Научно–исследовательский радиофизический институт
Министерства образования Российской Федерации

Препринт N 451

# О структуре дискретного спектра многочастичных гамильтонианов с растущими магнитными полями

Г. М. Жислин,
С. А. Вугальтер

Нижний Новгород, 1999

Жислин Г. М., Вугальтер С. А.
О СТРУКТУРЕ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА МНОГОЧАСТИЧНЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ С РАСТУЩИМИ МАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ
// *Препринт N 451.* — Нижний Новгород: НИРФИ, 1999. 61 с.

УДК 517.43

В работе исследуется дискретный спектр гамильтониана $H_0$ многочастичной квантовой системы $Z_1$ в магнитном поле, направленном по оси $z$ и неограниченно возрастающем на бесконечности в плоскости $(x, y)$, в пространствах функций произвольной перестановочной симметрии. Рассматривается ситуация, когда граница существенного спектра $H_0$ определяется распадениями системы $Z_1$ только на две устойчивые подсистемы. В этом случае получено описание дискретного спектра $H_0$ в терминах спектральных свойств двух эффективных одномерных двухчастичных операторов без магнитного поля. На этой основе установлены условия конечности и бесконечности дискретного спектра $H_0$ и спектральные асимптотики — в случае, когда дискретный спектр бесконечен. Результаты применимы, в частности, для гамильтонианов любых атомов, их положительных ионов и большинства двухатомных молекул.

Поддержано Грантом РФФИ 99-01-00078

# Введение

Настоящая работа посвящена изучению структуры дискретного спектра многочастичных гамильтонианов с растущими магнитными полями, имеющими направление оси $z$, не зависящими от $z$ и неограниченно возрастающими на бесконечности в плоскости $(x, y)$.

Основная трудность, возникающая при изучении спектральных свойств гамильтониана системы $Z_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$ $n$ частиц с конечными массами в магнитном поле, появляется вследствие невозможности в общем случае полностью отделить движение центра масс (ц.м.) системы. Даже для систем в поле вида $F = (0, 0, F_3(\rho))$ $\rho = (x, y)$, активно изучаемых в последнее время (см. например,[1–5]) и рассматриваемых в данной статье, такое отделение осуществимо лишь в направлении оси $z$, т.е. в направлении поля, и невозможно в плоскости $(x, y)$. Вследствие этого спектр оператора $H_0$ (см. (1.4)), полученного из исходного гамильтониана после отделения движения ц.м. в направлении 3-ей оси, вообще говоря, может содержать непрерывную компоненту, порождаемую движением всей системы как целого в плоскости $(x, y)$ и замазывающую вследствие этого дискретный и существенный спектр относительного движения. Для получения гамильтониана, отвечающего относительному движению системы, применяют ограничения оператора $H_0$ на такие подпространства, где движение ц.м. системы к бесконечности в плоскости $(x, y)$ невозможно: в случае однородного магнитного поля $(F_3(\rho) = const)$ — это собственные подпространства одной или двух компонент псевдомомента [6,4], в общем случае не возрастающего магнитного поля, имеющего $SO(2)$ симметрию, $(F_3(\rho) = F_3(|\rho|), \lim_{t\to\infty} |F_3(t)| < \infty)$ — это подпространства функций, обладающих фиксированными типами $SO(2)$ симметрии [3].

Принципиально иная ситуация имеет место для магнитных полей, неограниченно возрастающих при $|\rho| \to \infty$. Нами было показано ([1,2]), что в этом случае спектр гамильтониана $H_0$ не может отвечать движению всей системы как целого на бесконечность в плоскости $(x, y)$, т.к. при таком движении неограниченно возрастала бы кинетическая энергия системы. Таким образом в данном случае гамильтониан $H_0$ может рассматриваться как оператор энергии относительного движения системы $Z_1$.

Существенный спектр $H_0$ был найден в [1,2], какие-либо результаты о дискретном спектре отсутствовали.

В настоящем препринте мы устанавливаем структуру дискретного спектра $H_0$ для широкого класса многочастичных квантовых систем в возрастающих магнитных полях. Наш главный результат — Теорема 1.1 — осуществляет при некоторых условиях редукцию задачи о дискретном спектре многочастичной системы в магнитном поле к задаче о дискретном спектре некоторой эффективной двухчастичной одномерной системы без магнитного поля. На основе этой теоремы мы получаем условия конечности дискретного спектра (Теорема 1.2) и главный член спектральной асимптотики, а также оценку остаточного члена в ситуации, когда спектр бесконечен (Теорема 1.3). Наконец, мы показываем, что наши результаты применимы к нейтральным атомам (включая и экзотические), их однократным ионам и к большинству двухатомных молекул (Теорема 1.4). При этом для гамильтонианов всех атомов и их (+)ионов ( (-)ионов в случае экзотических атомов) найдены асимптотики дискретного спектра, а для гамильтонианов рассматриваемых молекул — доказана его конечность.

Для гамильтонианов отрицательных ионов обычных атомов (и положительных ионов экзотических атомов) в возрастающем магнитном поле структура дискретного спектра осталась невыясненной, хотя Теорема 1.1 о редукции применима и для них. Причина такой ситуации состоит в том, что в рассматриваемом случае главный член потенциала взаимодействия (1.8) в эффективной двухчастичной системе обращается в ноль, а скорость убывания на бесконечности следующего члена зависит от некоторых свойств основного состояния атома, наличие или отсутствие которых проверить не удается. Отметим, что здесь возникают практически те же трудности, что и в более простой — но тем не менее не решенной до сих пор — задаче о структуре дискретного спектра операторов энергии (-)ионов в отсутствии магнитных полей [7].

Все результаты данной работы получены с учетом перестановочной симметрии — т.е. для ограничений рассматриваемых операторов на подпространства функций, отвечающих произвольно фиксированным типам неприводимых представлений группы $S[Z_1]$ перестановок тождественных частиц системы $Z_1$. Учет симметрии не вызван потребностями применяемых здесь методов; кроме того он значительно утяжеляет изложение. Тем не менее мы последовательно проводим его в работе, ибо он позволяет с одной стороны автоматически учесть запрет Паули (если выбирать только разрешенные принципом Паули типы перестановочной симметрии пространств координатных функций, в которых рассматривается изучаемый оператор $H_0$) и, с другой стороны, обнаруживать собственные значения оператора $H_0$ (в том числе и физически реализуемые), лежащие на его существенном спектре, в том случае, когда они являются дискретными хотя бы в одном из подпространств фиксированной перестановочной симметрии.

## §1. Определения и результаты

1.1. Пусть $Z_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ — квантовая система $n$ частиц с массами $m_j$, зарядами $e_j$ и радиус-векторами $r_j = (\rho_j, z_j)$, $\rho_j = (x_j, y_j)$, в магнитном поле $F = (0, 0, F_3(\rho))$, $\rho = (x, y)$. Гамильтониан системы $Z_1$ записывается в виде

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{n} m_j^{-1} \left(\frac{1}{i}\nabla_j - B_j e_j\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{s,t=1 \\ s\neq t}}^{n} V_{st}(|r_{st}|), \tag{1.1}$$

где $r_{st} = r_s - r_t$, $\nabla_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right)$, $B_j = (B_{j1}(\rho_j), B_{j2}(\rho_j), 0)$ — магнитный вектор-потенциал, отвечающий полю $F$ и связанный с $F$ равенством

$$\frac{\partial}{\partial x_j} B_{j2} - \frac{\partial}{\partial y_j} B_{j1} = F_3(\rho_j). \tag{1.2}$$

Всюду далее считаем, что $B_j \in C_1$, $F_3(-\rho_j) = F_3(\rho_j)$ и что $|F_3(\rho_j)| \to \infty$ при $|\rho_j| \to \infty$. Относительно потенциалов $V_{st}(|r_{st}|)$ мы предполагаем, что

$$\begin{gathered} V_{st}(|r_1|) = V_{ts}(|r_1|), \quad \overline{V_{st}(|r_1|)} = V_{st}(|r_1|), \\ V_{st}(|r_1|) \in \mathcal{L}_{2,loc}(R^3), \quad V_{st}(|r_1|) \in C^2 \text{ при } |r_1| \neq 0, \\ V_{st}(|r_1|) = e_s e_t |r_1|^{-\gamma} \text{ при } |r_1| > a, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где $a > 0$, $\gamma > 0$ — некоторые числа.

1.2. Отделим движение ц.м. системы $Z_1$ в направлении оси $z$. Тогда в координатах $(q_1, \dots, q_n)$, $q_j = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3})$, $q_{j1} = x_j$, $q_{j2} = y_j$, $q_{j3} = z_j - M^{-1} \sum_{p=1}^{n} m_p z_p$, где $M = \sum_{j=1}^{n} m_j$, оператор энергии системы может быть записан в виде

$$H_0 = H_0[Z_1] = T_\perp + T_{03} + V, \tag{1.4}$$

где

$$T_\perp = T_\perp[Z_1] = \sum_{j=1}^{n} T_{j\perp}, \quad T_{03} = T_{03}[Z_1] = \sum_{j=1}^{n} m_j \left(\frac{1}{i}\nabla_{j3}^0\right)^2,$$

$$T_{j\perp} = m_j^{-1}\left[\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q_{j1}} - e_j B_{j1}\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial q_{j2}} - e_j B_{j2}\right)^2\right],$$

$$\nabla_{j3}^0 = \frac{1}{m_j}\frac{\partial}{\partial q_{j3}} - \frac{1}{M}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial}{\partial q_{t3}};$$

здесь $T_{03}$ — оператор кинетической энергии относительного[1] движения частиц системы $Z_1$. Оператор $H_0$ будем рассматривать в пространстве

$$R_0 = \{q | q = (q_1, \ldots, q_n), \quad q_j = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3}), \quad j = 1, 2, \ldots, n\}$$

— пространстве относительного движения частиц системы (в $R_0$ третья координата ц.м. равна нулю: $\sum_{j=1}^{n} m_j q_{j3} \equiv 0$).

Расширим оператор $H_0$ в пространстве $\mathcal{L}_2(R_0)$ с области $C_0^2(R_0)$ до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение.

1.3. Пусть $S = S[Z_1]$ – группа перестановок тождественных частиц системы $Z_1$, $\alpha$ – произвольный тип неприводимого представления (н.п.) группы $S$ операторами $T_g$ в пространстве $\mathcal{L}_2(R_0)$: $T_g\Psi(q) = \Psi(g^{-1}q)$, $q \in R_0$, $g \in S$,[2] $|\alpha|$ – размерность н.п. типа $\alpha$, $P^\alpha$ – проектор в $\mathcal{L}_2(R_0)$ на подпространство функций, преобразующихся под действием операторов $T_g$ по представлениям, кратным н.п. типа $\alpha$. Пусть $H_0^\alpha = P^\alpha H_0$, т.е. $H_0^\alpha$ есть ограничение оператора $H_0$ на подпространство $P^\alpha \mathcal{L}_2(R_0)$.

---

[1] Здесь и всюду далее относительное движение рассматривается в направлении оси $z$

[2] Далее, не оговаривая это особо, мы всюду рассматриваем представления любой подгруппы $S^0$ из $S$ в любом пространстве функций $f(q)$, $q \in R_0$, только операторами $T_g, g \in S^0$

Цель настоящей статьи — исследование дискретного спектра оператора $H_0^\alpha$.

1.4. Пусть $C$ — произвольная подсистема (кластер) из $Z_1$, $|C|$ — число частиц в $C$,

$$
\begin{aligned}
& M[C]=\sum_{i\in C} m_i, \quad \zeta[C]=M[C]^{-1}\sum_{t\in C} m_t q_{t3},\\
R_0[C]= \ & \Big\{q[C]\,\Big|\, q[C]=(q_1[C],\dots,q_n[C]),\\
& q_i[C]=(q_{i1}[C],q_{i2}[C],q_{i3}[C]),\\
& q_{ij}[C]=0\ j=1,2,3,\ i\notin C, \quad q_{ij}[C]=q_{ij}\ j=1,2,\\
& q_{i3}[C]=q_{i3}-\zeta[C]\ i\in C\Big\}.
\end{aligned}
$$

$R_0[C]$ — пространство относительного движения кластера $C$. Оператор энергии кластера $C$ в пространстве $\mathcal{L}_2(R_0[C])$ записывается в виде

$$
H_0[C]=T_\perp[C]+T_{03}[C]+V[C],
$$

где

$$
\begin{aligned}
& T_\perp[C]=\sum_{j\in C} T_{j\perp}, \quad T_{03}[C]=\sum_{t\in C} m_t\left(\frac{1}{i}\nabla_{t3}^0[C]\right)^2,\\
& \nabla_{t3}^0[C]=\frac{1}{m_t}\frac{\partial}{\partial q_{t3}[C]}-\frac{1}{M[C]}\sum_{p\in C}\frac{\partial}{\partial q_{p3}[C]} \quad t\in C,\\
& V[C]=\frac{1}{2}\sum_{i,j\in C} V_{ij}\left(|q_i[C]-q_j[C]|\right).
\end{aligned}
$$

Пусть, далее, $Z_s=\{C_1,\dots,C_s\}$ — произвольное разбиение исходной системы $Z_1$ на $s$ непустых попарно не пересекающихся кластеров $C_j$, $M(Z_s)^{-1}=\sum_{i=1}^{s} M[C_i]^{-1}$. Введем для системы $Z_s$ пространство относительного движения

$$
R_0(Z_s)=\sum_{j=1}^{s}\oplus R_0[C_j],
$$

пространство движения ц.м. кластеров

$$R_c(Z_s) = R_0 \ominus R_0(Z_s) =$$

$$\left\{q^c(Z_s) | q^c(Z_s) = (q_1^c(Z_s), \ldots, q_n^c(Z_s)), q_j^c(Z_s) = (0, 0, \zeta[C_t]), j \in C_t\right\},$$

и оператор энергии не взаимодействующих между собой кластеров $C_j$:

$$H_0(Z_s) = T_\perp + T_{03}(Z_s) + V_{Z_s}, \tag{1.5}$$

где $T_\perp = T_\perp[Z_1] = \sum_{j=1}^{s} T_\perp[C_j]$ — то же, что в (1.4), $T_{03}(Z_s) = \sum_{j=1}^{s} T_{03}[C_j]$, $V_{Z_s} = \sum_{j=1}^{s} V[C_j]$. Оператор $H_0(Z_s)$ мы рассматриваем в пространстве $\mathcal{L}_2(R_0(Z_s))$.

1.5. Пусть $S[C_j]$ — группа перестановок тождественных частиц подсистемы $C_j$ между собой и группа $\hat{S}(Z_s)$ порождена перестановками группы $S(Z_s) = S[C_1] \times \ldots \times S[C_s]$ и перестановками между собой тождественных ($\sim$) кластеров из $Z_s$, если таковые в $Z_s$ имеются. Если $C_i \not\sim C_j$ ни для одной пары $i, j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, s$), $i \neq j$, то $\hat{S}(Z_s) = S(Z_s)$. Пусть $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(Z_s)$, $\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_0(Z_s)$ и $\hat{\alpha}_c = \hat{\alpha}_c(Z_s)$ — суть типы н.п. группы $\hat{S}(Z_s)$ в пространствах $\mathcal{L}_2(R_0)$, $\mathcal{L}_2(R_0(Z_s))$ и $\mathcal{L}_2(R_c(Z_s))$, $|\hat{\alpha}|$, $|\hat{\alpha}_0|$, $|\hat{\alpha}_c|$ — размерности соответствующих н.п. Обозначим через $\mathfrak{M}_{\hat{\alpha}}^{\alpha}$ кратность н.п. типа $\hat{\alpha}$ группы $\hat{S}(Z_s)$ в н.п. типа $\alpha$ группы $S$ после сужения последнего с $S$ на $\hat{S}(Z_s)$ и будем писать:

> $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_c) \prec \alpha$, если разложение тензорного произведения представлений $\mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_0} \otimes \mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_c}$ типов $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\alpha}_c$ группы $\hat{S}(Z_s)$ на неприводимые содержит хотя бы одну компоненту $\mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}}$, для которой $\mathfrak{M}_{\hat{\alpha}}^{\alpha} \geq 1$,
>
> $\hat{\alpha}_0 \prec \alpha$, если $\exists \hat{\alpha}_c$ так, что $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_c) \prec \alpha$.

Отметим, что поскольку $T_g\psi(q) = \psi(g^{-1}g)$, и $g^{-1}q^c(Z_s) = q^c(Z_s)$ при $g \in S(Z_s)$, то при отсутствии в $Z_s$ тождественных между собой кластеров все представления $\mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_c}$ — тождественные ($\mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_c} \equiv 1$

$\forall g \in \hat{S}(Z_s) = S(Z_s))$ и $\mathcal{D}_g^{\hat\alpha} = \mathcal{D}_g^{\hat\alpha_0} \otimes \mathcal{D}_g^{\hat\alpha_c} = \mathcal{D}_g^{\hat\alpha_0}$. Если некоторые кластеры разбиения $Z_s$ тождественны между собой, то описание возможных типов $\hat\alpha_c$ н.п. группы $\hat{S}(Z_s)$ в $\mathcal{L}_2(R_c(Z_s))$, (а следовательно и типов $\hat\alpha_0$, $\hat\alpha_0 \prec \alpha$) более сложно и мы ограничимся только важным для дальнейшего случаем $s = 2$. Пусть $Z_2 = \{C_1, C_2\}$, $C_1 \sim C_2$ и перестановка $g_0$ переводит кластеры $C_1$ и $C_2$ друг в друга. Так как $M[C_1]\zeta[C_1] + M[C_2]\zeta[C_2] = 0$, то $g_0 q^c(Z_2) = -q^c(Z_2)$. Следовательно, группа $S(Z_2)$ может иметь в $\mathcal{L}_2(R_c(Z_2))$ только два различных неприводимых (одномерных) представления: тождественное, в котором $\mathcal{D}_g^{\hat\alpha_c} = 1$ $\forall g \in \hat{S}(Z_2)$, и антисимметричное, и где $\mathcal{D}_g^{\hat\alpha_c} = 1$ при $\forall g \in S(Z_2)$ и $\mathcal{D}_{g_0}^{\hat\alpha_c} = -1$. Типы этих н.п. мы будем обозначать соответственно через $\hat\alpha_c^+$ и $\hat\alpha_c^-$. В силу сказанного, при $Z_s = Z_2$ и $C_1 \sim C_2$ представление $\mathcal{D}_g := \mathcal{D}_g^{\hat\alpha_0} \otimes \mathcal{D}_g^{\hat\alpha_c}$ неприводимо. Его тип $\hat\alpha$ при $\hat\alpha_c = \hat\alpha_c^+$ будет совпадать с $\hat\alpha_0$, в этом случае мы обозначаем $\hat\alpha$ через $\hat\alpha_0$ или $\hat\alpha_0^+$; при $\hat\alpha_c = \alpha_c^-$ мы будем писать $\hat\alpha = \hat\alpha_0^-$.[3)]

1.6. Обозначим через $P^{\hat\alpha_0}$ проектор в $\mathcal{L}_2(R_0(Z_s))$ на подпространство функций, преобразующихся по представлениям кратным $\mathcal{D}_g^{\hat\alpha_0}$ $g \in \hat{S}(Z_s)$. Пусть

$$H_0^{\hat\alpha_0}(Z_s) = P^{\hat\alpha_0} H_0(Z_s), \quad H_0(\alpha; Z_s) = \sum_{\hat\alpha_0 \prec \alpha} H_0^{\hat\alpha_0}(Z_s),$$

$$\mu^\alpha = \min_{Z_2} \inf H_0(\alpha; Z_2).^{4)}$$

В силу [1],[2] $\mu^\alpha$ — нижняя грань существенного спектра оператора $H_0^\alpha$. Положим

$$O(\alpha) = \{Z_2 | \inf H_0(\alpha; Z_2) = \mu^\alpha\}$$

[3)]Чтобы описывать случаи $C_1 \sim C_2$ и $C_1 \not\sim C_2$ единообразно, мы будем использовать обозначение $\hat\alpha_c^-$ и при $C_1 \not\sim C_2$ , считая, что в этом случае $\hat\alpha_c^- = \hat\alpha_c^+$ и, значит, $\hat\alpha_0^- = \hat\alpha_0^+$.

[4)]Отметим что в определении $\mu^\alpha$ мы могли взять минимум по разбиениям $Z_s$ с $s \geq 2$, а не только с $s = 2$, ибо в силу рассуждений п. 3.2 для любого $Z_s = (C_1, \ldots, C_s)$ при $s \geq 3$ выполняется $\inf H_0(\alpha; Z_s) \geq \inf H_0(\alpha; Z_2^*)$, где $Z_2^* = (C_1^*, C_2^*)$, $C_2^* = C_2 \cup C_3 \cup \ldots C_s$, $C_1^* = C_1$

Всюду в данной работе мы будем предполагать, что

A) *для любого разбиения* $Z_2 \in O(\alpha)$ *число* $\mu^\alpha$ *принадлежит дискретному спектру оператора* $H_0(\alpha; Z_2)$.

Далее будет доказано (см. неравенство (3.5), §3), что при выполнении условия A)

$$\inf H_0(\alpha; Z_s) > \mu^\alpha \text{ при } s \geq 3. \tag{1.6}$$

Поскольку наличие дискретного спектра у гамильтониана квантовой системы означает устойчивость этой системы, то с учетом (1.6) мы можем переформулировать условие A) на физическом языке следующим образом:

*A′) граница существенного спектра оператора* $H_0^\alpha$ *определяется распадениями системы* $Z_1$ *только на два устойчивых кластера.*

Проверка условия A) для конкретных систем не тривиальна и мы не уверены, например, что оно выполняется для любых многоатомных молекул или многонуклонных систем. Однако для нейтральных атомов, всех их положительных ионов и однократных отрицательных ионов, а также для большинства двухатомных молекул мы можем доказать, что условие A) выполняется (см. Теорему 1.4).

