Научно–исследовательский радиофизический институт
Министерства образования Российской Федерации

Препринт N 455

Начально-краевая задача для уравнений Максвелла с граничными условиями Леонтовича на неограниченной поверхности

М. А. Антонец,
Л. В. Пономарева

Нижний Новгород, 1999

Антонец М. А., Пономарева Л. В.
НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ЛЕОНТОВИЧА НА НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ // *Препринт N 455.* — Нижний Новгород: НИРФИ, 1999. 77 с.

УДК 517.43

В работе доказана однозначная разрешимость начально-краевой задачи для уравнений Максвелла и соответствующей краевой задачи в случае неограниченной граничной поверхности общего вида. Для этого использовано специальное представление решений краевой задачи для уравнений Максвелла с помощью решений некоторых интегро-дифференциальных (псевдодифференциальных) уравнений, однозначно определяющих граничные значения искомых решений уравнений Максвелла. Разрешимость граничных уравнений устанавливается методами теории псевдодифференциальных операторов.

Поддержано Грантом РФФИ 99-01-00078 и Грантом Мин. Образования РФ 95-0-21-77

Введение

Распространение высокочастотных электромагнитных волн в области пространства, ограниченной металлическим телом с плавной границей, описывается решениями начально-краевой задачи для уравнений Максвелла с краевыми условиями Леонтовича на границе тела (см., например, [1]):

$$[n, E] = \sqrt{\frac{\mu_{гр}}{\varepsilon_{гр}}}[n, [n, H]],$$

где n - внешняя нормаль к поверхности тела, $\varepsilon_{гр}$ и $\mu_{гр}$ - комплексная диэлектрическая и магнитная проницаемости тела.

Целью работы является анализ разрешимости начально-краевой задачи для уравнений Максвелла и соответствующей краевой задачи в случае неограниченной граничной поверхности вида $x_3 = f(x_1, x_2)$. В предлагаемой работе используется специальное представление для разрешающего оператора (резольвенты) краевой задачи, позволяющего выразить решения краевой задачи для уравнений Максвелла через решения интегро-дифференциальных (псевдодифференциальных) уравнений для некоторых вектор-функций взаимнооднозначно связанных с граничными значениями искомых решений уравнений Максвелла. Для получения этого представления резольвенты в работе используются методы теории расширений симметрических операторов, разработанной фон Нейманом (см. например [2]). Ранее этот подход был применен к изучению краевых задач для волнового уравнения [3] и изучении дискретного спектра оператора Шредингера для частицы в магнитном поле, контактно взаимодействующей с граничной поверхностью [4]. Заметим, что самосопряженные расширения оператора Максвелла, определяемые краевыми условиями другого вида на негладкой границе рассматривались в работах М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [5, 6].

Однозначная разрешимость краевой задачи для уравнений Максвелла с краевыми условиями Леонтовича в случае ограниченной граничной поверхности доказана другим методом в работах Д.Колтона и Р. Кресса (см. например, их монографию [7]).

Обзор численных методов, применяемых для решения этой задачи см. в [8] .

План работы:

в разделе 1 приведена операторная постановка задачи, основные теоремы и некоторые дополнительные сведения;

в разделе 2 рассматривается краевая задача для случая, когда металлом заполнено полупространство. Получена явная формула для разрешающего оператора (резольвенты) и оценки нормы этого оператора;

в разделе 3 для получения аналогичных результатов в случае граничной поверхности общего вида приходится рассматривать дифференциальные операторы с переменными коэффициентами, а для получения упомянутых оценок приходится применять методы теории псевдодифференциальных операторов и, в частности, конструкцию параметрикса — приближенного обратного оператора (см. [9, 10]).

Результаты работы были доложены на международном семинаре DAY ON DIFFRACTION'96 (Saint Petersburg, June 4–6, 1996), на международной конференции ASPECTS OF SPECTRAL THEORY: Operator methods in boundary value problems, Shroedinger operators (Vienna, July 15 to 18, 1996) и на XI Всероссийской конференции "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики" (Пущино, 5–9 октября 1996 г.).

