^{(2)}$ (53) с характерным для них пространственным периодом $R_g(l_{max}(q))$ (54).

Обсуждаемая пространственная периодичность дифракционной фокусировки поля в океанических волноводах не означает точного повторения его значений в соответствующих фокальных областях, поскольку этому препятствует влияние последующего - пропорционального ζ_3 - слагаемого в показателе экспоненты выражения (45). Это слагаемое играет определяющую роль при дифракционном расплывании и фокусировке слаборасходящихся акустических пучков [30,33,34]. Действительно, если при определенном значении $l = l_{max}(q) = l_c = l(\beta_c)$ выполняется равенство (25), т.е. $\zeta_2 = 0$, то теперь уже из уравнения

$$|\zeta_3| = \pi m_3 \qquad (m_3 = 1, 2, \ldots) \tag{59}$$

находим, для определения расстояний $r = R_{jm}^{(3)}$, на которых будет наблюдаться дифракционная фокусировка слаборасходящегося модового пучка, другое выражение

$$R_{jm}^{(3)} = \left[\frac{3k^2 D_l^4}{4\pi^2 \left| \dfrac{d^2 D_l}{d\beta_l^2} \right|} \left[m_3 + \frac{4\pi^2}{3k^2 D_l^3} \left(\mu_j \frac{d^2 D_l(z_S)}{d\beta_l^2} + \right.\right.\right.$$

$$+\chi_j \frac{d^2 D_l(z)}{d\beta_l^2}\Bigg)\Bigg] - \mu_j D_l(z_S) - \chi_j D_l(z) \Bigg]\Bigg|_{l=l_c} . \qquad (60)$$

При выполнении условия $k D_l >> 1$ из (60) получаем простое выражение следующего вида:

$$R_{jm}^{(3)} \approx m_3 R_g(l_c) , \qquad (61)$$

в котором величина

$$R_g(l_c) = \frac{3 k^2 H_g^3}{4\pi^2} \left[\overline{D}_l^4 \Big/ \frac{d^2 \overline{D}_l}{d\beta_l^2} \right]\Bigg|_{l=l_c} \qquad (62)$$

является пространственным периодом дифракционной фокусировки слаборасходящегося модового пучка. Причем, фокусировка каждого такого пучка в фазе или противофазе зависит от выполнения тех же условий, которым должны удовлетворять значения $m_3 L_q$, L_{1q} и L_{2q}, сформулированных выше при учете лишь двух слагаемых в показателе экспоненты выражения (45), пропорциональных ζ_1 и ζ_2 соответственно.

Сравнение зависимости для R_{max} (26) с аналогичной для $R_g(l_c)$ показывает, что они отличаются всего лишь целочисленным коэффициентом $R_g(l_c)/R_{max} = 3$. Последнее означает, что подход, основанный на анализе пучковой структуры акустического поля в океаническом волноводе, приводит к выводу о том, что дифракционная фокусировка слаборасходяшихся акустических пучков должна наблюдаться лишь через каждые три соответствующие пространственные периода переформирования его интерференционной структуры. Однако, это не исключает того, что с пространственным периодом R_{max} (26) будет наблюдаться частичная дифракционная фокусировка поля, поскольку основанные на анализе явления пространственного переформирования интерференционной структуры акустического поля в океанических волноводах выводы относительно его дифракционной фокусировки являются более общими, независящими от условий выполнения или невыполнения равенства $l_{max}(q)=l_c$, характерного для слаборасходящихся акустических пучков.

Из приведенных выше выражений для пространственных периодов переформирования интерференционной структуры акустического поля в океанических волноводах (23), (24), (26), с которыми наблюдается его дифракционная фокусировка следует, что даже однократное проявление этих эффектов будет иметь место на весьма значительных расстояниях. Естественно, что в такой ситуации на формирование поля могут существенно повлиять регулярные и случайные горизонтальные неоднородности океанических волноводов, а также потери при распространении, обусловленные диссипацией и рассеянием энергии акустических волн. Однако на величины R_{min} и R_{max} смогут оказать влияние лишь соответствующие горизонтальные неоднородности океанических волноводов, учет которого представляется достаточно важным и является темой отдельного исследования. Здесь же, с целью получения соответствующих приближенных аналитических зависимостей для R_{min} и R_{max} рассмотрим проявление дифракционной фокусировки поля в плавнонеоднородном по трассе океаническом волноводе, в котором показатель преломления акустических волн $n(z, r)$, скорость звука на оси канала $c(z_0, r)$ и глубина водного слоя $H(r)$ слабо зависят от горизонтального расстояния; причем изменения соответствующих величин заметно проявляются в интерференционной структуре поля лишь на расстояниях, существенно превышающих максимальный пространственный период интерференции мод.