Разобьем множество $O(\alpha)$ на классы $O_k(\alpha)$ $k = 1, 2, \ldots, k_0$, помещая в один и тот же класс те и только те разбиения $Z_2$, каждое из которых может быть получено из любого другого разбиения этого же класса перестановками тождественных частиц. Другими словами разбиения $Z_2 = \{C_1, C_2\}$ и $Z_2' = \{C_1', C_2'\}$ принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда кластеры $C_1$, $C_2$ физически неотличимы соответственно от кластеров $C_1'$, $C_2'$ или от $C_2'$, $C_1'$, если отвлечься от нумерации частиц. Выберем в каждом классе $O_k(\alpha)$ в качестве "представителя" какое-либо разбиение $Z_{2k} = \{C_{k1}, C_{k2}\}$ и фиксируем его.

1.7. Обозначим через $W(\alpha; Z_{2k})$ собственное подпространство оператора $H_0(\alpha; Z_{2k})$, отвечающее его собственному значению

$\mu^\alpha$, и разложим его в прямую сумму таких подпространств $W_i^k = W_i(\alpha; Z_{2k})$ $i = 1, 2, \ldots, i_k$, что в каждом из них представление группы $\hat{S}(Z_{2k})$ неприводимо. Пусть $\alpha_{0i}^k = \hat{\alpha}_{0i}(Z_{2k})$ — тип н.п. группы $\hat{S}(Z_{2k})$ в $W_i^k$, $i = 1, 2, \ldots, i_k$.
Тогда, по построению, $P^{\alpha_{0i}^k}(Z_{2k})W_i^k = W_i^k$ и $\dim W_i^k = |\alpha_{0i}^k| = \dim \mathcal{D}^{\alpha_{0i}^k}$. Мы не предполагаем, что $\alpha_{0i}^k \neq \alpha_{0j}^k$ при $i \neq j$, т.е. мы не исключаем возможности того, что в пространствах $W_i^k$ и $W_j^k$ при $i \neq j$ могут реализовываться эквивалентные н.п. группы $\hat{S}(Z_{2k})$. Не ограничивая общности можно считать далее, что все функции каждого из пространств $W_i^k$ обладают одной и той же четностью $\omega_i^k$ относительно инверсии

$$J_k : q_{p3}(Z_{2k}) \to -q_{p3}(Z_{2k}) \quad p = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Действительно, поскольку оператор $H_0(\alpha; Z_{2k})$ инвариантен относительно инверсии $J_k$, то этим же свойством обладает и подпространство $W(\alpha; Z_{2k})$. Разобьем его на подпространства $W^\pm(\alpha; Z_{2k})$ функций четных (+) и нечетных (-) относительно $J_k$. Так как инверсия $J_k$ коммутирует с операторами $T_g$ $g \in \hat{S}(Z_{2k})$, то каждое из пространств $W^\pm(\alpha; Z_{2k})$ инвариантно для операторов $T_g$ $g \in \hat{S}(Z_{2k})$.
Поэтому и т.к. $W(\alpha; Z_{2k}) = W^+(\alpha; Z_{2k}) \oplus W^-(\alpha; Z_{2k})$, разложение пространства $W(\alpha; Z_{2k})$ на подпространства $W_i^k$ с требуемыми свойствами можно осуществить разлагая на подпространства $W_i^k$ по отдельности подпространства $W^+(\alpha; Z_{2k})$ и $W^-(\alpha; Z_{2k})$. При этом, очевидно, четность $\omega_i^k$ каждой функции из $W_i^k$ относительно инверсии $J_k$ равна +1 при $W_i^k \subseteq W^+(\alpha; Z_{2k})$ и $\omega_i^k = -1$ при $W_i^k \subseteq W^-(\alpha; Z_{2k})$.

Согласно п. 1.5, представления

$$\mathcal{D}_g := \mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_{0i}^k} \times \mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_c^\pm}$$

неприводимы; их типы мы обозначим через $\hat{\alpha}_{ki}^\pm$. Ясно, что всегда $\hat{\alpha}_{ki}^+ = \hat{\alpha}_{0i}^k$. При $C_{k1} \not\sim C_{k2}$ выполняется $\hat{\alpha}_c^+ = \hat{\alpha}_c^-$ и значит $\hat{\alpha}_{ki}^+ = \hat{\alpha}_{ki}^-$; в общем случае равенство $\hat{\alpha}_{ki}^+ = \hat{\alpha}_{ki}^-$ возможно тогда и только тогда, когда характеры всех элементов $g \in \hat{S}(Z_{2k}) \backslash S(Z_{2k})$ в представлении типа $\hat{\alpha}^k_{0i}$ равны нулю.

Положим

$$d_{k\omega}(\alpha) = \sum_{i=1}^{i_k} \mathfrak{M}^{\alpha}_{\hat{\alpha}^{\omega}_{ki}} \quad \omega = \pm.$$

1.8. Из не строгих физических соображений следует, что в предположении A) п. 1.6 “вклад” распадения $Z_{2k} = \{C_{k1}, C_{k2}\}$ в дискретный спектр оператора $H^{\alpha}_{0}$ должен зависеть от потенциалов взаимодействия между кластерами $C_{k1}$, $C_{k2}$, когда система $Z_{2k}$ находится в основном состоянии (с энергией $\mu^{\alpha}$) и когда расстояние $|\zeta_k| = |\zeta[C_{k1}] - \zeta[C_{k2}]|$ между ц.м. кластеров $C_{k1}$, $C_{k2}$ в направлении оси $z$ велико.[5] Таким образом можно ожидать, что структура дискретного спектра $H^{\alpha}_{0}$ будет приближенно определяться объединением по всем $Z_{2k}$ $k = 1, 2, \ldots, k_0$ дискретных спектров одномерных эффективных двухчастичных операторов, где для каждого $Z_{2k}$ роль частиц играют кластеры $C_{k1}$ и $C_{k2}$, а эффективный потенциал взаимодействия при $|\zeta_k| \gg 1$ дается равенством

$$\hat{V}_{Z_{2k}}(\zeta_k) = \sum_{s \in C_{k1}, t \in C_{k2}} (V_{st}(|q_s - q_t|)u, u)_{\mathcal{L}_2(R_0(Z_{2k}))}; \qquad (*)$$

здесь $u \in W(\alpha; Z_{2k})$, $||u|| = 1$. Так как функции $u$ из $W(\alpha; Z_{2k})$ нам неизвестны, то неизвестно и явное выражение потенциала $\hat{V}_{Z_{2k}}(\zeta_k)$. Поэтому, чтобы воспользоваться формулой (*), мы вынуждены оценить правую часть (*) сверху и снизу. Кроме того, при описании спектра $H^{\alpha}_{0}$ через спектры эффективных операторов мы должны учесть возможное вырождение подпространства $W(\alpha; Z_{2k})$ “по симметрии”, описанное в п. 1.7.

---

[5] Неограниченное возрастание расстояния между кластерами $C_{k1}$ и $C_{k2}$ в плоскости $(x, y)$ невозможно, т.к. оно приводит к неограниченному возрастанию энергии системы за счет неограниченного возрастания магнитного поля [1,2].

После этих наводящих рассуждений возвращаемся к строгому изложению.

Пусть $Q[C_{kt}] = \sum\limits_{s\in C_{kt}} e_s, \quad t = 1,2, \quad Q(Z_{2k}) = Q[C_{k1}]Q[C_{k2}]$.
Положим

$$V_k^{\pm}(\zeta) = Q(Z_{2k})|\zeta|^{-\gamma} \pm c_0|\zeta|^{-\theta_k} \text{ при } |\zeta| \geq a_0, \qquad V_k^{\pm}(\zeta) \equiv 0 \text{ при } |\zeta| < a_0, \tag{1.8}$$

где $\zeta \in R^1$, $c_0 > 0$, $a_0 > 0$ — некоторые константы,
$\theta_k = \min(\gamma + 2, 4)$, если хотя бы одно из следующих условий B), C) выполнено:

B) $C_{k1} \not\sim C_{k2}$ и все функции из $W(\alpha; Z_{2k})$, имеющие один и тот же тип перестановочной симметрии, имеют одну и ту же четность относительно инверсии $J_k$, т.е. если $\alpha_{0i}^k = \alpha_{0s}^k$ $i \neq s$, то $\omega_i^k = \omega_s^k$ (см. п. 1.7);

C) кластеры $C_{k1}$ и $C_{k2}$ нейтральны, т.е. $Q[C_{k1}] = Q[C_{k2}] = 0$;

$\theta_k = \min(\gamma + 1, 4)$ — в остальных случаях.

Определим эффективные одномерные операторы

$$h_k^{\pm} = h^{\pm}(Z_{2k}) = -M(Z_{2k})^{-1}\frac{d^2}{d\zeta_k^2} + V_k^{\pm}(\zeta_k) \quad \zeta_k \in R^1 \tag{1.9}$$

и обозначим через $h_{k\omega}^{\pm} = h_{\omega}^{\pm}(Z_{2k})$ ограничения операторов $h_k^{\pm}$ на множества функций четных ($\omega = +$) или не четных ($\omega = -$) относительно инверсии $\zeta_k \to -\zeta_k$.

Для произвольного самосопряженного оператора $G$ и вещественного числа $\delta$ обозначим: через $N(\delta; G)$ размерность линейной оболочки собственных функций оператора $G$, отвечающих его собственным значениям, не превосходящим $\delta$; через $\mathcal{D}(G)$ — область определения оператора $G$; через $\sigma_p(G)$, , $\sigma_d(G)$, $\sigma_{ess}(G)$ и $\sigma(G)$ соответственно точечный, дискретный, существенный и весь спектр оператора $G$.

1.9. **Теорема 1.1.** *Пусть $\alpha$ произвольно и выполняется условие A) п. 1.6. Тогда для всех $\lambda < 0$ и некоторой константы $c > 0$*

$$
\begin{gathered}
-c + \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{\omega=\pm} d_{k\omega}(\alpha) N(\lambda; h^{+}_{k\omega}) \leq N(\mu^{\alpha} + \lambda; H^{\alpha}_{0}) \leq \\
\leq c + \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{\omega=\pm} d_{k\omega}(\alpha) N(\lambda; h^{-}_{k\omega}).
\end{gathered}
\tag{1.10}
$$

**Замечание.** *При $C_{k1} \not\sim C_{k2}$, очевидно $d_{k+}(\alpha) = d_{k-}(\alpha) = d_k(\alpha)$ и, следовательно,*

$$
\sum_{\omega=\pm} d_{k\omega}(\alpha) N(\lambda; h^{\pm}_{k\omega}) = d_k(\alpha) N(\lambda; h^{\pm}_{k}).
$$

Для тех $k$, для которых $C_{k1} \sim C_{k2}$, множества $\sigma_d(h^{\pm}_{k\omega})$ не более чем конечны. Поэтому соответствующие слагаемые в (1.10) (если они есть) равномерно (по $\lambda$) ограничены и не влияют на конечность или бесконечность спектра $\sigma_d(H^{\alpha}_0)$.

Теорема 1.1 описывает свойства дискретного спектра многочастичного гамильтониана с магнитным полем через свойства дискретного спектра гамильтонианов двух одномерных частиц с массами $M[C_{k1}]$ и $M[C_{k2}]$ в отсутствии магнитных полей.

Из Теоремы 1.1 и известных результатов [8], [9] о конечности и бесконечности дискретного спектра и о спектральных асимптотиках для операторов $h^{\pm}_{k}$ вытекают следующие теоремы о структуре дискретного спектра оператора $H^{\alpha}_0$

**Теорема 1.2.** *Пусть $\alpha$ произвольно и условие A) п. 1.6 выполнено. Тогда дискретный спектр оператора $H^{\alpha}_0$ конечен, если $\gamma > 2$ или если для каждого $Z_{2k} \in O(\alpha)$ $k = 1, 2, \ldots, k_0$ выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1. $\gamma = 2$ *и* $Q(Z_{2k}) \geq -\frac{1}{4} M(Z_{2k})^{-1}$,

2. $\gamma > 1$ *и* $Q(Z_{2k}) = 0$,

3. $\gamma = 1$, $Q(Z_{2k}) = 0$ *и для разбиения* $Z_{2k}$ *выполнено хотя бы одно из условий B), C) п. 1.8,*

4. $\gamma > 0$, $Q(Z_{2k}) > 0$.

**Теорема 1.3.** *Пусть* $\alpha$ *произвольно и условие A) п. 1.6 выполнено. Тогда*

1. *если* $\gamma < 2$ *и* $Q(Z_{2k}) < 0$ *хотя бы для одного* $Z_{2k} \in O(\alpha)$, *то спектр* $\sigma_d(H_0^\alpha)$ *бесконечен и при* $\lambda \to -0$

$$N(\mu^\alpha + \lambda; H_0^\alpha) = \\ = |\lambda|^{\frac{(\gamma-2)}{2}} \Big( \sum_{k:Q(Z_{2k})<0} d_k(\alpha) M(Z_{2k})^{\frac{1}{2}} |Q(Z_{2k})|^{\frac{1}{\gamma}} \Big) J + \mathcal{R}(\lambda), \tag{1.11}$$

*где* $J = \gamma^{-1} \int_1^\infty (t-1)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{(\gamma+1)}{\gamma}} dt$,

$\mathcal{R}(\lambda) = O(\big|\ln|\lambda|\big|)$, *если* $\gamma \geq 1$ *или если для каждого* $Z_{2k} \in O(\alpha)$, *для которого* $Q(Z_{2k}) < 0$, *выполняется условие B) п. 1.8; в остальных случаях* $\mathcal{R}(\lambda) = O(|\lambda|^{\frac{(\gamma-1)}{2}})$;

2. *если* $\gamma = 2$ *и* $Q(Z_{2k}) < -\frac{1}{4} M(Z_{2k})^{-1}$ *хотя бы для одного* $Z_{2k} \in O(\alpha)$, *то спектр* $\sigma_d(H_0^\alpha)$ *бесконечен и при* $\lambda \to -0$

$$N(\mu^\alpha + \lambda; H_0^\alpha) = \\ = \frac{1}{2\pi} \big|\ln|\lambda|\big| \Big( \sum_{k:Q(Z_{2k})<-\frac{1}{4}M(Z_{2k})^{-1}} d_k(\alpha)(4|Q(Z_{2k})|\, M(Z_{2k}) - 1)^{\frac{1}{2}} \Big) + \\ + o(\big|\ln|\lambda|\big|)$$

1.10. Рассмотрим вопрос о применимости Теорем 1.1–1.3 к системам типа атомов и их ионов, а также к системам типа двухатомных молекул. Пусть $V_{st}(|r_1|) = e_s e_t |r_1|^{-\gamma}$ для любых $r_1$ (а не только при $|r_1| > a$), $0 < \gamma < 1,5$ и для системы $Z_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ выполняется одно из условий:

D) $e := e_2 = \cdots = e_n$, $m := m_2 = \cdots = m_n$, $ee_1 + (n-2)e^2 \leq 0$,

M) для некоторого $p$, $2 \leq p \leq n-2$, и $p_1 = n - p$
$e_j = e$, $m_j = m$, $j = 2, 3, \ldots, p, p+2, \ldots, n$, $e_1 = -(p-1)e$, $e_{p+1} = -(p_1 - 1)e$

Случай D) отвечает системе $(n-1)$ тождественных частиц с номерами $2, 3, \ldots, n$, находящихся в поле частицы номер 1 с зарядом противоположного знака. При $\gamma = 1$ и $e_1 > 0$, $e < 0$ в зависимости от величины $Q = e_1 + (n-1)e$ мы получаем или нейтральный атом ($Q = 0$), или положительный ион ($Q \geq -e$), или однократный отрицательный ион ($Q = e$). При $\gamma = 1$ и $e_1 < 0$, $e > 0$ случай D) соответствует так называемым экзотическим атомам ($Q = 0$) и их ионам: отрицательным ($Q \leq e$) или однократным положительным ($Q = -e$). Случай M) при $\gamma = 1$ отвечает двухатомной молекуле. Ядра атомов имеют номера 1 и $p+1$, все остальные частицы — электроны — тождественны между собой. Хотя реальным электронам, ядрам, атомам, ионам и молекулам отвечает только случай $\gamma = 1$, далее мы будем употреблять эти термины и при $\gamma \neq 1$.

**Теорема 1.4.** *Пусть $\alpha$ произвольный тип перестановочной симметрии системы $Z_1$, для которой справедливо одно из условий D), M), причем в случае M) мы предполагаем дополнительно, что множество $O(\alpha)$ состоит только из распадений на нейтральные атомы. Тогда для системы $Z_1$ выполняется требование A) п. 1.6.*

**Замечание.** *Теорема 1.4 остается справедливой и для систем с такими потенциалами $V_{st}(|r_1|)$, которые совпадают с $e_s e_t |r_1|^{-\gamma}$ лишь вне какого-либо шара в $R^3$, если*

$$V_{st}(|r_1|) \in \mathcal{L}_{2,loc}(R^3), \quad V_{st}(|r_1|) \equiv V_{s't'}(|r_1|) \text{ при } s \sim s', t \sim t'$$
$$\text{и } V_{st}(|r_1|) < 0 \quad \{V_{st}(|r_1|) > 0\},$$

*когда частицы с номерами $s, t$ заряжены разноименно {одноименно}. Отметим, что вместо ограничения $0 < \gamma < 1{,}5$, вызванного требованием $|r_1|^{-\gamma} \in \mathcal{L}_{2,loc}(R^3)$, мы можем теперь предполагать выполнение более слабого неравенства $0 < \gamma < 2$.*

Теорема 1.4 обеспечивает возможность применения к системе $Z_1$ Теорем 1.1–1.3. Рассмотрим сначала случай D) — случай атомов или ионов. В ситуации D) все распадения $Z_2$ из $O(\alpha)$ имеют вид: $Z_2 = Z_2(i) = \{Z_1 \backslash i, i\}$ $i = 2, 3, \ldots, n$ (см. (4.4а)). Поэтому все разбиения $Z_2$ из $O(\alpha)$ могут быть получены с помощью перестановок тождественных частиц, например, из разбиения $Z_2(n)$, т.е. $O(\alpha) = O_1(\alpha)$ и $Z_{2,1} = Z_2(n)$ (см. п 1.6). Следовательно, $M(Z_{2,1}) = mm_1(n-1)M^{-1}$, $Q(Z_{2,1}) = e[e_1 + (n-2)e]$. Для гамильтонианов атомов и их (+)ионов выполняется $Q(Z_{2,1}) < 0$. Поэтому в силу Теоремы 1.3

$$N(\mu^\alpha + \lambda; H_0^\alpha) =$$
$$= \left|\lambda\right|^{\frac{\gamma-2}{2}} d_1(\alpha) \left[\frac{mm_1 + (n-2)m^2}{M}\right]^{\frac{1}{2}} \left|ee_1 + (n-2)e^2\right|^{\frac{1}{\gamma}} J_\gamma + \mathcal{R}(\lambda),$$

где $d_1(\alpha)$, $J_\gamma$ и $\mathcal{R}(\lambda)$ — те же, что в (1.11). При $\gamma = 1$ (реальные атомы и (+)ионы) $J_\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, $\mathcal{R}(\lambda) = O(|\ln(\lambda)|)$. Для однократного отрицательного иона $e_1 = -(n-2)e$ и, значит, $Q(Z_{2,1}) = 0$. В силу Теоремы 1.2 (случай 2) при $\gamma > 1$ спектр $\sigma_d(H_0^\alpha)$ будет конечен. Однако при $\gamma = 1$ (реальные (-)ионы) вопрос о конечности дискретного спектра оператора $H_0^\alpha$ остается открытым, т.к. относящееся к данной ситуации утверждение 3 Теоремы 1.2 не может быть нами применено, ибо неизвестно, выполняется ли требование B) п. 1.8[6].

Рассмотрим теперь случай M), дополнительно предполагая, что множество $O(\alpha)$ состоит только из распадений $Z_2 = \{C_1, C_2\}$ на нейтральные атомы. Тогда в силу Теоремы 1.4 и Теоремы 1.2 (утверждение 2 при $\gamma > 1$, утверждение 3 при $\gamma = 1$) спектр $\sigma_d(H_0^\alpha)$ — конечен; здесь при $\gamma = 1$ мы использовали нейтральность обоих кластеров $C_1$, $C_2$, т.е. условие C) п. 1.8.

Доказательство Теоремы 1.1 при некоторых упрощающих предположениях приводится в §2, в общем случае — в §3. Кроме

[6] Аналогичная проблема возникает и в отсутствие магнитных полей, где она тоже не решена, и поэтому структура дискретного спектра гамильтонианов однократных отрицательных ионов в отсутствии магнитных полей также неизвестна

того, в §3 мы доказываем Теорему 3.1 о локализации существенного спектра для двухкластерных составных систем и даем вывод одной из основных оценок, использованных при доказательстве Теоремы 1.1 в §2. Наконец, доказательство Теоремы 1.4 дано в §4.

## §2. Доказательство Теоремы 1.1

2.1. В настоящем параграфе мы устанавливаем Теорему 1.1 при упрощающих предположениях $\mathcal{Y}_1$), $\mathcal{Y}_2$) (п. 2.2); случай, когда они не выполняются, рассмотрен в §3. Кроме того, мы выносим в §3 громоздкий вывод принципиально важного неравенства (2.29), не связанный напрямую с общей схемой проводимых рассуждений.