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнения Максвелла при отсутствии пространственных зарядов

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{c}{\varepsilon}\operatorname{rot} H, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{c}{\mu}\operatorname{rot} E + j,$$
$$\operatorname{div} H = 0, \qquad \operatorname{div} E = 0$$

в случае, когда пространство R^3 разделено на две части гладкой поверхностью S, заданной уравнением

$$x_3 = f(x_1, x_2), \tag{1}$$

на которой выполняются импедансные граничные условия

$$E_\tau = Z\, H_\tau,$$

где E_τ, H_τ — касательные составляющие полей E, H, а Z — матрица импеданса.

Переформулируем эту краевую задачу на языке теории линейных операторов.

Запишем уравнения Максвелла в операторном виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \hat{M} v + \tilde{j}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} H = 0, \qquad \operatorname{div} E = 0,$$

где $\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{c}{\varepsilon}\operatorname{rot} \\ -\dfrac{c}{\mu}\operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix}$ — оператор Максвелла,

$$\tilde{j} = \{0, j\}, \quad v = \{E, H\}.$$

Заменой переменных

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \sqrt{\varepsilon} E, \\ \mathcal{H} = \sqrt{\mu} H \end{cases}$$

уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\hat{A}u + \vec{j}, \quad \text{где} \quad u = \{\mathcal{E}, \mathcal{H}\} \quad \text{и}$$

$$\hat{A} = \frac{ic}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{rot} \\ \operatorname{rot} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Очевидно, что $\hat{A}$ — симметрический оператор, а для полей $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ выполняются импедансные граничные условия с матрицей импеданса

$$\mathcal{Z} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} Z.$$

Для того, чтобы задать оператор, соответствующий рассматриваемой краевой задаче, введем необходимые определения.

Положим

$$\mathcal{S}(R^3|S) = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{S}(R^3), \operatorname{supp}\varphi \cap S = \emptyset\},$$

где $\mathcal{S}(R^3)$ — пространство основных функций Шварца на R^3.

Определим $L_2(R^3|S)$ как множество всех обобщенных функций из пространства Шварца $\mathcal{S}'(R^3)$ таких, что их ограничение на пространство $\mathcal{S}(R^3|S)$ непрерывно по норме $L_2(R^3)$.

Определим проекцию

$$\pi_S : L_2(R^3|S) \longrightarrow L_2(R^3),$$

сопоставляющую каждой обобщенной функции из $L_2(R^3|S)$ ее продолжение с множества $\mathcal{S}(R^3|S)$ до непрерывного линейного функционала из $L_2(R^3)$.

Положим для каждого элемента v из $L_2(R^3|S)$

$$[\sigma_\pm v](x_1, x_2) = [\pi_S v](x_1, x_2, f(x_1, x_2) \pm 0), \tag{4}$$

в том случае, когда пределы в правой части существуют в $L_2(R^2)$.

Для вектор-функции $w = \{w_1, w_2, w_3\}$ из $L_2^3(R^3|S)$ определим операторы $Q_\pm$, полагая

$$Q_\pm w = \{\sigma_\pm w_1^\tau, \sigma_\pm w_2^\tau\},$$

где $w^\tau = \{w_1^\tau, w_2^\tau\}$ - отогональная проекция вектора w на касательную плоскость к поверхности $x_3 = f(x_1, x_2)$.

Для матрицы импеданса

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{11} & \mathcal{Z}_{12} \\ \mathcal{Z}_{21} & \mathcal{Z}_{22} \end{pmatrix}$$

зададим область определения $\mathcal{D}(\hat{A}_{\mathcal{Z}})$ оператора $\hat{A}_{\mathcal{Z}}$ как множество всех вектор-функций

$$u \in L_2^6(R^3) = \{u = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \ : \ u_i \in L_2(R^3), \\ i = 1, 2, \ldots, 6\}$$

таких, что

1. $\hat{A}u \in L_2^6(R^3|S)$, где как и выше оператор $\hat{A}$ понимается в смысле теории обобщенных функций;