В этом случае с использованием адиабатического приближения (невзаимодействующих мод) получим отличающееся от (6) выражение для интенсивности акустического поля [32]:

$$J(r) = 2\pi p_0^2 \frac{R_0^2}{r} \left[\sum_{l=1}^{L(\omega)} |A_l(r)|^2 + \sum_{l \neq l'}^{L(\omega)} \sum_{l'=1}^{L(\omega)} A_l(r) A_{l'}^*(r) \times \right.$$

$$\left. \times \cos\left[\int_0^r [k_l(r) - k_{l'}(r)] \, dr \right] \right], \tag{63}$$

где:

$$A_l(r) = \psi_l(z_S, 0) \, \psi_l(z, r) \Big/ \sqrt{k_l(r)} \ , \tag{64}$$

амплитуда моды, $k_l(r)$ - ее горизонтальное волновое число, а $\psi_l(z,r)$ - соответствующая ей ортонормированная собственная функция, определенные для волновода сравнения. Из (63) следует, что за пространственный период интерференции соседних мод можно принять величину

$$R_{l,l+1}(r) = \frac{2\pi}{r^{-1} \int_0^r [k_l(r) - k_{l+1}(r)] \, dr}, \tag{65}$$

которую и необходимо теперь использовать при определении пространственного периода переформирования интерференционной структуры для двух соседних пар мод $R_g(l, l+1; l+1, l+2)$.

Если воспользоваться также приближением ВКБ для определения $\psi_l(z,r)$ и соответствующих им значений лучевого параметра $\beta_l(r)$, которые в этом случае находятся из аналогичного (15) дисперсионного уравнения

$$k(r)\int\limits_{z_1(r)}^{z_2(r)}\sqrt{n^2(z,r)-\beta_l^2(r)}\;dz=\pi(l-\nu)\;, \tag{66}$$

то, выполняя совершенно аналогичные проведенным ранее при получении выражений (19), (21) преобразования, находим следующие зависимости:

$$R_{l,l+1}(r)=\left[\frac{1}{r}\int\limits_0^r\left[1+\frac{\pi}{kD_l^2}\frac{dD_l}{d\beta_l}-\frac{2}{3}\frac{\pi^2}{k^2D_l^3}\left(\frac{d^2D_l}{d\beta_l^2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{2}{D_l}\left(\frac{dD_l}{d\beta_l}\right)^2\right)\right]\frac{dr}{D_l}\right]^{-1}, \tag{67}$$

$$R_g(l,l+1;l+1,l+2)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{r}\left|\int\limits_0^r\left[\frac{dD_l}{d\beta_l}-\frac{2\pi}{kD_l}\left(\frac{d^2D_l}{d\beta_l^2}-\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.-\frac{2}{D_l}\left(\frac{dD_l}{d\beta_l}\right)^2\right)\right]\frac{dr}{kD_l^3}\right|\right]^{-1}, \tag{68}$$

где

$$D_l(r)=2\beta_l(r)\int\limits_{z_1(r)}^{z_2(r)}\frac{dz}{\sqrt{n^2(z,r)-\beta_l^2(r)}}\;. \tag{69}$$