Доказательство Теоремы 1.1 по своей схеме близко к проведенному в аналогичной теореме из [10], где изучались гамильтонианы систем в однородном магнитном поле. Основные отличия состоят в том, что здесь

а) мы изучаем спектр оператора $H_0^\alpha$, а в [10] изучались только ограничения $H_0^{\alpha,m}$ оператора $H_0^\alpha$ на подпространства функций фиксированных типов $m$ $SO(2)$ симметрии;

б) мы изучаем системы $Z_1$ с зарядом любого знака, включая и нейтральные, в то время как в [10] изучение нейтральных систем невозможно в принципе, ибо для гамильтонианов таких систем даже после ограничения их на подпространства фиксированной $SO(2)$ симметрии не известна локализация существенного спектра — нет ХВЖ теоремы [3];

в) мы рассматриваем в ходе доказательства любые возможные разбиения
$Z_2 = \{C_1, C_2\} \in O(\alpha)$ исходной системы $Z_1$, а в [10] допускались только случаи разбиения $Z_1$ на одноименно заряженные кластеры $C_i$ ($Q[C_1]Q[C_2] > 0$).

2.2. Для упрощения выкладок предполагаем далее, что

$\mathcal{Y}_1$) все распадения $Z_2 \in O(\alpha)$ могут быть получены из какого-то одного, скажем $Z_{2,1}$, с помощью перестановок тождественных частиц, т.е. $O(\alpha) = O_1(\alpha)$ (см. п. 1.6);

$\mathcal{Y}_2$) собственное пространство $W(\alpha; Z_{2,1})$ оператора $H_0(\alpha; Z_{2,1})$ не вырождено по симметрии, то есть $\exists\hat{\alpha}_0 = \alpha_{01}^1$, $\hat{\alpha}_0 \prec \alpha$ так, что $P^{\hat{\alpha}_0}(Z_{21})W(\alpha; Z_{21}) = W(\alpha; Z_{21})$ и $\dim W(\alpha; Z_{21}) = |\hat{\alpha}_0|$. Иначе говоря, мы требуем, чтобы в разложении пространства $W(\alpha; Z_{2k})$ (см. п. 1.7) присутствовало только одно слагаемое: $W_1^1$.

Случай не выполнения одного или обоих условий $\mathcal{Y}_1$), $\mathcal{Y}_2$) будет рассмотрен в §3.

Доказательство Теоремы 1.1 состоит в построении двух подпространств $\mathcal{M}_i(\lambda)$ из $\mathcal{D}(H_0^\alpha)$ таких, что для всех $\lambda$

$$(H_0^\alpha\psi, \psi) \leq (\mu^\alpha + \lambda)||\psi||^2 \quad \psi \in \mathcal{M}_1(\lambda) \tag{2.1}$$

$$(H^\alpha\psi, \psi) > (\mu^\alpha + \lambda)||\psi||^2 \quad \psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda) \tag{2.2}$$

и

$$\dim \mathcal{M}_1(\lambda) \quad \geq \quad -c + \sum_{\omega=\pm} d_{1\omega}(\alpha)N(\lambda; h_{1\omega}^+) \tag{2.3}$$

$$\dim \mathcal{M}_2(\lambda) \quad \leq \quad c + \sum_{\omega=\pm} d_{1\omega}(\alpha)N(\lambda; h_{1\omega}^-) \tag{2.4}$$

Очевидно, что утверждение Теоремы 1.1 будет следовать из (2.1)–(2.4).

Построение пространства $\mathcal{M}_1(\lambda)$ и доказательство неравенств (2.1), (2.3) производится в пп. 2.3–2.7; построение $\mathcal{M}_2(\lambda)$ и доказательство неравенств (2.2), (2.4) дано в пп. 2.8–2.12.

2.3. Пусть $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n) \in R_0$. Введем в $R_0$ новые скалярное произведение и длину вектора

$$(q, \tilde{q})_1 = \sum_{i=1}^{n}[(q_{i\perp}, \tilde{q}_{i\perp})_{R^2} + M^{-1}m_i q_{i3}\tilde{q}_{i3}], \quad |q|_1 = (q, q)_1^{\frac{1}{2}}.$$

Для произвольного $Z_2 = \{C_1, C_2\}$ обозначим через $P_c(Z_2)$ и $P_0(Z_2)$ проекторы (в смысле $(\cdot,\cdot)_1$) соответственно на $R_c(Z_2)$ и $R_0(Z_2)$ и положим $q(Z_2) := (q_1(Z_2), \ldots, q_n(Z_2)) = P_0(Z_2)q$;
$q^c(Z_2) := (q_1^c(Z_2), \ldots, q_n^c(Z_2)) = P_c(Z_2)q$, $\zeta(Z_2) = \zeta[C_1] - \zeta[C_2]$ (см. п. 1.4). Очевидно, $q_i(Z_2) = (q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}(Z_2))$, $q_i^c(Z_2) = (0, 0, q_{i3}^c(Z_2))$, где $q_{i3}(Z_2) = q_{i3} - \zeta[C_p]$, $q_{i3}^c(Z_2) = \zeta[C_p]$ при $i \in C_p$.
Далее, так как $R_c(Z_2) \subset R_0$, то $M[C_1]\zeta[C_1] + M[C_2]\zeta[C_2] = 0$ и, значит, пространство $R_c(Z_2)$ — одномерно. Выбрав в нем единичный (в норме $|\cdot|_1$) вектор $e_c(Z_2)$, мы получим, что

$$q^c(Z_2) = \sqrt{M(Z_2)}\zeta(Z_2)e_c(Z_2), \quad |q^c(Z_2)|_1 = \sqrt{M(Z_2)}|\zeta(Z_2)|.$$

Пусть $q = (q_1, \ldots, q_n)$ и $q_j = (q_{j1}, q_{j2}, q_{j3})$. Определим оператор $P_z$ равенствами $P_z q_j = (0, 0, q_{j3})$, $P_z q = (P_z q_1, \ldots, P_z q_n)$ и положим $q_z = P_z q$, $q_z(Z_2) = P_z q(Z_2) = P_0(Z_2)q_z$.

Пусть $1 \ll a_1 < b_1$, $0 < a_s < b_s \ll 1$, $s = 2, 3, \ldots, n$, — произвольные числа, и дважды кусочно-непрерывно дифференцируемые функции $u_s(t)$, $v_s(t)$ $t \in R^1$, $s \geq 1$ таковы, что $v_s(t) = \sqrt{1 - u_s^2(t)}$, $u_s(t) \equiv 1$ при $t \leq a_s$, $u_s(t) \equiv 0$ при $t \geq b_s$, $u_s(t_1) > u_s(t_2)$ при $a_s \leq t_1 < t_2 \leq b_s$, $\lim\limits_{t \to a_s} u_s^2(t)(1 - u_s'^2(t))^{-1} = 0$.
Положим $\tau_{z_2} = |q_z(Z_2)|_1 |q^c(Z_2)|_1^{-1}$, $u_{z_2} = u_2(\tau_{z_2})$, $v_{z_2} = v_2(\tau_{z_2})$.

2.4. Определим пространство $\mathcal{M}_1(\lambda)$ соотношением

$$\mathcal{M}_1(\lambda) = P^\alpha \mathcal{L}\Big\{T_g[\varphi_j(q(Z_2))f_p(\zeta(Z_2))u_{z_2}] \quad g \in S, \quad j = 1, \ldots, j_1, \quad p = 1, \ldots, p_0\Big\}, \tag{2.5}$$

где $\mathcal{L}\{\ldots\}$ означает линейную оболочку, $Z_2$ — произвольное распадение из $O(\alpha)$, функции $\varphi_j$ $j = 1, 2, \ldots, j_1$ образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве $W(\alpha; Z_2)$ оператора $H_0(\alpha; Z_2)$, отвечающем числу $\mu^\alpha$, и одновременно — в силу условия $\mathcal{Y}_2$) — канонический базис представления типа $\hat{\alpha}_0$ группы $\hat{S}(Z_2)$; $f_p(\zeta(Z_2))$ $p = 1, 2, \ldots, p_0$ — ортонормированные собственные функции оператора

$$h_{a_0}^+(Z_2) = -M(Z_2)^{-1}\frac{d^2}{d\zeta(Z_2)} + V_1^+(\zeta(Z_2)) \tag{2.6}$$

в области

$$|\zeta(Z_2)| \geq a_0$$

с нулевым граничным условием при $|\zeta(Z_2)| = a_0$, отвечающие его собственным значениям $\lambda_p$, не превосходящим $\lambda < 0$; здесь $a_0 \gg 1$ — некоторая константа, потенциал $V_1^+(\zeta(Z_2))$ задан формулой (1.8) с $\theta_1 = \min(4, \gamma + 2)$, и при $C_1 \not\sim C_2$ или при $C_1 \sim C_2$, $\mathfrak{M}^\alpha_{\hat{\alpha}+} \geq 1$, $\mathfrak{M}^\alpha_{\hat{\alpha}-} \geq 1$ мы используем в определении пространства $\mathcal{M}_1(\lambda)$ собственные функции $f_p(\zeta(Z_2))$ любой четности, а при $C_1 \sim C_2$ и $\mathfrak{M}^\alpha_{\hat{\alpha}+} = 0$, $\mathfrak{M}^\alpha_{\hat{\alpha}-} \geq 1$ $\{C_1 \sim C_2,\ \mathfrak{M}^\alpha_{\hat{\alpha}+} \geq 1,\ \mathfrak{M}^\alpha_{\hat{\alpha}-} = 0\}$ — используются только нечетные {четные} функции $f_p(\zeta(Z_2))$; здесь $\hat{\alpha}^\pm = \hat{\alpha}^\pm_{11}$ определяется соотношением (см. пп. 1.7, 2.2)

$$\mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}^\pm} = \mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_0} \oplus \mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_c^\pm}.$$

Аналогично [11] (Леммы 4.2, 4.3) получаем, что

$$\dim \mathcal{M}_1(\lambda) \geq \sum_{\omega=\pm} d_{1\omega}(\alpha) N(\lambda; h^+_{1\omega}(Z_2)) - const.$$

Поэтому нам остается только проверить неравенство (2.1).

2.5. Пусть $\psi \in \mathcal{M}_1(\lambda)$. Так как линейная оболочка функций $T_g(\varphi_j f_p u_{Z_2})$ инвариантна для оператора $P^\alpha$, то мы можем записать функцию $\psi$ в виде $\psi = \sum\limits_{Z_2 \in O(\alpha)} \psi_{Z_2}$, где

$$\begin{aligned} \psi_{Z_2} = F_{Z_2} u_{Z_2}, \quad F_{Z_2} &= \textstyle\sum_{j=1}^{j_1} \varphi_j(q(Z_2)) \Phi_j(\zeta(Z_2)), \\ \Phi_j(\zeta(Z_2)) &= \textstyle\sum_{p=1}^{p_0} c_{jp} f_p(\zeta(Z_2)), \end{aligned} \tag{2.7}$$

$c_{jp}$ — некоторые константы, зависящие от $\alpha$ и $\hat{\alpha}^\pm$.

При малых $a_2$ $\operatorname{supp} \psi_{Z_2} \cap \operatorname{supp} \psi_{Z_2'} = \emptyset$ при $Z_2 \neq Z_2'$ и мы имеем

$$(H_0\psi, \psi) = \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} (H_0 \psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}), \quad ||\psi||^2 = \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} ||\psi_{Z_2}||^2. \tag{2.8}$$

Очевидно, для любого $Z_2$

$$H_0 = H_0(Z_2) - M(Z_2)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\zeta(Z_2)^2} + I_{Z_2}, \tag{2.9}$$

где $I_{Z_2} = \sum\limits_{i\in C_1, j\in C_2} V_{ij}(|q_i - q_j|)$. Оценим величину $(H_0(Z_2)\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2})$. Пусть функции $u_2(t)$, $v_2(t)$ (см. п. 2.3) определены Леммой 3.2 [12] с $R_1 = P_Z R_0$, $R_2 = P_Z R_0(Z_2)$, $R_3 = R_c(Z_2)$ и с оператором $\sum\limits_{j=1}^{n} \nabla_{j3}^0$ вместо $\nabla_1$. Тогда вследствие оценки (3.4) [12]

$$\begin{aligned}(H_0(Z_2)\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}) &= (H_0(Z_2)F_{Z_2}u_{Z_2}, F_{Z_2}u_{Z_2}) \le \\ &\le (H_0(Z_2)F_{Z_2}, F_{Z_2}) - (H_0(Z_2)F_{Z_2}v_{Z_2}, F_{Z_2}v_{Z_2}) + \\ &\quad + c\|F_{Z_2}|q_Z|_1^{-1}\chi(Z_2)\|^2,\end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\chi(Z_2)$ — характеристическая функция в $R_0$ области сглаживания: $a_2 \le \tau_{Z_2} \le b_2$[7]; здесь и далее через $c, c_1, c_2, \ldots$ обозначаются константы, величина которых для нас не существенна. Так как оператор $H_0(Z_2)$ ограничен снизу, то

$$-(H_0(Z_2)F_{Z_2}v_{Z_2}, F_{Z_2}v_{Z_2}) \le c\|F_{Z_2}v_{Z_2}\|^2. \tag{2.11}$$

В силу Леммы 3.1 [10] $\varphi_j|q(Z_2)|^2 \in \mathcal{L}_2(R_0(Z_2))$. Поэтому и т.к. при $q_Z \in \operatorname{supp} v_{Z_2}$ имеем $|q_Z(Z_2)|_1 \ge a_2|q^c(Z_2)|_1 = a_2\sqrt{M(Z_2)}|\zeta|$, то

$$\|\sum_{j=1}^{j_1}\varphi_j\Phi_j v_{Z_2}\|^2 \le c_1\sum_{j=1}^{j_1}\|\Phi_j|\zeta|^{-2}\|^2 \tag{2.12}$$

и

---

[7] В неравенствах (3.4), (3.5) [12] характеристическая функция области сглаживания отсутствует, однако мы можем ввести ее в правые части этих неравенств, ибо их левые части вне области сглаживания равны нулю Далее при применении Леммы 3.2 [12] мы не будем оговаривать этот факт особо

$$||F_{z_2}|q_z|_1^{-1}\chi(Z_2)||^2 \le c_1 \sum_{j=1}^{j_1} ||\Phi_j|\zeta|^{-2}||^2; \tag{2.13}$$

здесь и далее в пп. 2.6, 2.7 $\zeta = \zeta(Z_2)$.

Таким образом из (2.10)–(2.13) получаем, что

$$(H_0(Z_2)\psi_{z_2}, \psi_{z_2}) \le \mu^\alpha ||\psi_{z_2}||^2 + c_2 \sum_{j=1}^{j_1} ||\Phi_j|\zeta|^{-2}||^2. \tag{2.14}$$

Совершенно так же, как была оценена квадратичная форма $(H_0(Z_2)\psi_{z_2}, \psi_{z_2})$, мы можем оценить квадратичную форму $-\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\psi_{z_2}, \psi_{z_2}\right)$. Сделав это, получим

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\psi_{z_2}, \psi_{z_2}\right) \le \sum_{j=1}^{j_1}\left[-(\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\Phi_j, \Phi_j) + c||\Phi_j|\zeta|^{-2}||^2\right]. \tag{2.15}$$

2.6 Переходим к наиболее трудной части — к оценкам квадратичной формы $(I_{z_2}\psi_{z_2}, \psi_{z_2})$ членов межкластерного взаимодействия. Пусть $A_{z_2}$ — характеристическая функция области $\Omega_{z_2} = \{q|q \in R_0, |P_0(Z_2)q|_1 \le a_2|P_c(Z_2)q_z|_1\}$. Очевидно:

$$(I_{z_2}\psi_{z_2}, \psi_{z_2}) = (A_{z_2}I_{z_2}\psi_{z_2}, \psi_{z_2}) + ((1 - A_{z_2})I_{z_2}\psi_{z_2}, \psi_{z_2}) \tag{2.16}$$

Оценим слагаемые в правой части (2.16), начиная со второго. При $q \in \operatorname{supp} u_{z_2}$ и $s \in C_j$ $(j = 1, 2)$

$$|q_{s3}(Z_2)|^2 = |q_{s3} - \zeta[C_j]|^2 \le |q_z(Z_2)|_1^2 m_s^{-1} \le b_2^2 m_s^{-1}|q^c(Z_2)|_1^2 =$$
$$= b_2^2 m_s^{-1} M(Z_2)|\zeta|^2$$

и, значит, при $s \in C_1$, $t \in C_2$, $q \in \operatorname{supp} F_{z_2}u_{z_2}$ и малом $b_2$

$$|q_s - q_t| \ge |q_{s3} - q_{t3}| = |q_{s3}(Z_2) - q_{t3}(Z_2) + \zeta[C_1] - \zeta[C_2]| \ge 0,5|\zeta|.$$

Следовательно, при $q \in \operatorname{supp} F_{Z_2} u_{Z_2}$

$$|I_{Z_2}| \le c|\zeta|^{-\gamma}.$$

Учитывая это и используя включение $\varphi_i|q(Z_2)|^2 \in \mathcal{L}_2(R_0(Z_2))$, имеем

$$\Big((1 - A_{Z_2})(|I_{Z_2}| + |\zeta|^{-\gamma})F_{Z_2}u_{Z_2}, F_{Z_2}u_{Z_2}\Big) \le c\sum_{j=1}^{j_1} ||\Phi_j|\zeta|^{-2}||^2. \quad (2.17)$$

Далее, величину $|q_s - q_t|^{-\gamma}$ при $s \in C_1$, $t \in C_2$ можно записать в виде

$$|q_s - q_t|^{-\gamma} = |\zeta|^{-\gamma}(1 + \delta_{st})^{-\frac{\gamma}{2}},$$

где $\delta_{st} = 2q_{st,3}\zeta^{-1} + (|q_{st,\perp}|^2 + q_{st,3}^2)\zeta^{-2}$, $q_{st,\perp} = q_{s\perp} - q_{t\perp}$, $q_{st,3} = q_{s3}(Z_2) - q_{t3}(Z_2)$. При $q \in \Omega_{Z_2}$, $s \in C_1$, $t \in C_2$ и малом $a_2$ величина $\delta_{st}$ мала. Поэтому, раскладывая $(1 + \delta_{st})^{-\frac{\gamma}{2}}$ по степеням $\delta_{st}$ в окрестности $\delta_{st} = 0$, мы получим, что:

$$\Big||q_{st,3}|^{-\gamma} - |\zeta|^{-\gamma} - \gamma|\zeta|^{-\gamma-1}q_{st,3}\operatorname{sgn}\zeta\Big| \le c|\zeta|^{-\gamma-2}(|q_{s\perp}|^2 + |q_{t\perp}|^2) \quad (2.18)$$

при $q \in \Omega_{Z_2}$. Кроме того, поскольку $A_{Z_2}u_{Z_2} = A_{Z_2}$, то отсюда $A_{Z_2}I_{Z_2}\psi_{Z_2} = A_{Z_2}I_{Z_2}F_{Z_2}$. Учитывая это, неравенства (2.17), (2.18) и включение $\varphi_j|q(Z_2)| \in \mathcal{L}_2(R_0(Z_2))$, имеем

$$\begin{aligned}\Big(A_{Z_2}I_{Z_2}\psi_{Z_2}, \psi_{Z_2}\Big) \le Q(Z_2)(|\zeta|^{-\gamma}F_{Z_2}, F_{Z_2}) +\\ +c\textstyle\sum_{j=1}^{j_1} ||\Phi_j|\zeta|^{-(1+\frac{\gamma}{2})}||^2 + (G(q)F_{Z_2}, F_{Z_2}),\end{aligned} \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned}G(q) = A_{Z_2}|\zeta|^{-\gamma-1}\gamma\operatorname{sgn}\zeta\Big(Q[C_2]\textstyle\sum_{s\in C_1} e_s q_{s3}(Z_2) -\\ -Q[C_1]\textstyle\sum_{t\in C_2} e_t q_{t3}(Z_2)\Big).\end{aligned}$$

2.7. При упрощающем предположении $У_2$) все функции $\varphi_j(q(Z_2))$ $j = 1, 2, \ldots, j_1$ имеют одну и ту же четность относительно инверсии $J_1 : q_Z(Z_2) \to -q_Z(Z_2)$, и, значит, при любом фиксированном

$\zeta$ функция $|F_{z_2}|$ — четная относительно $J_1$. Поэтому

$$\int q_{j3}(Z_2)|F_{z_2}|^2 dq(Z_2) = 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Значит, выражение $(G(q)F_{z_2}, F_{z_2})$ равно нулю и в силу (2.19)

$$\begin{aligned}\left(A_{z_2} I_{z_2} \psi_{z_2}, \psi_{z_2}\right) \leq Q(Z_2) \sum_{j=1}^{j_1} \| \Phi_j |\zeta|^{-\frac{\gamma}{2}} \|^2 + \\ + c \sum_{j=1}^{j_1} \| \Phi_j |\zeta|^{-(1+\frac{\gamma}{2})} \|^2.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Из (2.14)–(2.17), (2.20) вытекает, что

$$\left(H_0 \psi_{z_2}, \psi_{z_2}\right) \leq \mu^\alpha \|\psi_{z_2}\|^2 + \sum_{j=1}^{j_1} (h^+_{a_0}(Z_2)\Phi_j, \Phi_j), \tag{2.21}$$

где оператор $h^+_{a_0}(Z_2)$ определен равенством (2.6) с произвольно фиксированным $a_0$. Поскольку функции $\Phi_j$ являются линейными комбинациями собственных функций $f_p(\zeta)$ оператора $h^+_{a_0}(Z_2)$, отвечающих его собственным значениям, не превосходящим $\lambda$, то вследствие (2.21)

$$\left(H_0 \psi_{z_2}, \psi_{z_2}\right) \leq \mu^\alpha \|\psi_{z_2}\|^2 + \lambda \sum_{j=1}^{j_1} \|\Phi_j\|^2 \leq (\mu^\alpha + \lambda) \|\psi_{z_2}\|^2.$$

Отсюда в силу (2.8) следует неравенство (2.1).