2. вектор-функции $Q_\pm \mathcal{E}$ и $Q_\pm \mathcal{H}$ существуют и удовлетворяют импедансным граничным условиям

$$\begin{aligned} Q_+\mathcal{E} &= \mathcal{Z}Q_+\mathcal{H} \\ Q_-\mathcal{E} &= -\mathcal{Z}Q_-\mathcal{H}. \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь оператор $\hat{A}_{\mathcal{Z}}$ мы можем определить на множестве $\mathcal{D}(\hat{A}_{\mathcal{Z}})$ соотношением

$$\hat{A}_{\mathcal{Z}} u = \pi_S \hat{A} u. \tag{6}$$

Рассматриваемая начально-краевая задача состоит в отыскании такого решения $u(t)$ уравнения

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = i\hat{A}_{\mathcal{Z}} u(t),$$

что

$$u(t) \in \mathcal{D}(\hat{A}_{\mathcal{Z}}) \qquad \text{для } t \geq 0,$$

а $u(0) = u_0$, где u_0 — заданная вектор-функция.

Используя методы теории операторных полугрупп, мы можем свести доказательство существования решений начально-краевой задачи к исследованию резольвенты

$$\hat{R}_Z(\lambda) = (\lambda I - \hat{A}_Z)^{-1}.$$

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть $\hat{A}_Z$ — оператор, определенный соотношением (6), где $Z = -bJ$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и для значений параметра λ с достаточно большой положительной мнимой частью функция $b = b(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:*

а) $|b| < c$, *где* $c = \mathrm{const}$;

б) $\mathrm{Re}\, b < b_0 < 0, \quad b_0 = \mathrm{const}$;

в) $|\mathrm{Re}\, b| \geq \theta |\mathrm{Im}\, b|$, *где* $\theta = \max\{1, \frac{|\mathrm{Re}\,\lambda|}{\mathrm{Im}\,\lambda}\}$.

Кроме того пусть все производные функции f достаточно малы по абсолютной величине.

Тогда для значений параметра λ с достаточно большой положительной мнимой частью резольвента $\hat{R}_Z(\lambda)$ оператора $\hat{A}_Z$ существует и удовлетворяет неравенству

$$\|\hat{R}_Z(\lambda)\| \leq c|\lambda|^2, \qquad \text{где } c = \mathrm{const}.$$

Из теоремы 3.2 и теоремы 1.5([11], стр.49) вытекает теорема существования решения начально-краевой задачи.

Теорема : *Пусть $\hat{A}_Z$ — оператор, определенный соотношением (6), где $Z = -bJ$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \mathrm{const}$, $b < 0$. Пусть все производные функции f малы по абсолютной величине.*

Тогда для любой вектор-функции u_0, принадлежащей области определения $\mathcal{D}(\hat{A}_Z^4)$ оператора $\hat{A}_Z^4$ существует единствен-

ное решение $u(t)$ начально-краевой задачи

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = i\hat{A}_Z u(t),$$

$$u(0) = u_0.$$

Замечание : *Вектор-функции $u(t)$ из $\mathscr{S}^6(R^3)$, обращающиеся в ноль в окрестности граничной поверхности S, принадлежат $\mathcal{D}(\hat{A}_Z^4)$.*

В дальнейшем нам потребуются явные выражения для резольвенты оператора Максвелла в однородном пространстве.

В качестве области определения оператора $\hat{A}$ в $L_2^6(R^3)$ возьмем пространство $\mathcal{D}(\hat{A}) = \mathscr{S}^6(R^3)$, где $\mathscr{S}^6(R^3)$ — пространство 6-мерных вектор-функций с компонентами из пространства основных функций Шварца $\mathscr{S}(R^3)$.