Из (12), (13) с использованием (68) получаем обобщающие (23), (24), (26) выражения для соответствующих пространственных периодов дифракционной фокусировки акустического поля в плавнонеоднородном по трассе океаническом волноводе:

$$R_{min}=\frac{1}{2\pi}\left[\max\left[\frac{1}{r}\left|\int\limits_0^r\frac{dD_l}{d\beta_l}\frac{dr}{kD_l^3}\right|\right]\right]^{-1}, \tag{70}$$

$$
R_{max} = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\left[\min\left[\dfrac{1}{r}\left|\displaystyle\int_0^r \frac{dD_l}{d\beta_l}\frac{dr}{kD_l^3}\right|\right]\right]^{-1}, & \dfrac{dD_l}{d\beta_l} \neq 0 \\ \dfrac{1}{4\pi^2}\left[\dfrac{1}{r}\left|\displaystyle\int_0^r \left(\frac{d^2D_l}{d\beta_l^2}\Big/ D_l^4\right)\Bigg|_{\beta_l=\beta_c(r)} \frac{dr}{k^2}\right|\right]^{-1}, & \left(\dfrac{dD_l}{d\beta_l}\right)\Bigg|_{\beta_l=\beta_c(r)} = 0\,. \end{cases} \qquad (71)
$$

В заключительной части настоящей работы проиллюстрируем с использованием полученных здесь результатов для R_{max} (24), (26) на простейших моделях океанических волноводов, допускающих аналитическое представление зависимостей $D_l(\beta_l)$ и $R_g(l, l+1; l+1, l+2)$, тот простой факт, что для различных групп мод, - а именно, рефрагированных $z_1 = z_{lB}, z_2 = z_{lH}$; взаимодействующих только с поверхностью $z_1 = 0, z_2 = z_{lH}$ или только с дном $z_1 = z_{lB}, z_2 = H$; или с поверхностью и дном одновременно $z_1 = 0, z_2 = H$, - их дифракционная фокусировка будет происходить с различными пространственными периодами R_{max}; при этом для определенных групп мод величина этого периода может иметь принципиально отличающиеся зависимости от характерного вертикального масштаба волновода и длины волны излучения (24), (26).

Рассмотрим сначала волноводы с монотонной зависимостью длины цикла бриллюэновских лучей D_l от их лучевого параметра β_l. В этом случае наглядные аналитические выражения для D_l (18), $R_g(l, l+1; l+1, l+2)$ (21) и R_{max} (24) можно получить, например, для следующих волноводов: изоскоростного с идеально отражающими границами раздела

$$n^2(z)=1\ ,\ 0\le z\le H\ , \tag{72}$$

$$D_l = 2H\beta_l \Big/ \sqrt{1-\beta_l^2}\ ,\quad R_g(l,l+1;l+1,l+2)= \\ =2kH^2\beta_l^3\big/\pi \qquad (0<\beta_l\le 1) \tag{73}$$

$$R_{max}=4H^2/\lambda\ ; \tag{74}$$

рефракционного параболического

$$n^2(z)=1-(z/H_g)^2\ ,\ -\infty<z<\infty\ , \tag{75}$$

$$D_l=2\pi H_g\beta_l\ ,\quad R_g(l,l+1;l+1,l+2)= \\ =2\pi k H_g^2\beta_l^3\ ,\quad (0<\beta_l\le 1) \tag{76}$$

$$R_{max}=4\pi^2 H_g^2/\lambda\ ; \tag{77}$$

рефракционного, идеально фокусирующего

$$n^2(z)=1\big/\mathrm{ch}^2(z/H_g)\ ,\ -\infty<z<\infty\ , \tag{78}$$

$$D_l=4H_g\ ,\quad R_g^{-1}(l,l+1;l+1,l+2)=R_{max}^{-1}=0\ ; \tag{79}$$

приповерхностного с законом Эпштейна

$$n^2(z)=[1+M/\mathrm{ch}^2(z/H_g)]\big/(1+M),0\le z<\infty, M>0, \tag{80}$$

$$D_l=\frac{\pi H_g\beta_l}{\sqrt{\beta_l^2-1/(1+M)}}, R_g(l,l+1;l+1,l+2)= \\ =\frac{\pi k H_g^2}{2}(1+M)\beta_l^3, ((1+M)^{-1/2}\le\beta_l\le 1) \tag{81}$$

$$R_{max}=\pi^2(1+M)H_g^2/\lambda\ ; \tag{82}$$

приповерхностного линейного с акустически прозрачным дном

$$n^2(z)=\begin{cases}1-az\ ,\ 0\le z\le H\\ 1-aH\ ,\ H\le z\end{cases}\ , \tag{83}$$

$$D_l = \frac{4\beta_l}{a}\sqrt{1-\beta_l^2}\,,\ R_g(l,l+1;l+1,l+2) =$$

$$= \frac{8k}{\pi a^2}\beta_l^3\frac{(1-\beta_l^2)^2}{2\beta_l^2-1}\,,\ (\sqrt{1-aH} \le \beta_l \le 1)\,, \tag{84}$$

$$R_{max} = 16H^2/\lambda\ , \tag{85}$$

где $\lambda = 2\pi/k$.