2.8. Переходим к построению пространства $\mathcal{M}_2(\lambda)$ со свойствами (2.2), (2.4). Согласно Лемме 3.2 II [12] с $R_1 = P_z R_0$ по произвольному $\varepsilon > 0$ и $a_1 \gg 1$ находим $b_1 > a_1$ и функции $u_1(t)$, $v_1(t)$ с теми же свойствами, что и в п. 2.3, так, что (ср. (3.5) [12])

$$\sum_{j=1}^{n} (|\nabla^0_{j3} u_1(|q_z|_1)|^2 + |\nabla^0_{j3} v_1(|q_z|_1)|^2) \leq \varepsilon |q_z|_1^{-2} \chi(Z_1), \tag{2.22}$$

где $\chi(Z_1)$ — характеристическая функция области "сглаживания": $a_1 \le |q_z|_1 \le b_1$ (см. сноску к п. 2.5). В силу (2.22)

$$(H_0\psi, \psi) \ge L_1[\psi u_1(|q_z|_1)] + L_2[\psi v_1(|q_z|_1)], \tag{2.23}$$

где

$$\begin{aligned} L_1[\varphi] &= (H_0\varphi, \varphi) - \varepsilon||\varphi||^2, \\ L_2[\varphi] &= (H_0\varphi, \varphi) - \varepsilon||\varphi|q_z|_1^{-1}\chi(Z_1)||^2. \end{aligned}$$

Оценим снизу величины $L_i[\varphi]$, начиная с $L_1[\varphi]$. Очевидно, что

$$L_1[\varphi] = (\hat{H}\varphi, \varphi) + (H'\varphi, \varphi),$$

где

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(T_\perp + T_{03}) + V - \varepsilon I(R_0), \quad H' = \frac{1}{2}(T_\perp + T_{03}),$$

$I(R_0)$ — единичный оператор в $\mathcal{L}_2(R_0)$. Оператор $\hat{H}$ ограничен снизу: $(\hat{H}\varphi, \varphi) \ge c_1||\varphi||^2$. Оператор $H'$ в области $|q_z|_1 \le b_1$ с граничным условием Дирихле при $|q_z|_1 = b_1$ имеет чисто дискретный спектр, поскольку является суммой двух коммутирующих операторов с чисто дискретным спектром. Действительно, $\sigma(T_{03}) = \sigma_d(T_{03})$ в $P_z R_0$, т.к. переменные $q_z$ меняются в ограниченной области $|q_z|_1 \le b_1$, и $\sigma(T_\perp) = \sigma_d(T_\perp)$ в $R^{2n}$, поскольку магнитное поле стремится к бесконечности на бесконечности в плоскости $(x, y)$ [13]. Поэтому можно указать такое конечномерное подпространство $\mathcal{M}_2^0$, что при $\psi u_1 \perp \mathcal{M}_2^0$ выполняется неравенство $(H'\psi u_1, \psi u_1) \ge (\mu^\alpha - c_1)||\psi u_1||^2$ и, значит,

$$L_1[\psi u_1] \ge \mu^\alpha ||\psi u_1||^2. \tag{2.24}$$

Определим далее пространство $\mathcal{M}_2^1(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^1(\lambda) = P^\alpha \mathcal{L}\Big\{ T_g[\varphi_j(q(Z_2)) f_p^-(\zeta) u_{Z_2}] \quad & j = 1, 2, \ldots, j_1, \\ g \in S, \quad & p = 1, 2, \ldots, p_0^- \Big\}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}\{\ldots\}$ означает линейную оболочку, функции $\varphi_j(q(Z_2))$ — те же самые, что и в (2.5), $f_p^-(\zeta)$ — ортонормированные собственные функции оператора

$$h_{a_0}^-(Z_2) = -M(Z_2)^{-1}\frac{d^2}{d\zeta^2} + V_1^-(\zeta) \tag{2.25}$$

в области $|\zeta| \geq a_0$ с нулевым граничным условием при $|\zeta| = a_0$, отвечающие его собственным значениям, не превосходящим $\lambda < 0$, и с теми же ограничениями на четность, что и у функций $f_p(\zeta)$ в (2.5); функции $u_{Z_2} = u_2(\tau_{Z_2})$ — те же, что в п. 2.3, $a_0 > 0$ — некоторая константа и потенциал $V_1^-$ определен равенством (1.8) с $\theta_1 = \min(4, \gamma + 2)$.

Мы покажем, что при $\psi v_1 \perp \mathcal{M}_2^1(\lambda)$

$$L_2[\psi v_1] \geq (\mu^\alpha + \lambda)||\psi v_1||^2. \tag{2.26}$$

Тогда из соотношений (2.24), (2.26) будет следовать, что для всех функций $\psi$, ортогональных к пространству

$$\mathcal{M}_2(\lambda) := v_1\mathcal{M}_2^1(\lambda) + u_1\mathcal{M}_2^0$$

выполняется неравенство

$$(H_0\psi, \psi) \geq (\mu^\alpha + \lambda)||\psi||^2.$$

Т.к. в силу [11]

$$\dim \mathcal{M}_2(\lambda) \leq \sum_{\omega=\pm} d_{1\omega}(\alpha)N(\lambda; h_{1\omega}^-(Z_2)) + c,$$

то все доказано, если верно соотношение (2.26).

2.9. Доказательство (2.26) проводится в два этапа. На первом — мы получаем такой удобный для дальнейшей работы функционал $L_3[\varphi]$, что

$$L_2[\psi v_1] \geq L_3[\psi v_1]. \tag{2.27}$$

На втором этапе показывается, что при $\psi v_1 \perp \mathcal{M}_2^1(\lambda)$

$$L_3[\psi v_1] \geq (\mu + \lambda)||\psi v_1||^2. \tag{2.28}$$

Построение функционала $L_3[\varphi]$ и доказательство оценки (2.27) проводится одновременно. Для этого мы разбиваем конфигурационное пространство $R_0$ на области, отвечающие *всевозможным* распадениям $Z_s = \{C_1, \ldots, C_s\}$ системы $Z_1$ на $s \geq 2$ не пересекающихся и не взаимодействующих между собой кластеров $C_1, \ldots, C_s$ и затем оцениваем снизу функционал $L_2[\varphi]$ по областям, соответствующим разбиениям $Z_2 \notin O(\alpha)$ и $Z_s$ при $s \geq 3$. Необходимые для этого выкладки достаточно громоздки и будут проведены в §3, а здесь мы только сформулируем результат, отсылая за доказательством к пп. 3.1–3.7.

Пусть $0 < a_2 < b_2$ — достаточно малые числа. Тогда по произвольному $\varepsilon > 0$ можно указать столь большое $a_1 > 0$ в определении функций $u_1(t)$, $v_1(t)$ (п. 2.8) и такие функции $u_2(t)$, $v_2(t)$, $u_{Z_2} = u_2(\tau_{Z_2})$, с теми же свойствами, что в п. 2.3, что

$$\begin{aligned} L_2[\psi_1] \geq L_3[\psi_1] := \mu^\alpha \left( ||\psi_1||^2 - \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} ||\psi_{1,Z_2}||^2 \right) + \\ + \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \Phi_1(Z_2), \end{aligned} \tag{2.29}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(Z_2) = (H_0 \psi_{1,Z_2}, \psi_{1,Z_2}) - \varepsilon ||\psi_{1,Z_2} |q_Z|_1^{-1} \chi(Z_1)||^2 - \\ -\varepsilon ||\psi_{1,Z_2} |q_Z|_1^{-1} \chi(Z_2)||^2, \end{aligned}$$

$\chi(Z_j)$ — характеристические функции областей $\{q | q \in R_0,\ a_j \leq \tau_{Z_j} \leq b_j\}$ в $R_0$, где происходит "сглаживание", $\psi_1 = \psi v_1$, $\psi_{1,Z_2} = \psi_1 u_{Z_2}$, $\tau_{Z_1} = |q_Z|_1$, $\tau_{Z_2} = |P_0(Z_2) q_Z|_1 \cdot |P_c(Z_2) q_Z|_1^{-1}$.

2.10. Далее мы будем оценивать снизу слагаемые, которые входят в $\Phi_1(Z_2)$. С этой целью представим функцию $\psi_{Z_2} = \psi_{1,Z_2}$ в виде

$$\psi_{Z_2} = F(Z_2) + g(q), \tag{2.30}$$

где

$$F(Z_2) = \sum_{j=1}^{j_1} \varphi_j(q(Z_2))\varkappa_j(\zeta), \quad \varkappa_j(\zeta) = (\psi_{Z_2}, \varphi_j)_{\mathcal{L}_2(R_0(Z_2))},$$

$(g, \varphi_j)_{\mathcal{L}_2(R_0(Z_2))} = 0$ при $\forall\zeta$, $\zeta = \zeta(Z_2)$. Т.к. $\psi_{Z_2}(q) \equiv 0$ при $|q_Z|_1 \le a_1$ и $|P_0(Z_2)q_Z|_1 \cdot |P_c(Z_2)q_Z|_1^{-1} \ge b_2$, а $|q_Z|_1^2 = |P_0(Z_2)q_Z|_1^2 + |P_c(Z_2)q_Z|_1^2$ и $|P_c(Z_2)q_Z|_1^2 = M(Z_2)|\zeta|^2$, то мы получаем, что

$$\psi_{Z_2}(q) \equiv 0 \text{ при } |\zeta| \le a_0,$$

где $a_0 = M(Z_2)^{-1}(1 + b_2^2)^{-1}a_1$. Т.к. функции $\varphi_j(q(Z_2))$ не зависят от $\zeta$, то при $|\zeta| \le a_0$ выполняется $\varkappa_j(\zeta) \equiv 0 \quad j = 1, \dots, j_1$ и $g(q) \equiv 0$. Поэтому во всех интегралах, содержащих интегрирование функций $\psi_{Z_2}$, $\varkappa_j(\zeta)$, $g(q)$ по $\zeta$, мы будем фактически интегрировать только по области $|\zeta| \ge a_0$, не оговаривая это специально. В частности, имеем

$$||\psi_{Z_2}|q_Z|_1^{-1}\chi(Z_1)\chi_{Z_2}||^2 \le \varepsilon||g||^2 + c\sum_{j=1}^{j_1} ||\varphi_j\varkappa_j\chi(Z_1)\chi_{Z_2}|q_Z|_1^{-1}||^2$$

$$||\psi_{Z_2}|q_Z|_1^{-1}\chi(Z_2)\chi_1||^2 \le \varepsilon||g||^2 + c\sum_{j=1}^{j_1} ||\varphi_j\varkappa_j\chi(Z_2)\chi_1|q_Z|_1^{-1}||^2, \tag{2.31}$$

где $\chi_1$ и $\chi_{Z_2}$ — характеристические функции областей $\operatorname{supp} v_1$ и $\operatorname{supp} u_{Z_2}$ в $R_0$. Т.к. $|q_Z|_1 \ge |\zeta|\sqrt{M(Z_2)}$, $\ b_1^2 M(Z_2)^{-1}|\zeta|^{-2} \ge \chi(Z_1)$, $|q(Z_2)|_1 \ge a_2 M(Z_2)^{-\frac{1}{2}}\chi(Z_2)|\zeta|$, $|\zeta|^2 \ge \chi(Z_1)\chi_{Z_2}a_0^2$, $\ |\zeta|^2 \ge \chi_1\chi_{Z_2}a_0^2$, где $a_0 = a_1 M(Z_2)^{-1}(1 + b_2^2)^{-1}$, и т.к. $|(q(Z_2)|^2\varphi_i \in \mathcal{L}_2(R_0(Z_2))$, то мы получаем из (2.31) следующие неравенства

$$||\psi_{Z_2}|q_Z|_1^{-1}\chi(Z_1)\chi_{Z_2}||^2 \le \varepsilon||g||^2 + c\sum_{j=1}^{j_1} ||\varkappa_j|\zeta|^{-2}||^2_{|\zeta|\ge a_0},$$

$$||\psi_{Z_2}|q_Z|_1^{-1}\chi(Z_2)\chi_1||^2 \le \varepsilon||g||^2 + c\sum_{j=1}^{j_1} ||\varkappa_j|\zeta|^{-2}||^2_{|\zeta|\ge a_0}. \tag{2.32}$$

Далее, очевидно,

$$-\left(\frac{\partial^2\psi_{Z_2}}{\partial\zeta^2},\psi_{Z_2}\right)\geq-\sum_{j=1}^{j_1}\left(\frac{\partial^2\varkappa_j}{\partial\zeta^2},\varkappa_j\right) \tag{2.33}$$

и

$$\left(H_0(\alpha;Z_2)\psi_{Z_2},\psi_{Z_2}\right)\geq\mu^\alpha||\psi_{Z_2}||^2+\eta||g||^2, \tag{2.34}$$

где $\eta>0$ — расстояние от $\mu^\alpha$ до ближайшей точки спектра оператора $H_0(\alpha;Z_2)$.

В силу (2.9) для оценки снизу формы $(H_0\psi_{Z_2},\psi_{Z_2})$ нам остается оценить только величину $(I_{Z_2}\psi_{Z_2},\psi_{Z_2})$. Именно при проведении этой оценки возникают основные трудности, которые связаны с наличием в выражении $(I_{Z_2}\psi_{Z_2}\psi_{Z_2})$ перекрестных членов вида $(\varphi_j\varkappa_j,g|q_s-q_t|^{-\gamma})$, требующих для своей оценки специального подхода.

2.11. Пусть $\chi=\chi_{Z_2}$, $A=A_{Z_2}$, $\bar{A}=1-A$, $F=F(Z_2)$ и область $\Omega_{Z_2}$ — те же, что в п. 2.6. Очевидно, что

$$\left(\bar{A}I_{Z_2}\psi_{Z_2},\psi_{Z_2}\right)\geq-2(\chi\bar{A}|I_{Z_2}|F,F)-2(\chi\bar{A}|I_{Z_2}|g,g). \tag{2.35}$$

Так же, как в п. 2.6, получаем, что $\chi|I_{Z_2}|\leq c|\zeta|^{-\gamma}$ и, значит, при больших $a_1$

$$2\left|(\chi\bar{A}I_{Z_2}g,g)\right|\leq\varepsilon||g||^2. \tag{2.36}$$

Поскольку $\varphi_j|q(Z_2)|^2\in\mathcal{L}_2(R_0(Z_2))$ и $\bar{A}|q(Z_2)|_1|q_c(Z_2)|_1^{-1}a_2^{-1}\geq\bar{A}$, то

$$2\left|(\chi\bar{A}I_{Z_2}F,F)\right|\leq c\sum_{j=1}^{j_1}||\varkappa_j|\zeta|^{-1-\frac{\gamma}{2}}||^2. \tag{2.37}$$

Поэтому

$$\left(\bar{A}I_{Z_2}\psi_{Z_2},\psi_{Z_2}\right)\geq-\varepsilon||g||^2-c\sum_{j=1}^{j_1}||\varkappa_j|\zeta|^{-1-\frac{\gamma}{2}}||^2_{|\zeta|\geq a_0}. \tag{2.38}$$

Оценим теперь выражение $\left(AI_{z_2}\psi_{z_2},\psi_{z_2}\right)$. В силу (2.30)

$$\left(AI_{z_2}\psi_{z_2},\psi_{z_2}\right) = \left(AI_{z_2}g,g\right) + \left(AI_{z_2}F,F\right) + 2Re\left(AI_{z_2}F,g\right). \tag{2.39}$$

Аналогично (2.36)

$$|\left(AI_{z_2}g,g\right)| \le \varepsilon||g||^2.$$

Используя оценку (2.18) и предположение $\mathcal{Y}_2$), имеем (ср. с (2.20))

$$\left(AI_{z_2}F,F\right) - Q(Z_2)\sum_{j=1}^{j_1}||\varkappa_j|\zeta|^{-\frac{\gamma}{2}}||^2 \ge -c\sum_{j=1}^{j_1}||\varkappa_j|\zeta|^{-(1+\frac{\gamma}{2})}||^2. \tag{2.40}$$

С помощью (2.18) и неравенства Буняковского мы получим также, что

$$|(A(I_{z_2} - Q(Z_2)|\zeta|^{-\gamma})\sum_{j=1}^{j_1}\varphi_j\varkappa_j, g)| \le \varepsilon||g||^2 + c\sum_{j=1}^{j_1}||\varkappa_j|\zeta|^{-(1+\frac{\gamma}{2})}||^2.$$

Далее, применяя опять неравенство Буняковского и оценивая аналогично (2.37), имеем

$$|\left(\bar{A}Q(Z_2)|\zeta|^{-\gamma}F,g\right)| \le \varepsilon||g||^2 + c\sum_{j=1}^{j_1}||\varkappa_j|\zeta|^{-(1+\frac{\gamma}{2})}||^2.$$

Но по построению

$$\left(|\zeta|^{-\gamma}F,g\right) = 0$$

и поэтому из проведенных оценок следует неравенство

$$|\left(AI_{z_2}F,g\right)| \le 2\varepsilon||g||^2 + c\sum_{j=1}^{j_1}||\varkappa_j|\zeta|^{-(1+\frac{\gamma}{2})}||^2. \tag{2.41}$$

Из соотношений (2.38)–(2.41) вытекает, что

$$(I_{z_2}\psi_{z_2},\psi_{z_2}) \ge -4\varepsilon||g||^2 + \sum_{j=1}^{j_1}(Q(Z_2)||\varkappa_j|\zeta|^{-\frac{\gamma}{2}}||^2 - c||\varkappa_j|\zeta|^{-(1+\frac{\gamma}{2})}||^2). \tag{2.42}$$

В силу (2.29), (2.32)–(2.34), (2.9), (2.42) при $\psi u_1 \perp \mathcal{M}_1^0$ и $6\varepsilon < \eta$

$$(H_0\psi, \psi) \geq \mu^\alpha ||\psi||^2 + \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \sum_{j=1}^{j_1} (h_{a_0}^-(Z_2)\varkappa_j, \varkappa_j). \tag{2.43}$$

2.12. Поскольку $P^\alpha \psi v_1 = v_1 P^\alpha \psi = v_1 \psi$ и $\psi v_1 \perp \mathcal{M}_2^1(\lambda)$, то $\psi v_1 u_{Z_2} \perp \varphi_j f_p^-$ $j = 1, \ldots, j_1$, $p = 1, 2, \ldots, p_0^-$. Это означает, что в разложении (2.30) функции $\psi_{Z_2} = \psi v_1 u_{Z_2}$ по функциям $\varphi_j(q(Z_2))$ коэффициенты при $\varphi_j$ — функции $\varkappa_j(\zeta)$ — должны быть ортогональны к собственным функциям $f_p^-$ оператора $h_{a_0}^-(Z_2)$, отвечающим его собственным значениям, не превосходящем $\lambda$. Поэтому

$$(h_{a_0}^-(Z_2)\varkappa_j, \varkappa_j) \geq \lambda ||\varkappa_j||^2.$$

Так как $\lambda < 0$ и

$$||\psi_{Z_2}||^2 = \sum_{j=1}^{j_1} ||\varkappa_j||^2 + ||g||^2 \geq \sum_{j=1}^{j_1} ||\varkappa_j||^2, \quad ||\psi||^2 \geq \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} ||\psi_{Z_2}||^2,$$

то

$$\sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \sum_{j=1}^{j_1} \left(h_{a_0}^-(Z_2)\varkappa_j, \varkappa_j\right) \geq \lambda ||\psi||^2.$$

Поэтому из неравенства (2.43) следует, что при $\psi \perp \mathcal{M}_2(\lambda)$

$$(H_0\psi, \psi) \geq (\mu^\alpha + \lambda)||\psi||^2,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, доказательство Теоремы 1.1 в предположениях $\mathcal{Y}_1$), $\mathcal{Y}_2$) и при использовании не доказанной пока оценки (2.29) закончено.

## §3. Доказательство Теоремы 1.1 (окончание)

3.1. В настоящем параграфе, во-первых, устанавливается использовавшаяся в §2 оценка (2.29), и, во-вторых, показывается, как надо изменить доказательство §2, если одно или оба упрощающие условия $У_1$), $У_2$) не выполняются.

Однако сначала мы сформулируем и докажем Теорему 3.1 о локализации существенного спектра оператора энергии двухкластерной системы. Эта теорема имеет и самостоятельный интерес, но здесь для нас будет важно только следствие из нее, которое используется при выводе (2.29). Нам понадобятся следующие определения. Будем писать $Z'_s = \{C'_1, \ldots, C'_s\} < Z^*_p = \{C^*_1, \ldots, C^*_p\}$, если разбиение $Z'_s$ получается из разбиения $Z^*_p$ дроблением одного или нескольких кластеров $C^*_j$. При $Z'_s < Z^*_2$, очевидно, $R_0(Z'_s) \subset R_0(Z^*_2)$; пусть $R^*_c(Z'_s) = R_0(Z^*_2) \ominus R_0(Z'_s)$. Ясно, что $S(Z'_s) \subset S(Z^*_2)$ (см. п.1.5), но включение $\hat{S}(Z'_s) \subset \hat{S}(Z^*_2)$ может не выполняться, если в $Z'_s$ содержится хотя бы два тождественных кластера, возникающих при дроблении различных $C^*_t$, т.е. если $C'_i \sim C'_j$, $C'_i \subseteq C^*_1$, $C'_j \subseteq C^*_2$, то перестановка кластеров $C'_i$ и $C'_j$ между собой принадлежит $\hat{S}(Z'_s)$, но не $\hat{S}(Z^*_2)$. Поэтому для описания перестановочной симметрии системы $Z'_s$, порожденной перестановочной симметрией системы $Z^*_2$, мы вместо группы $\hat{S}(Z'_s)$ будем рассматривать группу

$$\hat{S}^*(Z'_s) = \hat{S}(Z'_s) \cap \hat{S}(Z^*_2). \tag{3.1}$$

Обозначим через $\beta_{0s}$ и $\beta_{cs}$ типы н.п. группы $\hat{S}^*(Z'_s)$ в $\mathcal{L}_2(R_0(Z'_s))$ и в $\mathcal{L}_2(R_c(Z'_s))$. Для произвольного $\beta_{0s}$ и типа $\hat{\alpha}_0(Z^*_2)$ н.п. группы $\hat{S}(Z^*_2)$ будем писать $\beta_{0s} \prec \hat{\alpha}_0(Z^*_2)$, если $\exists \beta_{cs}$ так, что хотя бы одна неприводимая компонента тензорного произведения $\mathcal{D}^{\beta_{0s}}_g \otimes \mathcal{D}^{\beta_{cs}}_g$ н.п. группы $\hat{S}^*(Z_s)$ содержится в н.п. $\mathcal{D}^{\hat{\alpha}_0(Z^*_2)}_g$ группы $\hat{S}(Z^*_2)$ после ограничения его с $\hat{S}(Z^*_2)$ на $\hat{S}^*(Z'_s)$.