Резольвента оператора $\hat{A}$ имеет вид

$$\hat{R}(\lambda) = (\lambda I_6 - \hat{A})^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda I_3 & \dfrac{ic}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\,\mathrm{rot} \\ -\dfrac{ic}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\,\mathrm{rot} & \lambda I_3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2\lambda\hat{s}(\lambda) & -ai\,\mathrm{rot}\,\hat{s}(\lambda) \\ ai\,\mathrm{rot}\,\hat{s}(\lambda) & a^2\lambda\hat{s}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

где $\hat{s}(\lambda) = (a^2\lambda^2 I_3 - \mathrm{rot}^2)^{-1}$, $a = \dfrac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}$, а I_n — единичный оператор в пространстве n-мерных вектор-функций.

Оператор $\hat{s}(\lambda)$ можно выразить через резольвенту оператора Лапласа.

Действительно, из равенства

$$\mathrm{rot}^2 = -\Delta I_3 + \mathrm{grad}\,\mathrm{div},$$

следует, что

$$\hat{s}(\lambda) = ((a^2\lambda^2 + \Delta)I_3 - \mathrm{grad}\,\mathrm{div})^{-1} = \hat{r}(\lambda)(I_3 - \hat{r}(\lambda)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}))^{-1},$$

где $\hat{r}(\lambda) = (a^2\lambda^2 + \Delta)^{-1}$.

Для того, чтобы упростить последнее выражение воспользуемся преобразованием Фурье.

Пусть $\hat{\alpha} = \mathcal{F}\hat{r}(\lambda)\mathcal{F}^{-1}$, тогда

$$\mathcal{F}\hat{s}(\lambda)\mathcal{F}^{-1} = \hat{\alpha}(I_3 + \hat{\alpha}\, p \otimes p)^{-1},$$

где $\hat{\alpha}$ — оператор умножения на функцию $\alpha(p) = \dfrac{1}{a^2\lambda^2 - |p|^2}$, $\mathcal{F}$ — оператор преобразования Фурье.

Для произвольного вектора x из R^3 имеет место соотношение

$$[p \otimes p]x = (p, x)\, p = |p|^2 Q_p x,$$

где Q_p — оператор ортогонального проектирования на направление вектора p.

Поэтому

$$\mathcal{F}\hat{s}(\lambda)\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{a^2\lambda^2 - |p|^2}\left(\frac{1}{a^2\lambda^2 - |p|^2}\, p \otimes p + I_3\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{a^2\lambda^2 - |p|^2}(\beta(p)Q_p + I_3)^{-1}, \quad \text{где } \beta(p) = \frac{|p|^2}{a^2\lambda^2 - |p|^2}.$$

Так как $Q_p^n = Q_p$, то

$$(\beta(p)Q_p + I_3)^{-1} = I_3 + Q_p \sum_{n=1}^{\infty}(-\beta(p))^n = I_3 + Q_p \frac{-\beta(p)}{1 + \beta(p)},$$

и поэтому из соотношения

$$\frac{\beta(p)}{1 + \beta(p)} = \frac{|p|^2}{a^2\lambda^2},$$

следует, что

$$\mathcal{F}\hat{s}(\lambda)\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{a^2\lambda^2 - |p|^2}\left[I_3 - \frac{1}{a^2\lambda^2}|p|^2 Q_p\right].$$

Отсюда следует, что

$$\hat{s}(\lambda) = \left(\frac{1}{a^2\lambda^2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div} + I_3\right)(a^2\lambda^2 + \Delta)^{-1}.$$

Таким образом, получаем следующую формулу для резольвенты оператора $\hat{A}$:

$$\hat{R}(\lambda) = (\lambda I_6 - \hat{A})^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div} + a^2\lambda^2 I_3)\hat{r}(\lambda) & -ai\,\mathrm{rot}\,\hat{r}(\lambda) \\ ai\,\mathrm{rot}\,\hat{r}(\lambda) & \frac{1}{\lambda}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div} + a^2\lambda^2 I_3)\hat{r}(\lambda) \end{pmatrix},$$

где $\hat{r}(\lambda) = (a^2\lambda^2 + \Delta)^{-1}$.

Заметим, что этот оператор непрерывен в $L_2^6(R^3)$ если, и только если λ невещественное. При этом

$$\|\hat{R}(\lambda)\| \le \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|},$$

поскольку $\hat{A}$ — симметрический оператор.