Из сравнения зависимостей (4), (5) и (73), (74), а также (76), (77) и (80), (81) следует, что в изоскоростных волноводах и каналах, допускающих фокусировку параксиальных бриллюэновских лучей на оси, т.е. в океанических волноводах с монотонно увеличивающейся длиной цикла бриллюэновских лучей при увеличении их лучевого параметра пространственный период дифракционной фокусировки акустического поля совпадает с пространственным периодом переформирования его интерференционной структуры для мод предельно низких номеров. В то же время, как следует из (84), (85), в океанических волноводах с монотонно уменьшающейся длиной цикла бриллюэновских лучей при увеличении их лучевого параметра пространственный период дифракционной фокусировки акустического поля совпадает с пространственным периодом переформирования его интерференционной структуры для мод предельно высоких номеров.

Остановимся теперь на рассмотрении обсуждаемых здесь эффектов для океанического волновода с немонотонной зависимостью D_l от β_l; причем, с целью упрощения соответствующих аналитических расчетов, рассмотрим океанический волновод с акустически прозрачным дном и открытым к поверхности подводным звуковым каналом, моделируемым билинейной зависимостью квадрата показателя преломления акустических волн от глубины:

$$n^2(z)=\begin{cases} 1+a_1(z-z_0), & 0\le z\le z_0 \\ 1-a_2(z-z_0), & z_0\le z\le H \\ 1-a_2(H-z_0), & H\le z \end{cases}, \qquad (86)$$

здесь $a_1 z_0 < a_2(H-z_0)$. При такой аппроксимации подводного звукового канала из (18) для длины цикла рефрагированных $1\le l\le L_r$ и взаимодействующих с поверхностью океана $1+L_r\le l\le L$ бриллюэновских лучей находим следуюiцие зависимости:

$$D_l=\frac{6\pi}{k_a}\beta_l\sqrt{1-\beta_l^2}\ , \quad 1\le l\le L_r\ , \quad (n(0)\le\beta_l\le 1) \qquad (87)$$

$$D_l=\frac{6\pi}{k_a}\beta_l\left[\sqrt{1-\beta_l^2}-\frac{a_2}{a_1+a_2}\sqrt{1-a_1 z_0-\beta_l^2}\ \right],$$

$$1+L_r\le l\le L, \quad (n(H)\le\beta_l\le n(0)) \ , \qquad (88)$$

где:

$$k_a=\frac{3\pi a_2}{2(1+a_2/a_1)} \ , \qquad (89)$$

а количество соответствующих мод L_r и L определяется следующими из (30) соотношениями:

$$L_r=\frac{1}{2}+\frac{k}{k_a}(a_1 z_0)^{3/2} \ ,$$

$$L=\frac{1}{4}+\frac{k}{k_a}\Big[[a_2(H-z_0)]^{3/2}-\frac{a_2}{a_1+a_2}\times \qquad (90)$$

$$\times[a_2(H-z_0)-a_1 z_0]^{3/2}\Big]$$

Поскольку зависимость $D_l(\beta_l)$ (87) в допустимом диапазоне изменения лучевого параметра $\sqrt{1-a_1 z_0}\le\beta_l\le 1$ не имеет экстремумов, то для рефрагированных мод из (21), (24) находим следующие выражения:

$$R_g(l,l+1;l+1,l+2)=18\pi\frac{k}{k_a^2}\frac{\beta_l^3(1-\beta_l^2)^2}{(2\beta_l^2-1)}\ ,\tag{91}$$

$$R_{max}=16\ H_r^2\ /\lambda=R_r\ ,\tag{92}$$

где, как и в соотношении для L_r (30),

$$H_r=z_0\ (1+a_1/a_2)\tag{93}$$

- характерная ширина подводного звукового канала.