Пусть $P^{\beta_{0s}}$ — проектор в $\mathcal{L}_2(R_0(Z'_s))$ на подпространство функций, преобразующихся по представлениям, кратным н.п. типа $\beta_{0s}$,

$$H^{\beta_{0s}}_0(Z'_s) = P^{\beta_{0s}} H_0(Z'_s), \quad H_0(\hat{\alpha}_0(Z^*_2); Z'_s) = \sum_{\beta_{0s}, \beta_{0s} \prec \hat{\alpha}_0(Z^*_2)} H^{\beta_{0s}}_0(Z'_s), \tag{3.2}$$

$$\mu^* = \mu(\hat{\alpha}_0(Z^*_2), Z^*_2) = \min_{Z'_s, Z'_s < Z^*_2} \inf H_0(\hat{\alpha}_0(Z^*_2); Z'_s) \tag{3.3}$$

**Теорема 3.1.** *Для любого разбиения* $Z_2^*$ *и любого типа* $\hat{\alpha}_0^* = \hat{\alpha}(Z_2^*)$ *н.п. группы* $\hat{S}(Z_2^*)$

$$\sigma_{ess}(H_0^{\hat{\alpha}_0^*}(Z_2^*)) = [\mu^*, \infty) \tag{3.4}$$

Сформулированная теорема 3.1 является теоремой о локализации существенного спектра (в обычной ХВЖ-формулировке) оператора энергии двухкластерной системы $Z_2^*$. Она аналогична Теореме 1.5 [5],[8] доказанной для систем в однородном магнитном поле при фиксации псевдомомента и только в предположении, что заряды $Q[C_1]$, $Q[C_2]$ имеют разные знаки и что исходная система — нейтральна $(Q[C_1] + Q[C_2] = 0)$. Доказательство Теоремы 3.1 дается в п. 3.3.

3.2. **Следствие.** *При выполнении требования А) п. 1.6 для любого разбиения* $Z_s'$, $s \geq 3$, *выполняется*

$$\inf H_0(\alpha; Z_s') > \mu^\alpha. \tag{3.5}$$

Докажем (3.5). Пусть $\nu = \inf H_0(\alpha; Z_s')$, $Z_s' < Z_2^*$ и $\hat{\alpha}_0(Z_s')$ — такой тип н.п. группы $\hat{S}(Z_s')$, что $\hat{\alpha}_0(Z_s') \prec \alpha$, $\inf H_0^{\hat{\alpha}_0(Z_s')}(Z_s') = \nu$. Н.п. $\mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_0(Z_s')}$ группы $\hat{S}(Z_s')$ при сужении его на $\hat{S}^*(Z_s')$, вообще говоря, становится приводимым. Пусть $\beta_{0s}$ — тип н.п. группы $\hat{S}^*(Z_s')$, для которого $\mathcal{D}_g^{\beta_{0s}} \subseteq \mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_0(Z_s')}$ $g \in \hat{S}^*(Z_s')$ и $\inf H_0^{\beta_{0s}}(Z_s') = \nu$, и $\hat{\alpha}_0^* = \hat{\alpha}_0(Z_2^*)$ таково, что $\beta_{0s} \prec \hat{\alpha}_0^* \prec \alpha$. Тогда из равенств (3.2), (3.3) следует, что

$$\mu^* \leq \nu. \tag{3.6}$$

Пусть $H^* = H_0^{\hat{\alpha}_0^*}(Z_2^*)$. Вследствие (3.4) всегда $\inf H^* \leq \mu^*$, поэтому, если $\inf H^* > \mu^\alpha$, то в силу (3.6) $\mu^\alpha < \nu$. Если $\inf H^* = \mu^\alpha$, то в силу условия А) п. 1.6 $\inf H^* \in \sigma_d(H^*)$ и в силу (3.4), (3.6) $\mu^\alpha = \inf H^* < \mu^* \leq \nu$. Таким образом (3.5) доказано.

---

[8] Отметим, что в [5] в формулировке и доказательстве Теоремы 1.5 допущена неточность: в равенстве (1.3) и пп. 3.2–3.9 вместо числа $\mu(\alpha; Z_2)$ надо писать $\mu(\hat{\alpha}(Z_2); Z_2)$, определяя это число формулами (3.2), (3.3) с $Z_2^* = Z_2$ и с оператором $H_{03}(Z_s')$ вместо $H_0(Z_s')$, где оператор $H_{03}(Z_s')$, дан в [5] равенством (1.4)

3.3. Доказательство Теоремы 3.1. Пусть $K = H_0^{\hat{\alpha}_0(Z_2^*)}(Z_2^*)$ и пусть $w_m(q(Z_2^*))$ — последовательность Вейля для произвольной точки $\lambda \in \sigma_{ess}(K)$. Оценим величину $\lambda = \lim\limits_{m\to\infty}(Kw_m, w_m)$ снизу. Следуя [5] (пп. 3.3–3.5), с помощью гладкого разбиения единицы разбиваем пространство $R_0(Z_2^*)$ на области, отвечающие всевозможным распадениям кластера $C_1^*$ в направлении оси $z$ (т.е. за счет больших расстояний между его частицами в направлении оси $z$) не зависимо от положения кластера $C_2^*$, а потом на области, отвечающие распадениям кластера $C_2^*$ в направлении оси $z$, когда кластер $C_1^*$ находится в цилиндре $|q_z[C_1^*]|_1 \le const$. Тогда, абсолютно так же, как в [5] (пп. 3.3–3.5), по $\exists\varepsilon > 0$ можно указать такие сглаживающие функции $u_1(t)$, $v_1(t)$, что

$$(Kw_m v_{11}, w_m v_{11}) \ge \mu^* ||w_m v_{11}||^2 - \varepsilon, \tag{3.7a}$$

$$(Kw_m u_{11} v_{12}, w_m u_{11} v_{12}) \ge \mu^* ||w_m u_{11} v_{12}||^2 - \varepsilon, \tag{3.7b}$$

где $v_{1j} = v_1(|q_z[C_j^*]|_1)$, $u_{1j} = u_1(|q_z[C_j^*]|_1)$, а функции $u_1(t)$, $v_1(t)$ обладают теми же свойствами, что в п. 2.8, но в качестве $R_1$ мы берем $R_0[C_j^*]$ $j = 1, 2$ и вместо (2.22) будут выполняться неравенства

$$\sum_{p\in C_j^*}(|\nabla_{p3}^0[C_j^*]u_{1j}|^2 + |\nabla_{p3}^0[C_j^*]v_{1j}|^2) \le +\varepsilon|P_z q[C_j^*]|_1^{-2}\chi_{1_j} \quad j = 1, 2;$$

где $\chi_{1_j}$ — характеристическая функция области $a_1 \le |q_z[C_j^*]|_1 \le b_1$ (то, что одна пара функций $u_1$, $v_1$ может обслуживать оба кластера $C_j^*$, следует из их построения в Лемме 3.2 II [12]). Мы опускаем доказательство (3.7), ибо оно не отличается от данного в [5]. Заметим лишь, что при $q[C_j^*] \subset \operatorname{supp} v_{1j}$ выполняется $|q_z[C_j^*]|_1 \ge a_1 \gg 1$ и (см. п. 2.8) поэтому область $\operatorname{supp} w_m v_{1j}$ отвечает большому расстоянию в направлении оси $z$ хотя бы одной частицы кластера $C_j^*$ до центра масс $C_j^*$. Но т.к. центр масс кластера $C_j^*$ в нашей системе координат имеет нулевую третью координату, то $\operatorname{supp} w_m v_{1j}$ не может отвечать движению всего кластера как целого (в направлении оси $z$), и, значит, область

$\operatorname{supp} w_m v_{1j}$ приближенно соответствует какому-либо распадению или суперпозиции распадений кластера $C_j^*$ в направлении оси $z$. На этом и основаны оценки (3.7), причем при $a_1 \to \infty$ число $\varepsilon$ можно взять сколь угодно малым.

Далее, при $q(Z_2^*) \in \operatorname{supp} w_m u_{11} u_{12}$, выполняются неравенства $|q_z[C_j^*]|_1 \leq b_1 \quad j = 1,2$. Поэтому $\operatorname{supp} w_m u_{11} u_{12}$ заключен в цилиндре $\Omega = \{q(Z_2^*) \,|\, |q_z[C_j^*]|_1 \leq b_1 \quad j = 1,2\}$. Так как магнитное поле неограничено растет на бесконечности в плоскости $(x,y)$, а в направлении оси $z$ область $\Omega$ ограничена, то так же как в [1] убеждаемся, что оператор $K$ в $\Omega$ с граничными условиями Дирихле на $\partial\Omega$ имеет чисто дискретный спектр. Поэтому и т.к. $w_m \rightharpoonup 0$ в $\mathcal{L}_2(R_0(Z_2^*))$, мы получаем, что

$$\underline{\lim}(K w_m u_{11} u_{12}, w_m u_{11} u_{12}) \geq 0, \quad \lim ||w_m u_{11} u_{12}|| = 0 \qquad (3.8a)$$

Далее, в силу выбора функций $u_1$, $v_1$

$$\begin{aligned}(K w_m, w_m) &\geq (K w_m u_{11}, w_m u_{11}) + (K w_m v_{11}, w_m v_{11}) - \varepsilon \geq \\ &\geq (K w_m u_{11} v_{12}, w_m u_{11} v_{12}) + (K w_m u_{11} u_{12}, w_m u_{11} u_{12}) + \\ &\quad + (K w_m v_{11}, w_m v_{11}) - 2\varepsilon. \qquad (3.8b)\end{aligned}$$

Из (3.7), (3.8) следует, что $\lambda \geq \mu^*$, т.е. $\sigma_{ess}(K) \subseteq [\mu^*, \infty)$. Доказательство противоположного включения осуществляется стандартным образом (например, см. п. 2.8 [1]). Таким образом равенство (3.4) установлено.

3.4. Переходим теперь к выводу оценки (2.29). В определении функций $u_s$, $v_s$ (п. 2.3) возьмем числа $a_s$, $b_s$ $\quad s \geq 2$ достаточно малыми и удовлетворяющими неравенству (2.8) из [14]:

$$\left(\frac{m_0}{M}\right)^3 \frac{a_{s-1}^2 - b_s^2}{1 + a_{s-1}^2} - b_s^2 > l_s^2 > b_s^2(1 + b_s^2),$$

где $m_0 = \min\limits_i m_i$, $M = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i$, $l_s^2 = 0,5 m_0^3 M^{-3} a_{s-1}^2 (1 + a_{s-1}^2)^{-1}$ и после этого выберем функции $u_s(t)$, $v_s(t) \quad s \geq 2$ по произвольному

$\varepsilon > 0$ согласно Лемме 3.2 I [12] с $R_1 = P_Z R_0$, $R_2 = P_Z R_0(Z_s)$, $R_3 = R_c(Z_s)$ так, что (см. (3.4) [12]) для некоторой константы $c > 0$

$$\sum_{j=1}^{n}(|\nabla_{j3}^0 u_s(\tau_s)|^2 + |\nabla_{j3}^0 v_s(\tau_s)|^2) \leq \\ \leq [\varepsilon |q_Z|_1^{-2} u_s^{-2} u_s^2(\tau_s) + c|q_Z|_1^{-2} v_s^2(\tau_s)]\chi(Z_s), \tag{3.9}$$

где $\tau_s = \tau_{Z_s} = |P_0(Z_s)q_Z|_1 \cdot |P_c(Z_s)q_Z|_1^{-1}$, $\chi(Z_s)$ — характеристическая функция области $a_s \leq \tau_s \leq b_s$ (см. сноску к п. 2.3).

Положим далее $u_{Z_s} = u_s(\tau_{Z_s})$, $v_{Z_s} = \sqrt{1 - u_{Z_s}^2}$ и определим функции

$$\hat{\psi}_1 = \psi v_1, \quad \hat{\psi}_i = \hat{\psi}_{i-1}\left(1 - \sum_{Z_i} u_{Z_i}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \psi_{i-1,Z_i} = \hat{\psi}_{i-1} u_{Z_i},$$
$$\psi_i = \sum_{Z_i} \psi_{i-1,Z_i} \quad 2 \leq i \leq n-1, \quad \psi_{n-1,Z_n} = \hat{\psi}_{n-1}.$$

Согласно Лемме 3.5 [15], в силу выбора чисел $a_s$, $b_s$

$$\operatorname{supp}\psi_{i,Z_{i+1}} \cap \operatorname{supp}\psi_{i,Z'_{i+1}} = \emptyset \text{ при } Z_{i+1} \neq Z'_{i+1}. \tag{3.10}$$

3.5. Фиксируем произвольное значение $i$, $i \geq 2$, и обозначим через $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_m$ все различные разбиения $Z_i$ системы $Z_1$ на $i$ не пустых кластеров, не имеющих (попарно) общих элементов. Разумеется, $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_p(i)$ и $m = m(i)$, но т.к. индекс $i$ фиксирован, то мы его опускаем. Пусть

$$\varphi_0 = \hat{\psi}_{i-1}, \quad \varphi_j = \hat{\psi}_{i-1} v_{\mathcal{D}_1} \cdots v_{\mathcal{D}_j} \quad j \geq 1.$$

В силу неравенства (3.9)

$$(T_{03}\varphi_{j-1}, \varphi_{j-1}) \geq (T_{03}\varphi_{j-1}u_{\mathcal{D}_j}, \varphi_{j-1}u_{\mathcal{D}_j}) + \\ +(T_{03}\varphi_{j-1}v_{\mathcal{D}_j}, \varphi_{j-1}v_{\mathcal{D}_j}) - \varepsilon||\varphi_{j-1}u_{\mathcal{D}_j}\chi(\mathcal{D}_j)|q_Z|_1^{-1}||^2 - \\ -c||\varphi_{j-1}v_{\mathcal{D}_j}|q_Z|_1^{-1}\chi(\mathcal{D}_j)||^2 \quad j \geq 1. \tag{3.11}$$

Просуммируем неравенства (3.11) по $j$ от 1 до $m$. Тогда, учитывая, что в силу (3.10)

$$\hat{\psi}_{i-1} v_{\mathcal{D}_1} v_{\mathcal{D}_2} \cdots v_{\mathcal{D}_{t-1}} u_{\mathcal{D}_t} = \hat{\psi}_{i-1} u_{\mathcal{D}_t} = \psi_{i-1,\mathcal{D}_t},$$

мы получим

$$\begin{gathered}(T_{03}\hat{\psi}_{i-1}, \hat{\psi}_{i-1}) \geq \\ \geq \sum_{j=1}^{m} \left[ (T_{03}\psi_{i-1,\mathcal{D}_j}, \psi_{i-1,\mathcal{D}_j}) - \varepsilon \| \psi_{i-1,\mathcal{D}_j} |q_Z|_1^{-1} \chi(\mathcal{D}_j) \|^2 \right] + \\ +(T_{03}\hat{\psi}_{i-1} \prod_{j=1}^{m} v_{\mathcal{D}_j}, \hat{\psi}_{i-1} \prod_{j=1}^{m} v_{\mathcal{D}_j}) - c \sum_{p=1}^{m} \| \hat{\psi}_{i-1} \prod_{j=1}^{p} v_{\mathcal{D}_j} \chi(\mathcal{D}_p) |q_Z|_1^{-1} \|^2 .\end{gathered} \tag{3.12}$$

В силу (3.10)

$$\begin{gathered}\hat{\psi}_{i-1} \prod_{j=1}^{m} v_{\mathcal{D}_j} = \hat{\psi}_{i-1} \left( 1 - \sum_{j=1}^{m} u_{\mathcal{D}_j}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \hat{\psi}_i, \\ |\hat{\psi}_{i-1} v_{\mathcal{D}_1} \cdots v_{\mathcal{D}_p}|^2 \chi(\mathcal{D}_p) \leq |\hat{\psi}_{i-1}|^2 v_{\mathcal{D}_p}^2 \chi(\mathcal{D}_p), \\ |\hat{\psi}_{i-1}|^2 \sum_{p=1}^{m} v_{\mathcal{D}_p}^2 \chi(\mathcal{D}_p) \leq |\hat{\psi}_i|^2 \chi^i,\end{gathered}$$

где $\chi^i = \sum_{p=1}^{m} \chi(\mathcal{D}_p)$. Учитывая это и то, что $\{\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_m\} = \{Z_i\}$ ($i$ фиксировано) мы получаем из (3.12) следующее неравенство

$$\begin{gathered}(T_{03}\hat{\psi}_{i-1}, \hat{\psi}_{i-1}) \geq \\ \geq \sum_{Z_i} \left[ (T_{03}\psi_{i-1,Z_i}, \psi_{i-1,Z_i}) - \varepsilon \| \psi_{i-1,Z_i} |q_Z|_1^{-1} \chi(Z_i) \|^2 \right] + \\ +(T_{03}\hat{\psi}_i, \hat{\psi}_i) - c \| \hat{\psi}_i |q_Z|_1^{-1} \chi^i \|^2 .\end{gathered} \tag{3.13}$$

Суммируя неравенства (3.13) по $i$ от 2 до $n-1$ имеем

$$(T_{03}\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1) \geq (T_{03}\hat{\psi}_{n-1}, \hat{\psi}_{n-1}) +$$
$$+\sum_{i=2}^{n-1}\left\{\sum_{Z_i}\left[(T_{03}\psi_{i-1,Z_i}, \psi_{i-1,Z_i}) - \varepsilon\|\psi_{i-1,Z_i}|q_Z|^{-1}\chi(Z_i)\|^2 - \right.\right. \tag{3.14}$$
$$\left.\left. - c\|\hat{\psi}_i\chi^i|q_Z|_1^{-1}\|^2\right]\right\}.$$

Пусть $B = T_\perp + V - \varepsilon|q_Z|_1^{-2}\chi_1$. Так как оператор $B$ не содержит дифференцирования по переменным $q_{13}, \ldots, q_{n3}$, то, очевидно,

$$(B\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1) = \sum_{i=2}^{n-1}\left(\sum_{Z_i} B\psi_{i-1,Z_i}, \psi_{i-1,Z_i}\right). \tag{3.15}$$

Поскольку

$$L_2[\psi v_1] = (T_{03}\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1) + (B\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_1),$$

то в силу (3.13)–(3.15)

$$L_2[\psi v_1] \geq \sum_{i=2}^{n-1}\sum_{Z_i}[(H_0\psi_{i-1,Z_i}, \psi_{i-1,Z_i}) -$$
$$-\varepsilon\|\psi_{i-1,Z_i}|q_Z|_1^{-1}\chi_1\|^2 - \varepsilon\|\psi_{i-1,Z_i}|q_Z|_1^{-1}\chi(Z_i)\|^2] -$$
$$-c\sum_{i=2}^{n-1}\|\hat{\psi}_i|q_Z|_1^{-1}\chi^i\|^2 + (H_0\hat{\psi}_{n-1}, \hat{\psi}_{n-1}) - \varepsilon\|\psi_{n-1}|q_Z|_1^{-1}\chi_1\|^2. \tag{3.16}$$

3.6. Из определения функций $\hat{\psi}_i$, $\psi_{i,Z_{i+1}}$ следует, что

$$|\hat{\psi}_i|^2 = \sum_{Z_{i+1}}|\psi_{i,Z_{i+1}}|^2 + |\hat{\psi}_{i+1}|^2 = \ldots = \sum_{j=i}^{n-1}\sum_{Z_{j+1}}|\psi_{j,Z_{j+1}}|^2 \tag{3.17}$$

и поэтому

$$\sum_{i=2}^{n-1}|\hat{\psi}_i|^2\chi^i \leq c\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{Z_{i+1}}|\psi_{i,Z_{i+1}}|^2.$$

Подставим эту оценку в (3.16) и сгруппируем слагаемые в правой части полученного неравенства в две суммы. В первую включим слагаемые, зависящие от $Z_2$, во-вторую — все остальные. Имеем

$$L_2[\psi_1] \geq \sum_{Z_2} \Phi_1(Z_2) + \sum_{j=3}^{n-1} \sum_{Z_j} \Phi_2(Z_j), \tag{3.18}$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi_1(Z_j) &= (H_0\psi_{j-1,z_j}, \psi_{j-1,z_j}) - \varepsilon||\psi_{j-1,z_j}|q_Z|_1^{-1}\chi_1||^2 - \\
&\quad -\varepsilon||\psi_{j-1,z_j}\chi(Z_j)|q_Z|_1^{-1}||^2, \\
\Phi_2(Z_j) &= \Phi_1(Z_j) - c||\psi_{j-1,z_j}|q_Z|_1^{-1}||^2 \qquad 3 \leq j \leq n-1, \\
\Phi_2(Z_n) &= (H_0\psi_{n-1,z_n}, \psi_{n-1,z_n}) - c||\psi_{n-1,z_n}|q_Z|_1^{-1}||^2.
\end{aligned}$$

3.7. В силу Леммы 3.7 и соотношения (2.18) из [15] для точек $q \in \operatorname{supp}\psi_{i-1,z_i}$ и индексов $p$, $t$, принадлежащих различным кластерам разбиения $Z_i$, выполняется неравенство

$$|q_{p3} - q_{t3}| \geq a_1 const.$$

Кроме того, по построению, $|q_Z|_1 \geq a_1$ при $q \in \operatorname{supp}\psi_{i-1,z_i}$. Используя эти неравенства для оценки снизу функционалов $\Phi_1(Z_2)$ при $Z_2 \notin O(\alpha)$ и $\Phi_2(Z_j)$ при $j \geq 3$ получим

$$\Phi_p(Z_i) \geq (H(Z_i)\psi_{i-1,z_i}, \psi_{i-1,z_i}) - ca_1^{-1}||\psi_{i-1,z_i}||^2 \quad p = 1, 2, \tag{3.19}$$

где

$$H(Z_i) = T_\perp + T_{03}[Z_1] + V_{Z_i}.$$

Очевидно,

$$H(Z_i) \geq H_0(Z_i).$$

Далее, по построению,

$$\sum_{\hat{\alpha}(Z_i) \prec \alpha} P^{\hat{\alpha}(Z_i)}\psi_{i,z_i} = \psi_{i,z_i}.$$

Следовательно,

$$(H(Z_i)\psi_{i-1,z_i},\psi_{i-1,z_i}) \geq (H_0(\alpha;Z_i)\psi_{i-1,z_i},\psi_{i-1,z_i}) \geq \mu_1^\alpha ||\psi_{i-1,z_i}||^2, \tag{3.20}$$

где $\mu_1^\alpha = \min\limits_{Z_i, Z_i \notin O(\alpha)} \inf H_0(\alpha;Z_i)$. В силу неравенства (3.5) $\mu_1^\alpha > \mu^\alpha$ и, значит, при большом $a_1$ вследствие (3.19),(3.20) мы получаем, что

$$\Phi_k(Z_i) \geq \mu^\alpha ||\psi_{i-1,z_i}||^2 \quad k=1,2, \quad Z_i \notin O(\alpha).$$

Поэтому из (3.18) вытекает оценка (2.29):

$$\begin{aligned} L_2[\psi_1] \quad &\geq \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \Phi_1(Z_2) + \sum_{i=2}^{n} \sum_{Z_i \notin O(\alpha)} \mu^\alpha ||\psi_{i-1,z_i}||^2 = \\ &= \mu^\alpha(||\psi_1||^2 - \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} ||\psi_{1,z_2}||^2) + \sum_{Z_2 \in O(\alpha)} \Phi_1(Z_2); \end{aligned} \tag{3.21}$$

здесь мы учли, что по построению

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{Z_i} |\psi_{i-1,z_i}|^2 = |\psi_1|^2.$$

Отметим, что неравенство (3.21) аналогично неравенству (2.27) из [10], которое в [10] использовалось без доказательства и, кроме того, относилось к ограничениям многочастичных операторов с однородным магнитным полем на подпространства функций фиксированной $SO(2)$ симметрии, т.е. к совершенно другой ситуации.

3.8. Переходим теперь к доказательству Теоремы 1.1 в ситуации, когда упрощающие предположения $\mathcal{Y}_1$) и $\mathcal{Y}_2$) не выполняются. Разобьем множество $O(\alpha)$ на классы (см. п. 1.6) и произвольно выберем в каждом классе $O_k(\alpha)$ представителя — разбиение $Z_{2k} = \{C_{k1}, C_{k2}\}$. Определим пространство $\mathcal{M}_1(\lambda)$ равенством

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1(\lambda) = P^\alpha \mathcal{L}\Big\{T_g[\varphi_{ij}^{(k)}(q(Z_{2k}))f_{ip}^{(k)}(\zeta(Z_{2k}))u_{Z_{2k}}] \; g \in S, \\ j=1,2,\ldots,j_{ki}, \; p=1,2,\ldots,p_{ki}; \\ i=1,2,\ldots,i_k, \quad k=1,\ldots,k_0\Big\}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{L}\{\ldots\}$ обозначает линейную оболочку, функции $\varphi_{ij}^{(k)}(q(Z_{2k}))$ $j=1,2,\ldots,j_{ki}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $W_i^k = W_i(\alpha; Z_{2k})$, $j_{ki} = |\hat{\alpha}_{0i}^k| = \dim W_i^k$ (см. п. 1.7), $f_{ip}^{(k)}(\zeta(Z_{2k}))$ $p=1,2,\ldots,p_{ki}$ — ортонормированные собственные функции оператора $h_{a_0}^+(Z_{2k})$ (см. (2.6)), отвечающие его собственным значениям, не превосходящим $\lambda < 0$. Здесь, как и в §2, мы берем для данных $k, i$ собственные функции $f_{ip}^{(k)}$ оператора $h_{a_0}^+(Z_{2k})$

любой четности, если $C_{k1} \not\sim C_{k2}$ или если $C_{k1} \sim C_{k2}$ и $\mathfrak{M}_{\hat{\alpha}_+^{ki}}^{\alpha} \geq 1$, $\mathfrak{M}_{\hat{\alpha}_-^{ki}}^{\alpha} \geq 1$,

только не четные {четные} относительно инверсии $\zeta(Z_{2k}) \to -\zeta(Z_{2k})$, если $C_{k1} \sim C_{k2}$ и $\mathfrak{M}_{\hat{\alpha}_+^{ki}}^{\alpha} = 0$, $\mathfrak{M}_{\hat{\alpha}_-^{ki}}^{\alpha} \geq 1$, $\{\mathfrak{M}_{\hat{\alpha}_+^{ki}}^{\alpha} \geq 1$, $\mathfrak{M}_{\hat{\alpha}_-^{ki}}^{\alpha} = 0\}$; отметим, что эти четные {не четные} функции $f_{ip}^{(k)}$ принадлежат представлению типа $\hat{\alpha}_c^+ \{\hat{\alpha}_c^-\}$.

В связи с новым определением $\mathcal{M}_1(\lambda)$ изменяется оценка для $\dim \mathcal{M}_1(\lambda)$. Теперь мы получаем ([11]), что

$$\dim \mathcal{M}_1(\lambda) \geq \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{\omega=\pm} d_{k\omega}(\alpha) N(\lambda; h_\omega^+(Z_{2k})) - const.$$

Далее, в п. 2.5 выражение для $\psi_{Z_2}$ будет теперь зависеть от класса $O_k(\alpha)$, к которому принадлежит $Z_2$, а именно

$$\psi_{Z_2} = F_{Z_2}^{(k)} u_{Z_2},$$

где

$$F_{Z_2}^{(k)} = \sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_{ki}} \varphi_{ij}^{(k)} q((Z_2)) \Phi_{ij}^{(k)}(\zeta(Z_2)),$$

$$\Phi_{ij}^{(k)}(\zeta(Z_2)) = \sum_{p=1}^{p_{ki}} c_{jp}^{ki} f_{ip}^{(k)}(\zeta(Z_2)),$$

$c_{jp}^{ki}$ — некоторые константы, зависящие от $\alpha$ и $\hat{\alpha}_0^{ki}$.

Поэтому всюду в пп. 2.5–2.7 надо заменить функции $F_{Z_2}$, $\Phi_j$, $f_p$, $\varphi_j$ и числа $c_{jp}$, $p_0$, $j_1$, соответственно на функции $F^{(k)}_{Z_2}$, $\Phi^{(k)}_{ij}$, $f^{(k)}_{ip}$, $\varphi^{(k)}_{ij}$ и числа $c^{ki}_{jp}$, $p_{ki}$, $j_{ki}$, а суммирование по $j$ дополнить суммированием по $i$ от 1 до $i_k$. После этого мы проводим доказательство Теоремы 1.1 до неравенства (2.19) включительно так же, как в пп. 2.5–2.7.

3.9. Оценка входящего в (2.19) члена $(G(q)F^{(k)}_{Z_2}, F^{(k)}_{Z_2})$ в общем случае не может быть проведена так же, как члена $(G(q)F_{Z_2}, F_{Z_2})$ в п. 2.7. Действительно, последняя основана на том, что функция $F_{Z_2}$ имеет определенную четность относительно инверсии $J : q_z(Z_2) \to -q_z(Z_2)$ (это обеспечивается условием $У_2$) и, следовательно, функция $|F_{Z_2}|$ является четной относительно $J$. А при нарушении условия $У_2$) функции $F^{(k)}_{Z_2}$ и, следовательно, $|F^{(k)}_{Z_2}|$, могут вообще не иметь определенной четности. Для оценки величины $(G(q)F^{(k)}_{Z_2}, F^{(k)}_{Z_2})$ при не выполнении требования $У_2$) подставим в нее выражение $F^{(k)}_{Z_2}$ и займемся оценкой отдельных слагаемых в полученной сумме. Имеем

$$(G(q)F^{(k)}_{Z_2}, F^{(k)}_{Z_2}) = \sum_{i,i'=1}^{i_k} \sum_{j,j'=1}^{j_{ki}} (G(q)\varphi^{(k)}_{ij}\Phi^{(k)}_{ij}, \varphi^{(k)}_{i'j'}\Phi^{(k)}_{i'j'}) \tag{3.22}$$

При $C_1 \not\sim C_2$ множитель $G(q)$ инвариантен относительно перестановок координат $q(Z_2)$ операторами $T_g$ $g \in \hat{S}(Z_2) = S(Z_2)$, $Z_2 \in O_k(\alpha)$. Поэтому функции $G(q)\varphi^{(k)}_{ij}$ $j = 1, 2, \ldots, j_{ki}$ принадлежат неприводимому представлению того же типа $\alpha^{(k)}_{0i}$, что и функции $\varphi^{(k)}_{ij}$. Следовательно, при $\hat{\alpha}^{(k)}_{0i} \neq \hat{\alpha}^{(k)}_{0i'}$ и любых $j$, $j'$ и $\zeta(Z_2)$

$$\left(G(q)\varphi^{(k)}_{ij}, \varphi^{(k)}_{i'j'}\right)_{R_0(Z_2)} = 0. \tag{3.23}$$

Если $\hat{\alpha}^{(k)}_{0i} = \hat{\alpha}^{(k)}_{0i'}$, то в предположении B) п. 1.8 равенство (3.23) также выполняется, ибо — согласно B) — при $\hat{\alpha}^{(k)}_{0i} = \hat{\alpha}^{(k)}_{0i'}$ функции $\varphi^{(k)}_{ij}$ и $\varphi^{(k)}_{i'j'}$ имеют одинаковую четность относительно инверсии

$J$, а функция $G(q)$ относительно $J$ не четна. Наконец, при выполнении условия C) п. 1.8 равенство (3.23) очевидно, поскольку $G(q) \equiv 0$. Таким образом при выполнении хотя бы одного из условий B) или C) п. 1.8 равенство (3.23) верно для любых $i$, $j$, $i'$, $j'$ и в силу (3.22)

$$\left(G(q)F_{Z_2}^{(k)}, F_{Z_2}^{(k)}\right) = 0. \tag{3.24}$$

Поэтому в данном случае мы получим из (2.19) неравенство (2.20) практически в том же виде, что и раньше, и показатель $\theta = \theta_k$ в члене с $|\zeta|^{-\theta}$ эффективного потенциала в операторе $h_{a_0}^{+}(Z_{2k})$ в (2.21) по прежнему равен $\min\{4, \gamma + 2\}$. Если же ни одно из условий B), C), п. 1.8 не выполняется, то вопрос о справедливости (3.24) остается открытым и мы вынуждены вместо (3.24) применить более грубую оценку. Используя в (3.22) неравенство Буняковского и включение $|q(Z_2)|_1\varphi_{st}^{(k)}(q(Z_2)) \in \mathcal{L}_2(R_0(Z_2))$, получаем, что

$$\left|\left(G(q)F_{Z_2}^{(k)}, F_{Z_2}^{(k)}\right)\right| \leq c\sum_{i=1}^{i_k}\sum_{j=1}^{j_{ki}} ||\Phi_{ij}^{(k)}(\zeta)|\zeta|^{-\frac{1+\gamma}{2}}||^2 \tag{3.25}$$

Поэтому теперь при переходе от (2.19) к (2.20) во второй сумме в (2.20) вместо $|\zeta|^{-(1+\frac{\gamma}{2})}$ получим множитель $|\zeta|^{-\frac{1+\gamma}{2}}$ и в эффективном потенциале в операторе $h_{a_0}^{+}(Z_2)$ показатель $\theta_k = \min\{4, \gamma+1\}$. Таким образом, общая формула для $\theta_k$ может быть записана в виде $\theta_k = \min\{4, \gamma + \delta_k\}$, где $\delta_k = 2$, если выполняется хотя бы одно из условий B) или C), $\delta_k = 1$ — в остальных случаях. После соотношений (2.20), (2.21) доказательство неравенства (2.1) при $\psi \in \mathcal{M}_1(\lambda)$ завершается так же, как в п. 2.7.

3.10. Покажем теперь, как при не выполнении условий $У_1$), $У_2$) надо изменить определение пространства $\mathcal{M}_2(\lambda)$ и доказательство (2.2). Мы полагаем как и ранее $\mathcal{M}_2(\lambda) = u_1\mathcal{M}_2^0 + v_1\mathcal{M}_2^1(\lambda)$, где функции $u_1$, $v_1$ и подпространство $\mathcal{M}_2^0$ — те же, что в п. 2.8, а подпространство $\mathcal{M}_2^1(\lambda)$ определяется равенством

$$\mathcal{M}_2^1(\lambda) = P^\alpha \mathcal{L}\Big\{T_g[\varphi_{ij}^{(k)}(q(Z_{2k}))f_{ip}^{(k-)}(\zeta(Z_{2k}))u_{Z_{2k}}] \ g \in S,$$
$$j = 1,2,\ldots,j_{ki}, \ \ p = 1,2,\ldots,p_{ki}^-;$$
$$i = 1,2,\ldots,i_k, \quad k = 1,\ldots,k_0\Big\},$$

где функции $\varphi_{ij}^{(k)}$ — те же, что в п. 3.8, $f_{ip}^{(k-)}$ — ортонормированные собственные функции оператора $h_{a_0}^-(Z_{2k})$ (см. п. 1.8), отвечающие его собственным значениям, не превосходящим $\lambda < 0$, с теми же ограничениями на четность, что и в п. 3.8. Оценка $\dim \mathcal{M}_2(\lambda)$ теперь будет такой (см. [11])

$$\dim \mathcal{M}_2(\lambda) \leq \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{\omega=\pm} d_{k\omega} N(\lambda; h_\omega^-(Z_{2k})) + c.$$

Далее без изменений следуем рассуждениям п. 2.9 (включая и вывод оценки (2.9), вынесенный в пп 3.1–3.7). В п. 2.10 разложение (2.30) надо заменить на разложение

$$\psi_{Z_2} = F^{(k)}(Z_2) + g_k(q), \tag{3.26}$$

где

$$F^{(k)}(Z_2) = \textstyle\sum_{i=1}^{i_k} \sum_{j=1}^{j_{ki}} \varphi_{ij}^{(k)}(q(Z_2))\varkappa_{ij}^{(k)}(\zeta),$$
$$\varkappa_{ij}^{(k)}(\zeta) = (\psi_{Z_2}, \varphi_{ij}^{(k)})_{\mathcal{L}_2(R_0(Z_2))}, (g_k, \varphi_{ij}^{(k)})_{\mathcal{L}_2(R_0(Z_2))} = 0, \quad \zeta = \zeta(Z_2)$$

и значение $k$ определяется тем классом $O_k(\alpha)$ из $O(\alpha)$, которому принадлежит рассматриваемое разбиение $Z_2$. После (2.30) всюду заменяем $F(Z_2)$, $\varphi_j$, $\varkappa_j$, $g$, $j_1$, соответственно на $F^{(k)}(Z_2)$, $\varphi_{ij}^{(k)}$, $\varkappa_{ij}^{(k)}$, $g^{(k)}$, $j_{ki}$ и к суммированию по $j$ добавляем суммирование по $i$ от 1 до $i_k$. До неравенства (2.40) мы следуем рассуждениям §2, однако само это неравенство мы можем получить лишь в предположениях B), C) п. 1.8. Для этого мы рассуждаем так же, как в п. 3.9

с $F^{(k)}(Z_2)$ вместо $F^{(k)}_{Z_2}$. Если ни одно из условий B), C) не выполнено, то, используя неравенство Буняковского аналогично (3.25), мы вместо неравенства (2.40) получим соотношение

$$\left(AI_{Z_2}F^{(k)}(Z_2), F^{(k)}(Z_2))\right) - Q(Z_2)\sum_{i=1}^{i_k}\sum_{j=1}^{j_{ki}}\|\varkappa_{ij}^{(k)}|\zeta|^{-\frac{\gamma}{2}}\|^2 \geq$$
$$-c\sum_{i=1}^{i_k}\sum_{j=1}^{j_{ki}}\|\varkappa_{ij}^{(k)}|\zeta|^{-\frac{1+\gamma}{2}}\|^2.$$

А в правой части неравенства (2.42) вместо $c_0\|\varkappa_j|\zeta|^{-(1+\frac{\gamma}{2})}\|^2$ будет слагаемое $c_0\|\varkappa_{ij}^{(k)}|\zeta|^{-\frac{(1+\gamma}{2})}\|^2$ и в (2.43) в операторе $h^-_{a_0}(Z_{2k})$ в потенциале $V_k^-$ (см. (1.8)) второй член будет иметь показатель $\theta_k = \min(4, \gamma + \delta_k)$, где $\delta_k$ — то же, что и в п. 3.9.

## §4. Доказательство Теоремы 1.4

4.1. Начнем со случая D), т.е. с системы $Z_1 = Z_1^n$, состоящей из ядра (частица с номером 1) и $(n-1)$ тождественных электронов, заряды которых удовлетворяют неравенству $ee_1 + (n-2)e^2 \leq 0$. Пусть $Z_1^p = \{1, 2, \ldots, p\} \subseteq Z_1^n$, $Z_2^p = \{C_1^p, C_2^p\}$ — произвольное распадение системы $Z_1^p$ на два не пересекающихся не взаимодействующих друг с другом кластера, $1 \in C_1^p$, $H_0[Z_1^p]$ и $H_0(Z_2^p)$ — операторы энергии систем $Z_1^p$ и $Z_2^p$, определенные совершенно аналогично $H_0[Z_1]$ и $H_0(Z_2)$ (см. (1.4) и (1.5) при $s = 2$). Пусть, далее, $\alpha_k$ — произвольный тип н.п. группы $S_k$ перестановок $k$ элементов, $P^{\alpha_k}$ — проектор на подпространство функций, преобразующихся под действием операторов $T_g$ (см. п. 1.2) по представлениям типа $\alpha_k$, $H_0^{\alpha_{p-1}}[Z_1^p] = P^{\alpha_{p-1}}H_0[Z_1^p]$, $H_0(\alpha_{p-1}; Z_2^p) =$
$$= \sum_{\hat{\alpha}_0^p \prec \alpha_{p-1}} H_0^{\hat{\alpha}_0^p}(Z_2^p),$$

$$\mu_p^{\alpha_{p-1}} = \mu^{\alpha_{p-1}}[Z_1^p] := \min_{Z_2^p}\inf H_0(\alpha_{p-1}; Z_2^p). \tag{4.1}$$

Здесь $\hat{\alpha}_0^p$ — типы н.п. группы $\hat{S}(Z_2^p)$ и соотношение $\hat{\alpha}_0^p \prec \alpha_{p-1}$ определено так же, как в п. 1.5, но применительно к $Z_1^p$ и $Z_2^p$ вместо $Z_1$ и $Z_2$.

Т.к. магнитное поле растет на бесконечности в плоскости $(x, y)$, то [1,2]

$$\sigma_{ess}(H_0^{\alpha_{p-1}}[Z_1^p]) = [\mu_p^{\alpha_{p-1}}, +\infty).$$

Положим

$$O^p(\alpha_{p-1}) = \{Z_2^p \mid \inf H_0(\alpha_{p-1}; Z_2^p) = \mu_p^{\alpha_{p-1}}\}.$$

Оператор $H_0(\alpha_{p-1}; Z_2^p)$ определяется аналогично $H_0(\alpha; Z_2)$ с тем, однако, упрощением, что поскольку кластеры $C_1^p$ и $C_2^p$ не могут быть тождественными, то $\hat{S}(Z_2^p) = S(Z_2^p) = S[C_1^p] \times S[C_2^p] = S_{p_1} \times S_{p_2}$, где $p_1 = |C_1^p| - 1$, $p_2 = |C_2^p|$. Поэтому каждый тип $\hat{\alpha}_0^p = \hat{\alpha}_0(Z_2^p)$ н.п. группы $S(Z_2^p)$ определяется парой типов $\alpha'$, $\alpha''$ н.п. групп $S_{p_1}$ и $S_{p_2}$, для которых $\mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_0^p} = \mathcal{D}_{g_1}^{\alpha'} \otimes \mathcal{D}_{g_2}^{\alpha''}$ при $g = g_1 g_2$, $g_i \in S[C_i^p]$. В связи с этим условимся далее вместо соотношения $\hat{\alpha}_0(Z_2^p) \prec \alpha_{p-1}$ писать $(\alpha', \alpha'') \prec \alpha_{p-1}$, а в случае $p_2 = |C_2^p| = 1$ писать $\alpha' \prec \alpha_{p-1}$. В силу сказанного, в общем случае

$$H_0(\alpha_{p-1}; Z_2^p) = \sum_{(\alpha', \alpha'') \prec \alpha_{p-1}} (H_0^{\alpha'}[C_1^p] \otimes I^{\alpha''}[C_2^p] + I^{\alpha'}[C_1^p] \otimes H_0^{\alpha''}[C_2^p]) \tag{4.2}$$

и при $|C_2^p| = 1$, $C_2^p = j$, $C_1^p = Z_1^p \backslash j$

$$H_0(\alpha_{p-1}; Z_2^p) = \sum_{\alpha' \prec \alpha_{p-1}} (H_0^{\alpha'}[C_1^p] \otimes I[C_2^p] + I^{\alpha'}[C_1^p] \otimes T_{j\perp}), \tag{4.3}$$

где через

$I^{\alpha'}[C_1^p]$, $I^{\alpha''}[C_2^p]$, $I[C_2^p]$ обозначены единичные операторы соответственно в пространствах $P^{\alpha'}\mathcal{L}_2(R_0[C_1^p])$, $P^{\alpha''}\mathcal{L}_2(R_0[C_2^p])$ и $\mathcal{L}_2(R_0[C_1^p])$. Разбиения $Z_2^p = \{C_1^p, C_2^p\}$ при $C_2^p = j$ будем обозначать через $Y_{2j}^p = \left\{\mathcal{D}_{1j}^p, \mathcal{D}_{2j}^p\right\}$, где $\mathcal{D}_{1j}^p = Z_1^p \backslash j$, $\mathcal{D}_{2j}^p = j$.