Зависимость же $D_l(\beta_l)$ (88) имеет, как известно (см. [30]), минимум в допустимом диапазоне изменения лучевого параметра $\sqrt{1-a_2(H-z_0)}\le\beta_l\le\sqrt{1-a_1z_0}$ при определенном значении $\beta_l=\beta_c$. Если ввести в рассмотрение величину $\alpha_l^2=1-\beta_l^2=\sin^2\chi_l$, то для определения соответствующего ей значения $\alpha_c^2=1-\beta_c^2$ из (25) с использованием (88) получим уравнение

$$\alpha_c^2\left[1-\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^2\left(\frac{1+a_1z_0-2\alpha_c^2}{1-2\alpha_c^2}\right)^2\right]=a_1z_0\ ,\tag{94}$$

которое в представляющем интерес диапазоне малых углов скольжения $\chi_l<<1$ ($\alpha_c^2<<1$) имеет следующее приближенное решение

$$\alpha_c^2\approx a_1\,z_0\Bigg/\left[1-\left(\frac{a_2}{a_1+a_2}\right)^2(1+a_1z_0)^2\right].\tag{95}$$

Тогда, с использованием (26), (88) находим выражение для пространственного периода дифракционной фокусировки поля взаимодействующих с поверхностью океана мод

$$R_{max} = 54\,\pi\,\frac{k^2}{k_a^3}\,\alpha_c^7\,(1-\alpha_c^2)^{3/2}\left[1-\frac{a_2}{a_1+a_2}\sqrt{1-a_1 z_0/\alpha_c^2}\right]^4 \times$$

$$\times\left[\frac{a_2}{(a_1+a_2)}\,\frac{1+2\,\alpha_c^2-3a_1\,z_0}{(1-a_1\,z_0/\alpha_c^2)^{3/2}}-1-2\,\alpha_c^2\right]^{-1}, \qquad (96)$$

которое с учетом решения (95) преобразуется к следующему приближенному виду:

$$R_{max} \approx R_c = \frac{16}{\pi^2}\,k^2\,H_r^3\sqrt{\frac{a_2\,H_r}{(1+a_1/a_2)^3(2+a_1/a_2)}}\,. \qquad (97)$$

Если теперь определить отношение пространственных периодов дифракционной фокусировки взаимодействующих с поверхностью океана (97) и рефрагированных (92) мод

$$\frac{R_c}{R_r} = \frac{2}{\pi}\,k\,H_r\sqrt{\frac{a_2\,H_r}{(1+a_1/a_2)^3(2+a_1/a_2)}}\,, \qquad (98)$$

то из условия $R_c / R_r > 1$ можно найти диапазон частот излучения

$$f > f_1 = \frac{c(z_0)}{4\,H_r}\sqrt{\left(1+\frac{a_1}{a_2}\right)^3\left(2+\frac{a_1}{a_2}\right)\Big/\,a_2\,H_r}\,, \qquad (99)$$

в котором будет преобладать пространственный период дифракционной фокусировки R_c, обусловленный формированием взаимодействующих с поверхностью океана слаборасходящихся акустических пучков [30,31,33,34].

Покажем, что в рамках используемого здесь приближения ВКБ всегда выполняется только это условие : $R_c / R_r > 1$. В самом деле, при рассматриваемом здесь многомодовом режиме распространения акустических волн слаборасходящийся акустический пучок может сформироваться лишь при выполнении необходимого условия, а именно, - возбуждении достаточно большого числа взаимодействующих со свободной поверхностью океанического волновода мод

$$L - L_r \gg 1 \ . \tag{100}$$

Подставляя выражения для L_r и L (90) в неравенство (100), находим удовлетворяющий ему диапазон частот излучения

$$f \gg f_2 = \frac{5}{4}\frac{c(z_0)}{\delta H_r}\sqrt{\frac{1 + a_2 / a_1}{a_2 H_r}} \ , \tag{101}$$

где

$$\delta = \left[\left[\frac{a_2}{a_1}\left(\frac{H}{z_0} - 1 \right) \right]^{3/2} - \frac{a_2}{a_1 + a_2} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{a_2}{a_1}\left(\frac{H}{z_0} - 1 \right) - 1 \right]^{3/2} - 1 \right] \ll 1 \ . \tag{102}$$