4.2. После этих предварительных замечаний переходим непосредственно к доказательству Теоремы 1.4 в случае D). Мы проведем его индукцией по числу частиц $p = 2, 3, \dots, n$ применительно к следующим утверждениям

$$
\begin{aligned}
&a)\quad O^p(\alpha_{p-1}) = \{Y^p_{22}, \dots, Y^p_{2p}\}, \\
&b)\quad \mu_p^{\alpha_{p-1}} \in \sigma_d(H_0(\alpha_{p-1}; Y^p_{2j}))
\end{aligned}
\qquad 2 \le j \le p \tag{4.4}
$$

$$
\inf H_0^{\alpha_{p-1}}[Z^p_1] \in \sigma_d(H_0^{\alpha_{p-1}}[Z^p_1]), \tag{4.5}
$$

где в (4.4) $p = 2, 3, \dots, n$, в (4.5) $p = 2, 3, \dots, n-1$ и под $\alpha_{p-1}$ понимается *любой* тип н.п. группы $S_{p-1}$. Тогда соотношения (4.4) при $p = n$ дадут утверждение Теоремы 1.4.

Начнем с $p = 2$. Система $Z^2_1$ не обладает перестановочной симметрией; единственным распадением $Z^2_2$ является распадение $Y^2_{22} = \{(1), (2)\}$. Поэтому $O^2(\alpha_1) = \{Y^2_{22}\}$ и

$$
H_0(\alpha; Y^2_{22}) = T_{1\perp} + T_{2\perp}.
$$

Так как магнитное поле неограничено возрастает на бесконечности в плоскости $(x, y)$, то каждый из операторов $T_{j\perp}$ имеет чисто дискретный спектр. Следовательно,

$$
\mu_2^{\alpha_1} = \inf H_0(\alpha_1; Y^2_{22}) \in \sigma_d(H_0(\alpha_1; Y^2_{22})).
$$

Таким образом соотношения (4.4) при $p = 2$ доказаны.

Далее, пусть функция $\varphi = \varphi(q(Y^2_{22}))$ — нормированная собственная функция оператора $H_0(\alpha_1; Y^2_{22})$, отвечающая собственному значению $\mu_2^{\alpha_1}$, $f(\zeta)$ — произвольная гладкая нормированная функция, $\zeta = q_{13}[Z^2_1] - q_{23}[Z^2_1]$ и $\psi_t = \varphi\, f(t\zeta)\, t^{\frac{1}{2}}$, где $t > 0$ — параметр. Очевидно, $||\psi_t|| = 1$ и

$$
(H_0(Z^2_1)\psi_t, \psi_t) = \mu_2^{\alpha_1} + o(t^\gamma) - t^\gamma l,
$$

где $l > 0$. Поэтому при малом $t$

$$
(H_0(Z^2_1)\psi_t, \psi_t) < \mu_2^{\alpha_1}
$$

и, следовательно, $\inf H_0(Z^2_1) \in \sigma_d(H_0(Z^2_1))$. Таким образом, включение (4.5) при $p = 2$ также доказано. Предположим, что соотношения (4.4), (4.5) верны для $p = k \ge 2$ и докажем, что они верны и для $p = k+1$, если $k+1 < n$. При $k+1 = n$ мы докажем только (4.4); включение (4.5) при $k+1 = n$ в общем случае может и не выполняться (см. замечание в конце п. 4.4), но это и не важно, т.к. оно нужно лишь для следующего шага индукции, а при $p = n$ мы индукцию заканчиваем, ибо соотношения (4.4) при $p = n$ дают утверждение Теоремы 1.4.

4.3. Пусть $Z_2^{k+1} = \{C_1^{k+1}, C_2^{k+1}\}$, $1 \in C_1^{k+1}$, $|C_2^{k+1}| \geq 2$. Докажем, что

$$\inf H_0(\alpha_k; Z_2^{k+1}) > \mu_{k+1}^{\alpha_k}. \tag{4.6}$$

Отсюда и из соотношения (4.1) при $p = k+1$ будет следовать, что в множество $O^{k+1}(\alpha_k)$ входят только такие разбиения $Z_2^{k+1}$ для которых $|C_2^{k+1}| = 1$, т.е. $O^{k+1}(\alpha_k) = \{Y_{22}^{k+1}, \ldots, Y_{2,k+1}^{k+1}\}$ и, тем самым, равенство (4.4a) при $p = k+1$ будет доказано. Для упрощения обозначений в данном пункте полагаем $B_1 = C_1^{k+1}$, $B_2 = C_2^{k+1}$ и пусть $m = |B_1|$, $s = |B_2|$, $\alpha_{m-1}$ и $\alpha_s$ — произвольные типы н.п. групп $S[B_1]$ и $S[B_2]$. Тогда, аналогично (4.2)

$$\begin{aligned} H_0(\alpha; Z_2^{k+1}) = \sum_{(\alpha_{m-1},\alpha_s)\prec\alpha} & (H_0^{\alpha_{m-1}}[B_1] \otimes I^{\alpha_s}[B_2] + \\ & + H_0^{\alpha_s}[B_2] \otimes I^{\alpha_{m-1}}[B_1]). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Фиксируем такие $\alpha_{m-1}$, $\alpha_s$, что $(\alpha_{m-1}, \alpha_s) \prec \alpha$. Поскольку кластер $B_2$ состоит только из одноименно заряженных частиц и $|B_2| \geq 2$, то при $j \in B_2$

$$H_0[B_2] \geq H_0[B_2 \backslash j] \otimes I[j] + I[B_2 \backslash j] \otimes T_{j\perp}$$

и поэтому для $\forall \alpha'_{s-1}$, для которых $\mathfrak{M}_{\alpha'_{s-1}}^{\alpha_s} \geq 1$,

$$\inf H_0^{\alpha_s}[B_2] \geq \inf H_0^{\alpha'_{s-1}}[B_2 \backslash j] + \inf T_{j\perp}. \tag{4.8}$$

Пусть, далее, $\tilde{Z}_1^{m+1} = B_1 \cup j$, $\tilde{Z}_2^{m+1} = \{B_1, j\}$ и $\alpha_m$ таково, что $\mathfrak{M}_{\alpha_m}^{\alpha} \geq 1$, $\mathfrak{M}_{\alpha_{m-1}}^{\alpha_m} \geq 1$. Очевидно, $|\tilde{Z}_1^{m+1}| = m+1 \leq k$. Поэтому к системе $\tilde{Z}_1^{m+1}$ можно применить предположение индукции. В силу (4.4a) и (4.5) с $p = m + 1$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}_{m+1}^{\alpha_m} := \quad & \inf\{\lambda \mid \lambda \in \sigma_{ess}(H_0^{\alpha_m}[\tilde{Z}_1^{m+1}])\} = \inf H_0(\alpha_m; \tilde{Z}_2^{m+1}) \\
\text{и} \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.9) \\
& \inf H_0^{\alpha_m}[\tilde{Z}_1^{m+1}] \in \sigma_d(H_0^{\alpha_m}[\tilde{Z}_1^{m+1}]).
\end{aligned}
$$

Вследствие (4.9) и т.к. $\inf H_0(\alpha_m; \tilde{Z}_2^{m+1}) \leq \inf H_0^{\alpha_{m-1}}[B_1] + \inf T_{j\perp}$, имеем

$$
\inf H_0^{\alpha_m}[\tilde{Z}_1^{m+1}] < \inf H_0^{\alpha_{m-1}}[B_1] + \inf T_{j\perp}. \tag{4.10}
$$

Из неравенств (4.8), (4.10) вытекает оценка

$$
\begin{gathered}
\inf H_0^{\alpha_{m-1}}[B_1] + \inf H_0^{\alpha_s}[B_2] > \\
> \inf H_0^{\alpha_m}[B_1 \cup j] + \inf H_0^{\alpha'_{s-1}}[B_2 \backslash j],
\end{gathered} \tag{4.11}
$$

где $(\alpha_m, \alpha'_{s-1}) \prec \alpha_k$.

Рассмотрим $\hat{Z}_2^{k+1} = \{B_1 \cup j, B_2 \backslash j\} = \{C_1^{k+1} \cup j, C_2^{k+1} \backslash j\}$. Из (4.1) с $p = k + 1$, (4.7) и (4.11) следует, что при $|C_2^{k+1}| \geq 2$ выполняется

$$
\mu_{k+1}^{\alpha_k} := \inf H_0(\alpha_k; Z_2^{k+1}) > \inf H_0(\alpha_k; \hat{Z}_2^{k+1})
$$

и, значит, $Z_2^{k+1} \notin O^{k+1}(\alpha_k)$. Т.е. $O^{k+1}(\alpha_k) = \{Y_{22}^{k+1}, \ldots, Y_{2,k+1}^{k+1}\}$ и равенство (4.4a) при $p = k + 1$ доказано.

Далее, согласно предположению индукции, в силу (4.5) при $p = k$ число $\inf H_0^{\alpha_{k-1}}[Z_1^k]$ есть дискретное собственное значение этого оператора. Поэтому и т.к. оператор $T_{j\perp}$ имеет в $\mathcal{L}_2(R^2)$ чисто дискретный спектр (см. п. 4.2), число $\inf H_0^{\alpha_{k-1}}[Z_1^k] + \inf T_{j\perp}$ есть точка дискретного спектра оператора $H_0^{\alpha_{k-1}}[Z_1^k] + T_{j\perp}$ при любых $\alpha_{k-1}$ и $j \notin Z_1^k$. Следовательно,

$$
\begin{gathered}
\mu_{k+1}^{\alpha_k} := \inf H_0(\alpha_k; Y_{2,k+1}^{k+1}) = \\
\min\nolimits_{\alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} \prec \alpha_k} (\inf H_0^{\alpha_{k-1}}[Z_1^k] + \inf T_{k+1,\perp}) \in \sigma_d(H_0(\alpha_k; Y_{2,k+1}^{k+1})),
\end{gathered}
$$

т.е. (4.4b) доказано при $p = k + 1$. Отметим, что хотя доказано (4.4b) при $p = k + 1$ не для любых $Y_{2j}^{k+1}$ $j = 2, 3, \ldots, k +$

1, а только для $Y^{k+1}_{2,k+1}$, это не играет роли, т.к. все операторы $H_0(\alpha_k; Y^{k+1}_{2j})$ $\quad j = 2, 3, \ldots, k+1$ унитарно эквивалентны друг другу в силу тождественности частиц с номерами $j \geq 2$.

4.4. Для завершения индукции нам надо доказать соотношение (4.5) при $p = k + 1$. Общая идея этого доказательства практически та же, что и в [16], где рассматривались системы без магнитных полей. Однако в связи с тем, что в растущем магнитном поле — в отличии от ситуации без поля — $3^x$-мерные частицы ведут себя практически как одномерные, реализация идей [16] в рассматриваемой ситуации имеет ряд особенностей. Поэтому мы достаточно подробно описываем доказательство включения (4.5), отсылая к [16] только за деталями громоздких оценок.

Пусть $\alpha'_{k-1}$, $\quad \alpha'_{k-1} \prec \alpha_k$, — такой тип перестановочной симметрии системы $Z^k_1$, что

$$\mu^{\alpha_k}_{k+1} = \inf H_0^{\alpha'_{k-1}}[Z^k_1] + \inf T_{k+1,\perp}. \tag{4.12}$$

В силу (4.5) с $p = k$ $\inf H_0^{\alpha'_{k-1}}[Z^k_1] \in \sigma_d(H_0^{\alpha'_{k-1}}[Z^k_1])$. Обозначим через $\varphi = \varphi(q[Z^k_1])$ и $f = f(q_{k+1\perp})$ — нормированные собственные функции операторов $H_0^{\alpha'_{k-1}}[Z^k_1]$ и $T_{k+1\perp}$, отвечающие их наименьшим собственным значениям $\nu_0$ и $\lambda_0$. В силу (4.12)

$$\mu^{\alpha_k}_{k+1} = \nu_0 + \lambda_0 = ((H_0^{\alpha'_{k-1}}[Z^k_1] + T_{k+1,\perp})\varphi f, \varphi f).$$

Пусть $\zeta = \zeta(Z^{k+1}_2) = \sum\limits_{j=1}^{k} m_j q_{j3}[Z^{k+1}_1] M[Z^k_1]^{-1} - q_{k+1,3}[Z^{k+1}_1]$,

$\theta_1 = \theta_1(\zeta) \in C^2_0(R^1)$, $\theta_1(\zeta) \equiv 0$ при $|\zeta| \leq 1$, $||\theta_1|| = 1$, $\theta_t = t^{\frac{1}{2}}\theta_1(t\zeta)$, $t > 0$. Положим $\psi_t = \varphi f \theta_t$ и оценим норму $||P^{\alpha_k}\psi_k||$ при $t \ll 1$ и квадратичную форму $(H_0(Z^{k+1}_1)P^{\alpha_k}\psi_t, P^{\alpha_k}\psi_t)$. Предварительно вычислим $P^{\alpha_k}\psi_t$. Для этого запишем проектор $P^{\alpha_k}$ в виде

$$P^{\alpha_k} = \frac{|\alpha_k|}{k!} \sum_{g \in S_k} \overline{\chi}^{\alpha_k}_g T_g = P_1 + P_2,$$

где $P_1 = \frac{|\alpha_k|}{k!} \sum_{g \in S_{k-1}} \overline{\chi}_g^{\alpha_k} T_g =$

$$= \frac{|\alpha_k|}{k!} \sum_{\alpha''_{k-1} \prec \alpha_k} \mathfrak{M}^{\alpha_k}_{\alpha''_{k-1}} \sum_{g \in S_{k-1}} \overline{\chi}_g^{\alpha''_{k-1}} T_g =$$

$$= \frac{|\alpha_k|}{k!} \sum_{\alpha''_{k-1} \prec \alpha_k} \frac{(k-1)!}{|\alpha''_{k-1}|} \mathfrak{M}^{\alpha_k}_{\alpha''_{k-1}} P^{\alpha''_{k-1}},$$

$$P^{\alpha''_{k-1}} = \frac{|\alpha''_{k-1}|}{(k-1)!} \sum_{g \in S_{k-1}} \overline{\chi}_g^{\alpha''_{k-1}} T_g,$$

$P_2 = \frac{|\alpha_k|}{k!} \sum_{g \in S_k \setminus S_{k-1}} \overline{\chi}_g^{\alpha_k} T_g$, $\chi_g^{\beta}$ — характер элемента $g$ в представлении типа $\beta$. Очевидно, $P^{\alpha''_{k-1}}$ — проектор на подпространство функций перестановочной симметрии $\alpha''_{k-1}$. Согласно выбору функции $\varphi$

$$P^{\alpha''_{k-1}} \varphi = \delta_{\alpha'_{k-1}, \alpha''_{k-1}} \varphi,$$

где $= \delta_{\beta', \beta''}$ — символ Кронекера. Поэтому $P_1 \psi_t = l_0 \psi_t$, где $l_0$ — положительная константа. Выражение $P_2 \psi_t$ можно записать в следующем виде: $P_2 \psi_t = \sum_{j=2}^{k} f(q_{j\perp}) \theta_t(\zeta^{(j)}) \Phi_j$, где $\zeta^{(j)}$ получается из $\zeta$ перестановкой $q_{j3} \leftrightarrow q_{k+1,3}$, а каждая из функций $\Phi_j$ есть некоторая линейная комбинация функций, получающихся из функций $\varphi(q[Z_1^k]) \equiv \varphi(q_1[Z_1^k], \ldots, q_k[Z_1^k])$ следующим образом: в $\varphi$ вместо аргумента $q_j[Z_1^k]$ записывается $q_{k+1}$, а остальные аргументы (кроме $q_1[Z_1^k]$) переставляются произвольным образом. Далее, оператор $H_0[Z_1^{k+1}]$ запишем в виде

$$H_0[Z_1^{k+1}] = H_0[Z_1^k] + T_{k+1,\perp} + \\ + \sum_{i=1}^{k} e_i e |q_i[Z_1^k] + \zeta|^{-\gamma} - (M[Z_1^k]^{-1} + m^{-1}) \frac{d^2}{d\zeta^2} \tag{4.13}$$

Действуя почти так же, как в [16], мы получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned}&\Big(H_0[Z_1^{k+1}]\psi_t, \theta_t(\zeta^{(j)})f(q_{j\perp})\Phi_j\Big) = O(t^2),\\ &\Big(\psi_t, \theta_t(\zeta^{(j)})f(q_{j\perp})\Phi_j\Big) = O(t^2) \quad 2 \le j \le k\end{aligned} \tag{4.14a}$$

$$\Big(|q_s[Z_1^k] + \zeta|^{-\gamma}\psi_t, \psi_t\Big) = t^\gamma\left(\theta_1(\zeta)|\zeta|^{-\gamma}, \theta_1(\zeta)\right) + o(t^\gamma). \tag{4.14b}$$

Отметим, что для вывода (4.14) в схеме [16] надо дополнительно использовать квадратичную суммируемость функций

$$\varphi(q[Z_1^k])f(q_{k+1,\perp})|q[Z_1^k]|\,|q_{k+1,\perp}|.$$

Используя (4.13), (4.14) и известные свойства проекторов $P^{\alpha_k}$ имеем:

$$\begin{aligned}&(P^{\alpha_k}\psi_t, P^{\alpha_k}\psi_t) = (\psi_t, P^{\alpha_k}\psi_t) = (\psi_t, (P_1 + P_2)\psi_t) = l_0 + O(t^2)\\ &(H_0[Z_1^{k+1}]P^{\alpha_k}\psi_t, P^{\alpha_k}\psi_t) = \Big(H_0[Z_1^{k+1}]\psi_t, (P_1 + P_2)\psi_t\Big) = \\ &= l_0\mu^{\alpha_k}[Z_1^{k+1}] + t^\gamma(e_1e + (k-1)e^2)l_1 + o(t^\gamma),\end{aligned} \tag{4.15}$$

где $l_0 > 0, l_1 > 0$. Пусть $\hat{\psi}_t = P^{\alpha_k}\psi_t\|P^{\alpha_k}\psi_t\|^{-1}$. Тогда в силу (4.15)

$$(H_0[Z_1^{k+1}]\hat{\psi}_t, \hat{\psi}_t) = \mu^{\alpha_k}[Z_1^{k+1}] + t^\gamma(e_1e + (k-1)e^2)l_1l_0^{-1} + o(t^\gamma) \tag{4.16}$$

Если $k \le n-2$, то по условию $e_1e + (k-1)e^2 \le e_1e + (n-3)e^2 < 0$ и при малых $t$ из (4.16) следует, что

$$(H_0[Z_1^{k+1}]\hat{\psi}_t, \hat{\psi}_t) < \mu_{k+1}^{\alpha_k}.$$

Значит

$$\inf H_0^{\alpha_k}[Z_1^{k+1}] \in \sigma_d(H_0^{\alpha_k}[Z_1^{k+1}]),$$

т.е. (4.5) доказано для $p = k+1 \le n-1$.

Таким образом, действуя по индукции, мы можем доказать соотношения (4.4a,b) и (4.5) для $p = 2, 3, \dots, n-1$. После этого, используя соотношения (4.4a,b) и (4.5) с $p = n-1$, мы, следуя рассуждениям п. 4.3, доказываем (4.4a,b) для $p = n$, т.е. для рассматриваемой системы $Z_1$. Таким образом в случае D) Теорема 1.4 доказана полностью.

**Замечание.** *Мы не доказываем справедливость соотношения (4.5) для $p = n$, поскольку в предположении $ee_1 + (n-2)e^2 \leq 0$ оно может и не выполняться. Однако в силу соотношения (4.16) оно будет верно и для случая $p = n$ при более жестком условии $ee_1 + (n-2)e^2 < 0$ (случай нейтральных атомов, а также положительных {отрицательных} ионов обычных {экзотических} атомов).*

4.5. Рассмотрим теперь случай M), когда система $Z_1$ состоит из нейтральных атомов: $C_1' = (1, 2, \ldots, p)$, $C_2' = (p+1, \ldots, n)$. В случае если $C_1' \sim C_2'$, то $S[Z_1] = S_{n-2} \times S_2$, если $C_1' \not\sim C_2'$, то $S[Z_1] = S_{n-2}$ (см. п. 4.1). Пусть $\alpha$ — тип н.п. группы $S[Z_1]$, $\mu^\alpha = \inf \lambda$, $\lambda \in \sigma_{ess}(H_0^\alpha)$. По условию, $\mu^\alpha = \inf H_0(\alpha; Z_2)$ только для распадения $Z_2 = Z_2' = \{C_1', C_2'\}$ и для распадений, полученных из него с помощью перестановок из $S[Z_1]$.

По определению (см. п. 1.6)

$$H_0(\alpha; Z_2) = \sum_{\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_0 \prec \alpha} H_0^{\hat{\alpha}_0}(Z_2), \quad H_0^{\hat{\alpha}_0}(Z_2) = H_0(Z_2) P^{\hat{\alpha}_0}(Z_2).$$

Обозначим через $\alpha_{01}$, $\beta_{02}$ типы н.п. групп $S[C_1']$ и $S[C_2']$ и будем писать $(\alpha_{01}, \beta_{02}) \prec \hat{\alpha}_0$, если

$$\mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_0} \supseteq \mathcal{D}_{g_1}^{\alpha_{01}} \otimes \mathcal{D}_{g_2}^{\beta_{02}} \text{ при } g = g_1 g_2, \quad g_i \in S[C_i'], \quad i = 1, 2. \qquad (4.17)$$

При $C_1 \not\sim C_2'$ группа $\hat{S}(Z_2') = S(Z_2') = S[C_1'] \times S[C_2']$, в (4.17) вместо знака включения надо писать знак равенства и оператор $H_0^{\hat{\alpha}_0}(Z_2')$ запишется в виде

$$H_0^{\hat{\alpha}_0}(Z_2') = H_0^{\alpha_{01}}[C_1'] \otimes I^{\beta_{02}}[C_2'] + I^{\alpha_{01}}[C_1'] \otimes H_0^{\beta_{02}}[C_2'],$$

где $I^\delta[C]$ – единичный оператор в пространстве $P^\delta[C] \mathcal{L}_2(R_0[C])$, $(\delta, C) = (\alpha_{01}, C_1'), (\beta_{02}, C_2')$. В силу замечания в конце п. 4.4 (см.

выше) $\inf H_0^{\alpha_{01}}[C_1']$, $\inf H_0^{\beta_{02}}[C_2']$, а следовательно и $\inf H_0^{\hat{\alpha}_0}(Z_2')$, суть точки дискретного спектра этих операторов.
Поэтому $\inf H_0(\alpha; Z_2') \in \sigma_d(H_0(\alpha; Z_2'))$ и тем самым Теорема 1.4 в случае $C_1' \not\sim C_2'$ доказана.

4.6. Далее всюду предполагаем, что $C_1' \sim C_2'$. В этом случае группы $S[C_1']$ и $S[C_2']$ изоморфны группе $S_{p-1}$ перестановок $p-1$ элементов ($2p = n$) и, следовательно, имеют те же н.п., что и $S_{p-1}$. Мы будем обозначать типы н.п. группы $S_{p-1}$ буквами $\alpha_0$, $\beta_0$, и групп $S[C_i']$ — буквами $\alpha_{0i}$, $\beta_{0i}$, где $i = 1, 2$, считая, что $\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_0$, $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_0$ (т.е. индекс $i$ у $\alpha_{0i}$ или $\beta_{0i}$ указывает, что представление типа $\alpha_0$ или $\beta_0$ рассматривается именно для группы $S[C_i']$). Пара $(\alpha_{01}, \beta_{02})$ описывает тип н.п. подгруппы $S(Z_2') = S[C_1'] \times S[C_2']$ из $\hat{S}(Z_2')$, а соотношение $(\alpha_{01}, \beta_{02}) \prec \hat{\alpha}_0$ в силу (4.17) означает, что этот тип присутствует в ограничении представления типа $\hat{\alpha}_0$ группы $\hat{S}(Z_2')$ на подгруппу $S(Z_2')$. Соотношение (4.17) эквивалентно неравенству

$$\varkappa_1 = |S(Z_2')|^{-1} \sum_{g_1 \in S[C_1']} \sum_{g_2 \in S[C_2']} \chi_{g_1 g_2}^{\hat{\alpha}_0} \overline{\chi}_{g_1}^{\alpha_{01}} \overline{\chi}_{g_2}^{\beta_{02}} \geq 1 \tag{4.18}$$

Почти очевидно, что если $(\alpha_{01}, \beta_{02}) \prec \hat{\alpha}_0$, то и $(\beta_{01}, \alpha_{02}) \prec \hat{\alpha}_0$, то есть, что

$$\varkappa_2 = |S(Z_2')|^{-1} \sum_{g_1 \in S[C_1']} \sum_{g_2 \in S[C_2']} \chi_{g_1 g_2}^{\hat{\alpha}_0} \overline{\chi}_{g_1}^{\beta_{01}} \overline{\chi}_{g_2}^{\alpha_{02}} \geq 1 \tag{4.19}$$

Действительно, пусть $g_0$ — перестановка кластеров $C_1' \leftrightarrow C_2'$. Тогда перестановкам $g_{21} := g_0 g_1 g_0 \in S[C_2']$ и $g_1 \in S[C_1']$ отвечает одна и та же перестановка из $S_{p-1}$. Поэтому $\chi_{g_1}^{\alpha_{01}} = \chi_{g_{21}}^{\alpha_{02}}$. Аналогично для $g_{12} := g_0 g_2 g_0 \in S[C_1']$ и $g_2 \in S[C_2']$ имеем $\chi_{g_2}^{\beta_{02}} = \chi_{g_{12}}^{\beta_{01}}$. Кроме того, поскольку элемент $g_1 g_2 = g_2 g_1$ сопряжен с $g_0 g_2 g_1 g_0 = g_{12} g_{21}$, то $\chi_{g_1 g_2}^{\hat{\alpha}_0} = \chi_{g_{12} g_{21}}^{\hat{\alpha}_0}$. Учитывая это и замечая, что когда элементы $g_1$ и $g_2$ пробегают соответственно группы $S[C_1']$ и $S[C_2']$, то $g_{21}$ и $g_{12}$ пробегают $S[C_2']$ и $S[C_1']$, мы видим, что левые части неравенств (4.18) и (4.19) совпадают, и, значит, неравенства $\varkappa_2 \geq 1$ и $\varkappa_1 \geq 1$ эквивалентны.

В силу Леммы 3.3 [16] для функций $\psi \in P^{\hat{\alpha}_0}(Z_2')\mathcal{L}^2(R_0(Z_2'))$ выполняется равенство

$$\psi = \sum_{(\alpha_{01},\beta_{02})\prec\hat{\alpha}_0} P^{\alpha_{01}}[C_1']P^{\beta_{02}}[C_2']\psi \tag{4.20}$$

Соотношение (4.20) означает, что

$$P^{\hat{\alpha}_0}(Z_2')\mathcal{L}^2(R_0(Z_2')) \subseteq \mathcal{B}(\hat{\alpha}_0; C_1', C_2')$$

где

$$\mathcal{B}(\hat{\alpha}_0; C_1', C_2') =$$
$$= \sum_{(\alpha_{01},\beta_{02})\prec\hat{\alpha}_0} \overline{\{P^{\alpha_{01}}[C_1']\mathcal{L}^2(R_0[C_1']) \otimes P^{\beta_{02}}[C_2']\mathcal{L}^2(R_0[C_2'])\}}.$$

Обозначим через $\hat{\alpha}_0^-$ тип н.п. группы $\hat{S}(Z_2')$, матрицы которого определяются равенствами

$$\mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_0^-} = \mathcal{D}_g^{\hat{\alpha}_0} \text{ при } g \in S(Z_2'), \quad \mathcal{D}_{g_0}^{\hat{\alpha}_0^-} = -\mathcal{D}_{g_0}^{\hat{\alpha}_0}.$$

Пусть $\delta(\hat{\alpha}_0) = 1$ при $\hat{\alpha}_0 \neq \hat{\alpha}_0^-$ и $\delta(\hat{\alpha}_0) = 0$ при $\hat{\alpha}_0 = \hat{\alpha}_0^-$. Соотношения $(\alpha_{01}, \beta_{02}) \prec \alpha_0$ и $(\alpha_{01}, \beta_{02}) \prec \alpha_0^-$ — эквивалентны и, значит,

$$P^{\hat{\alpha}_0}\mathcal{L}_2(R_0(Z_2')) \oplus \delta(\hat{\alpha}_0)P^{\hat{\alpha}_0^-}\mathcal{L}_2(R_0(Z_2')) \subseteq \mathcal{B}(\hat{\alpha}_0; C_1', C_2'). \tag{4.21}$$

Обозначим ограничения оператора $H_0(Z_2')$ на пространство $\mathcal{B}(\hat{\alpha}_0; C_1', C_2')$ и пространство $(P^{\hat{\alpha}_0} + \delta(\hat{\alpha}_0)P^{\hat{\alpha}_0^-})\mathcal{L}_2(R_0(Z_2'))$ соответственно через $H_0^{\mathcal{B}}(Z_2')$ и $H_0(\hat{\alpha}_0; \hat{\alpha}_0^-)$. Очевидно,

$$H_0(\hat{\alpha}_0; \hat{\alpha}_0^-) = H_0^{\hat{\alpha}_0}(Z_2') + \delta(\hat{\alpha}_0)H_0^{\hat{\alpha}_0^-}(Z_2')$$

и в силу (4.21)

$$\sigma(H_0(\hat{\alpha}_0; \hat{\alpha}_0^-)) \subseteq \sigma(H_0^{\mathcal{B}}(Z_2')). \tag{4.22}$$

В свою очередь

$$\sigma(H_0^{\mathcal{B}}(Z_2')) = \bigcup_{(\alpha_{01},\beta_{02})\prec\hat{\alpha}_0}\{\lambda^{\alpha_{01}}+$$
$$+\lambda^{\beta_{02}} \mid \lambda^{\alpha_{01}} \in \sigma(H_0^{\alpha_{01}}[C_1']), \lambda^{\beta_{02}} \in \sigma(H_0^{\beta_{02}}[C_2'])\}.$$

4.7. Согласно замечанию, сделанному нами в конце п. 4.4 $\lambda_0^{\alpha_{01}}[C_1'] = \inf H_0^{\alpha_{01}}[C_1'] \in \sigma_d(H_0^{\alpha_{01}}[C_1'])$ и $\lambda_0^{\beta_{02}}[C_2'] = \inf H_0^{\beta_{02}}[C_2'] \in \sigma_d(H_0^{\beta_{02}}[C_2'])$ при любых $\alpha_{01}, \beta_{02}$. Поэтому

$$\nu_0 := \inf H_0^{\mathcal{B}}(Z_2') \in \sigma_d\left(H_0^{\mathcal{B}}(Z_2')\right) \tag{4.23}$$

Покажем, что

$$\nu_0 \in \sigma_p\left(H_0(\hat{\alpha}_0; \hat{\alpha}_0^-)\right) \tag{4.24}$$

Тогда из соотношений (4.22)–(4.24) будет следовать, что

$$\nu_0 = \inf H_0(\hat{\alpha}_0; \hat{\alpha}_0^-) \in \sigma_d\left(H_0(\hat{\alpha}_0; \hat{\alpha}_0^-)\right) \tag{4.25}$$

Пусть $\hat{\alpha}_0^0$ — тот из типов $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_0^-$, для которого

$$\inf H_0^{\hat{\alpha}_0^0}(Z_2') = \min\left\{\inf H_0^{\hat{\alpha}_0}(Z_2'), \inf H_0^{\hat{\alpha}_0^-}(Z_2')\right\} = \nu_0.$$

Тогда в силу (4.24)

$$\inf H_0^{\hat{\alpha}_0^0}(Z_2') \in \sigma_d(H_0^{\hat{\alpha}_0^0}(Z_2')) \tag{4.26}$$

Поскольку типы $\hat{\alpha}_0$ и $\hat{\alpha}_0^-$ н.п. группы $\hat{S}(Z_2')$ порождаются типом $\alpha$ н.п. группы $S[Z_1]$ только вместе ($\hat{\alpha}_0 \prec \alpha \leftrightarrow \hat{\alpha}_0^- \prec \alpha$, см. п. 1.5) и

$$H(\alpha; Z_2') = \sum_{\hat{\alpha}_0 \prec \alpha} H_0^{\hat{\alpha}_0}(Z_2'),$$

то утверждение Теоремы 1.4 в ситуации M) будет следовать из (4.26).

Нам остается доказать только включение (4.24). Пусть пара типов $(\alpha'_{01},\beta'_{02}) \prec \hat{\alpha}_0$ такова, что

$$\nu_0 = \lambda_0^{\alpha'_{01}}[C'_1] + \lambda_0^{\beta'_{02}}[C'_2]$$

и функции $u_1 = u_1^{\alpha'_{01}}(q[C'_1])$, $u_2 = u_2^{\beta'_{02}}(q[C'_2])$ принадлежат соответственно собственным подпространствам операторов $H_0^{\alpha'_{01}}[C'_1]$ и $H_0^{\beta'_{02}}[C'_2]$, отвечающим их наименьшим собственным значениям $\lambda_0^{\alpha'_{01}}[C'_1]$ и $\lambda_0^{\beta'_{02}}[C'_2]$. Тогда

$$H_0(Z'_2)u_1u_2 = \left(H_0[C'_1] + H_0[C'_2]\right) u_1u_2 = \nu_0 u_1u_2.$$

Поскольку оператор $H_0(Z'_2)$ коммутирует с операторами $T_g$, $g \in \hat{S}(Z'_2)$, то

$$P^{\hat{\alpha}_0} H_0(Z'_2)u_1u_2 = H_0(Z'_2)P^{\hat{\alpha}_0}u_1u_2 = \nu_0 P^{\hat{\alpha}_0}u_1u_2$$

и

$$P^{\hat{\alpha}_0^-} H_0(Z'_2)u_1u_2 = H_0(Z'_2)P^{\hat{\alpha}_0^-}u_1u_2 = \nu_0 P^{\hat{\alpha}_0^-}u_1u_2$$

Пусть $\Phi_1 = P^{\hat{\alpha}_0}u_1u_2$, $\Phi_2 = P^{\hat{\alpha}_0^-}u_1u_2$, $\Phi = \Phi_1 + \delta(\hat{\alpha}_0)\Phi_2$. Поскольку $\delta(\hat{\alpha}_0)H_0^{\hat{\alpha}_0}(Z'_2)\Phi_2 = \delta(\hat{\alpha}_0)H_0^{\hat{\alpha}_0^-}\Phi_1 \equiv 0$, то

$$H_0(\hat{\alpha}_0;\hat{\alpha}_0^-)\Phi = H_0^{\hat{\alpha}_0}(Z'_2)\Phi_1 + \delta(\hat{\alpha}_0)H_0^{\hat{\alpha}_0^-}(Z'_2)\Phi_2 = \nu_0\Phi \qquad (4.27)$$

Если $\|\Phi\| \neq 0$, то $\nu_0 \in \sigma_p\left(H_0(\hat{\alpha}_0;\hat{\alpha}_0^-)\right)$ и (4.24) доказано. Покажем, что $\Phi = l_3u_1u_2$, где $l_3 > 0$ — некоторая константа. С этой целью подставим в формулу для $\Phi$ выражения проекторов $P^{\hat{\alpha}_0}(Z'_2)$, $P^{\hat{\alpha}_0^-}(Z'_2)$. Тогда мы получим, что

$$\begin{aligned}\Phi = \tfrac{|\hat{\alpha}_0|}{|\hat{S}(Z'_2)|}\Big(&\textstyle\sum_{g\in S(Z'_2)}[1+\delta(\hat{\alpha}_0)]\bar{\chi}_g^{\hat{\alpha}_0}T_g + \\ &+\textstyle\sum_{g\in S(Z'_2)}(\bar{\chi}_{gg_0}^{\hat{\alpha}_0} + \delta(\hat{\alpha}_0)\bar{\chi}_{gg_0}^{\hat{\alpha}_0^-})T_{gg_0}\Big)u_1u_2.\end{aligned} \qquad (4.28)$$

По определению н.п. типа $\hat{\alpha}_0^-$, $\mathcal{D}_{gg_0}^{\hat{\alpha}_0^-} = -\mathcal{D}_{gg_0}^{\hat{\alpha}_0}$ и, значит, $\chi_{gg_0}^{\hat{\alpha}_0^-} = -\chi_{gg_0}^{\hat{\alpha}_0}$ при $g \in S(Z'_2)$. Поэтому $\chi_{gg_0}^{\hat{\alpha}_0^-} + \chi_{gg_0}^{\hat{\alpha}_0} = 0$, а при

$\hat{\alpha}_0^- = \hat{\alpha}_0$ кроме того $\chi_{gg_0}^{\hat{\alpha}_0^-} = -\chi_{gg_0}^{\hat{\alpha}_0} = 0$. Следовательно, каждое слагаемое во второй сумме в (4.28) равно нулю и, значит,

$$\Phi = \frac{|\hat{\alpha}_0|(1+\delta(\hat{\alpha}_0))}{|\hat{S}(Z_2')|} \sum_{g\in S(Z_2')} \bar{\chi}_g^{\hat{\alpha}_0} T_g u_1 u_2. \tag{4.29}$$

Далее, очевидно

$$\chi_g^{\hat{\alpha}_0} = \sum_{(\alpha_{01},\beta_{02})\prec\hat{\alpha}} \varkappa(\alpha_0,\beta_0)\chi_{g_1}^{\alpha_{01}}\chi_{g_2}^{\beta_{02}} \quad g = g_1 g_2, \quad g_i \in S[C_i'], \tag{4.30}$$

где $\varkappa(\alpha_0,\beta_0) := |S(Z_2')|^{-1} \sum_{i=1}^{2} \sum_{g_i\in S[C_i']} \chi_{g_1 g_2}^{\hat{\alpha}_0} \bar{\chi}_{g_1}^{\alpha_{01}} \bar{\chi}_{g_2}^{\beta_{02}} \geq 1$

при $(\alpha_{01},\beta_{02}) \prec \hat{\alpha}_0$.

Подставляя значение $\chi_g^{\hat{\alpha}_0}$ из (4.30) в (4.29) получаем

$$\begin{gathered}\Phi = l_2 \sum_{(\alpha_{01},\beta_{02})\prec\hat{\alpha}} |\alpha_{01}|^{-1}|\beta_{02}|^{-1}\varkappa(\alpha_0,\beta_0)\cdot \\ \cdot\left\{\frac{|\alpha_{01}|\,|\beta_{02}|}{S[C_1']S[C_2']} \sum_{i=1}^{2} \sum_{g_i\in S[C_i']} \bar{\chi}_{g_1}^{\alpha_{01}} \bar{\chi}_{g_2}^{\beta_{02}} T_{g_1} T_{g_2}\right\} u_1 u_2,\end{gathered} \tag{4.31}$$

где $l_2 = |S[C_1']|^2\, |\hat{S}(Z_2')|^{-1}(1+\delta(\hat{\alpha}_0))|\hat{\alpha}_0)|$. Выражение в фигурных скобках в равенстве (4.31) есть произведение проекторов $P^{\alpha_{01}}[C_1']P^{\beta_{02}}[C_2']$. Поэтому и т.к. $u_1 = P^{\alpha_{01}'}[C_1']u_1$, $u_2 = P^{\beta_{02}'}[C_2']u_2$, $P^{\alpha_{01}}P^{\alpha_{01}'} = 0$ при $\alpha_{01} \neq \alpha_{01}'$, $P^{\beta_{02}}P^{\beta_{02}'} = 0$ при $\beta_{02} \neq \beta_{02}'$, из (4.31) вытекает, что

$$\Phi = l_2\varkappa(\alpha_{01}',\beta_{02}')|\alpha_{01}'|^{-1}|\beta_{02}'|^{-1}u_1 u_2 \text{ и, значит, } ||\Phi|| > 0,$$

что и требовалось доказать.

## Литература


1. Вугальтер С. А., Жислин Г. М., ТМФ 97 (1993), N 1, 94–112.
2. Жислин Г. М., Алгебра и анализ, 8 (1996), N 1, 127–136.
3. Жислин Г. М., ТМФ, 107 (1996), N 3, 372–387.
4. Вугальтер С. А., Жислин Г. М. ТМФ, 113 (1997), N 3, 413–431.
5. Жислин Г. М. ТМФ, 118 (1999), N 1, 15–39.
6. J. E. Avron, J. W. Herbst, B. Simon, Ann. Phys., 114 (1978), New York, 431.
7. Вугальтер С. А., Жислин Г. М., ТМФ 32 (1977), N 1, 70–87.
8. Иврий В. Я., ДАН СССР, 276 (1984), N 2, 268–270.
9. W. Kirsch, B. Simon, Ann. Physics 183 (1988), no. 1, 122–130.
10. Вугальтер С. А., Жислин Г. М., Алгебра и анализ, 5 (1993), N 2, 108–125.
11. Вугальтер С. А., Жислин Г. М., Алгебра и анализ, 3 (1991), N 6, 119–155.
12. Вугальтер С. А., Жислин Г. М., ТМФ 55 (1983), N 1, 66–77.
13. J. E. Avron, J. W. Herbst, B. Simon, Duke Math. J., 45 (1978), 847.
14. Антонец М. А., Жислин Г. М., Шерешевский И. А., Приложение к книге К. Йоргенс, И. Вайдман "Спектральные свойства гамильтоновых операторов", Москва, "Мир", 1976.
15. Vugalter S. A., Zhislin G. M., ROMP, 19 (1984), 39–90.
16. Жислин Г. М. Извест. Акад. Наук, сер. матем., 33 (1969), 590–649.