Из отношения же граничных частот соответствующих диапазонов (99), (101)

$$f_2 \, / \, f_1 = 5 \, / \, [\delta \ (1 + a_1 / a_2) \ \sqrt{1 + 2 a_2 / a_1} \ ] \ , \tag{103}$$

следует, что оно заведомо больше единицы ($f_2 \, / \, f_1 > 1$), поэтому всегда выполняется условие $R_c / R_r \gg 1$, означающее вполне естественное и существенное преобладание пространственного периода дифракционной фокусировки слаборасходящихся акустических пучков над аналогичной величиной обычных пучков в стратифицированных океанических волноводах.

В заключении сформулируем полученные в настоящей работе основные результаты выполненных исследований, направленных на установление новых, неизвестных ранее, закономерностей, проявляющихся при формировании пространственной интерференционной структуры акустических полей на сверхдальних расстояниях в стратифицированных океанических волноводах.

Во-первых, показано, что периодическое по трассе океанического волновода переформирование пространственной интерференционной структуры акустического поля, генерируемого точечным источником тонального излучения, сопровождается его дифракционной фокусировкой с соответствующим гространственным периодом.

Во-вторых, установлено, что для океанических волноводов с монотонной угловой зависимостью длины цикла бриллюэновских лучей от их лучевого параметра пространственный период переформирования интерференционной структуры акустического поля и его дифракционной фокусировки пропорционален квадрату характерного вертикального масштаба соответствующего волновода и обратно пропорционален длине волны излучения.

В-третьих, выяснено, что для океанических волноводов с немонотонной зависимостью длины цикла бриллюэновских лучей от их лучевого параметра, имеющей экстремумы, отвечающие формированию в таких волноводах слаборасходящихся акустических пучков, пространственный период переформирования интерференционной структуры акустического поля и его дифракционной фокусировки пропорционален кубу характерного вертикального масштаба соответствующего волновода и обратно пропорционален квадрату длины волны излучения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-02-16116-а).

Список литературы

1.Winthrop J.T., Worthington C.R. Theory of Fresnel images. 1. Plane periodic objects in monochromatic light // J.Opt.Soc.Amer. 1965. V. 55. N 4. P. 373-381.

2. Montgomery W.D. Self-imaging objects of finite aperture // J.Opt.Soc.Amer. 1967. V. 57. N 6. P. 772-778.

3.Edgar R.F. The Fresnel diffraction images of periodic structures // Optica Acta. 1969. V. 16. N 3. P. 281-287.

4. Денисюк Ю.И., Рамишвили Н.М., Чавчанидзе В.В. О возможности получения пространственных изображений двумерных объектов без помощи линз и голографии // Оптика и спектроскопия. 1971. Т. 30. № 6. С. 1130-1134.

5. Ривлин Л.А., Шильдяев В.С. Полигармонические волноводы для когерентного света // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1968. Т.11. № 4. С. 572-578.

6. Ривлин Л.А. Пространственная синхронизация мод оптического квантового генератора // Квантовая электроника. 1972. № 5. С. 46-52.

7. Семенов А.Т., Шильдяев В.С. Волноводная передача видеоинформации в когерентном свете // Квантовая электроника. 1971. № 3. С. 42-47.

8. Кучикян Л.М. Интерферометры световодного типа. // Оптика и спектроскопия. 1975. Т. 39. № 1. С. 180-185.

9. Wood A.B. Model experiments on propagation in shallow seas // J.Acoust.Soc.Amer. 1959. V.31. N 9. P. 1213-1235.

10. Вуд А.Б. Модельные исследования распространения звука в мелком море. Метод визуализации звуковых полей малой интенсивности // Подводная акустика. / Под ред. Л.М.Бреховских. М.: Мир, 1965. С. 195-240.

11. Weston D.E. A moire fringe analog of sound propagation in shallow water // J.Acoust.Soc.Amer. 1960. V. 32. N 6. P. 647-654.

12. Weston D.E. Sound focusing and beaming in the interference field due to several shallow-water modes // J. Acoust.Soc.Afner. 1968. V.44. N 6. P. 1706-1712.

13. Григорьева Е.Е., Семенов А.Т. Волноводная передача изображений в когерентном свете (Обзор). // Квантовая электроника. 1978. И. 5. № 9. С 1877-1894.

14. Маркузе Д. Оптические волноводы. М.: Мир, 1974. 576 с.

15. Yariv A. On transmission and recovery of three-dimensional image information in optical waveguides // J. Opt.Soc.Amer. 1976. V. 66. N 4.P. 301-306.

16. Gover A., Lee C.P., Yariv A. Direct transmission of pictorial information in multimode optical fibers // J.Opt.Soc.Amer. 1976. V. 66. N 4. P. 306-311.

17. Лав Дж., Снайдер А. Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987. 656 с.

18. Nicholas N.C., Uberall H. Range focusing in deep-ocean sound channel with parabolic profiles // J.Acoust.Soc.Amer. 1968. V. 44. N 5. P. 1259-1261.

19. Nicholas N.C., Uberall H. Normal-mode propagation calculations for a parabolic velocity profile // J.Acoust.Soc.Amer. 1970. V.48. N 3. Pt.2. P. 745-752.

20. Семенов А.Т. Передача акустических изображений по естественным морским волноводам // Акуст.журн. 1981. Т. 27. № 2. С. 315-317.

21. Horne W., Williams A.O. Jr. Axial focusing of sound in the SOFAR channel // J. Acoust. Soc. Amer. 1967. V. 41. N 1. P. 189-198.

22. Pedersen M.A. Ray theory applied to a wide class of velocity functions // J. Acoust. Soc. Amer. 1968. V. 43. N 3. P. 619-634.

23. White DeWayne. Velocity profiles that produce acoustic focal points on an axis of minimum velocity // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. V.46. N 5. P. 1318-1332.

24. Pedersen M.A., White DeWayne. Ray theory for sources and receivers on an axis om minimum velocity // J. Acoust. Soc. Amer. 1970. V. 48. N 5. P. 1219-1245.

25. Клей К.С., Толстой И. Акустика океана. М.: Мир, 1969. 301 с.

26. Акустика океана./ Под ред. Л.М.Бреховских.М.: Наука, 1974. 694 с.

27. Даргейко М.М., Кравцов Ю.А., Петников В.Г. Петросян А.С., Самойленко Ю.И., Славинский М.М. Особенности фокусировки полей излучения в многомодовых каналах // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 6. С. 746-752.

28. Алувэлья Д.С., Келлер Б.Дж. Точные и асимптотические представления звукового поля в стратифицированном океане // Распространение волн и подводная акустика / Под ред. Б.Дж. Келлера, Дж.С. Пападакиса. М.: Мир,1980. С. 20-75.

29. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М : Наука, 1973. 343 с.

30. Петухов Ю.В. Квазиоптическая теория эффекта минимального дифракционного расплывания дальних зон акустической освещенности в океане // Акуст журн. 1996. Т. 42. № 3. С. 401-411.

31. Петухов Ю.В. Квазиоптическая теория эффекта периодического пространственного переформирования дальних зон акустической освещенности в подводном звуковом канале // Акуст.журн. 1996. Т. 42. № 5. С. 688-695.

32. Бреховских Л.М., Лысанов Ю.П. Теоретические основы акустики океана Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 264 с.

33. Петухов Ю.В. Формирование преобладающих по интенсивности узких звуковых пучков в стратифицированных океанических волноводах // Акуст.журн. 1995. Т. 41.№ 5. С. 807-813.

34. Абросимов Д.И., Петухов Ю.В. Влияние дифракционных эффектов на формирование слаборасходящихся акустических пучков в подводном звуковом канале. // Акуст.журн. 1997. Т. 43. № 4. С. 437-447.

35. Кулаков В.Н., Мальцев Н.Е., Чупров С.Д. О возбуждении групп мод в слоистом океане // Акуст. журн. 1983. Т. 29. № 1. С. 74-79.

36. Вировлянский А.Л., Кирилов С.А., Шерешевский И.А. О структуре поля группы мод в многомодовом волноводе // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1988. Т. 31. № 31. С. 726-733.