2. Оператор Максвелла для случая импедансных условий на плоской границе

В этом разделе рассмотрим случай, когда функция f имеет вид $f(x_1, x_2) \equiv 0$, то есть пространство R^3 разделено на две части плоскостью $S = \{x \in R^3 : x = (x_1, x_2, x_3), x_3 = 0\}$, на которой заданы импедансные граничные условия (5).

В этом случае соотношения (4) принимают вид

$$[\sigma_\pm v](x_1, x_2) = [\pi_S v](x_1, x_2, \pm 0),$$

а операторы $Q_\pm$ задаются соотношениями

$$Q_\pm w = \{\sigma_\pm w_1, \sigma_\pm w_2\},$$

где вектор-функция $w = \{w_1, w_2, w_3\}$ принадлежит $L_2^3(R^3|S)$.

Для вычисления резольвенты $\hat{R}_Z(\lambda)$ определенного таким образом оператора $\hat{A}_Z$ воспользуемся теорией фон Неймана самосопряженных расширений симметрического оператора.

Определение. *Пусть $\mathcal{L}_0$ — пространство всех вектор-функций вида*

$$\varphi(x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_2, x_3) \\ \varphi_2(x_2, x_3) \end{pmatrix},$$

$$\textit{где} \qquad \varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix},$$

которые удовлетворяют условиям

$$(1-\Delta_{||})^{-\frac{1}{4}}\varphi \in L_2^4(R^2), \quad (1-\Delta_{||})^{-\frac{1}{4}} \operatorname{div} \varphi_i \in L_2(R^2), \quad i = 1, 2, \tag{7}$$

$$\textit{где} \qquad \Delta_{||} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

В пространстве $\mathcal{L}_0$ можно ввести норму

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}_0} = \left(\|(1-\Delta_{||})^{-\frac{1}{4}}\varphi\|^2_{L_2^4(R^2)} + \sum_{i=1}^{2} \|(1-\Delta_{||})^{-\frac{1}{4}} \operatorname{div} \varphi_i\|^2_{L_2(R^2)} \right)^{1/2}. \tag{8}$$

Введем оператор

$$Q_0 : \mathcal{S}^3(R^3) \longrightarrow \mathcal{S}^2(R^2),$$

полагая для вектор-функции $w = \{w_1, w_2, w_3\}$ из пространства $\mathcal{S}^3(R^3)$

$$[Q_0 w](x_1, x_2) = \{w_1(x_1, x_2, 0), w_2(x_1, x_2, 0)\}.$$

Оператор

$$Q_0^* : \mathcal{S}^2(R^2) \longrightarrow \mathcal{S}'^3(R^3)$$

определим на векторе $v = \{v_1, v_2\}$ из пространства $\mathcal{S}^2(R^2)$ с помощью соотношения

$$[Q_0^* v](x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2) \cdot \delta(x_3) \\ v_2(x_1, x_2) \cdot \delta(x_3) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\delta(x_3)$ — функция Дирака.

Теорема 2.1 . *Пусть оператор $\hat{A}_0$ определен дифференциальным выражением (3) на области*
$\mathcal{D}(\hat{A}_0) = \mathcal{S}^6(R^3|S)$, *тогда*

1) дефектное пространство $\mathfrak{N}^0_\lambda$ оператора $(\lambda I_6 - \hat{A}_0)$ изоморфно пространству $\mathcal{L}_0$, и произвольный элемент v_λ дефектного пространства $\mathfrak{N}^0_\lambda$ однозначным образом представим в виде

$$v_\lambda = \hat{R}(\bar{\lambda}) Q_0^* \varphi, \tag{9}$$

где $\varphi \in \mathcal{L}_0$.

2) для произвольной обобщенной вектор-функции
$v_\lambda = \{\mathcal{E}_\lambda, \mathcal{H}_\lambda\}$ *из $\mathfrak{N}^0_\lambda$ вне границы S выполняется соотношение*

$$\operatorname{div} \mathcal{E}_\lambda = \operatorname{div} \mathcal{H}_\lambda = 0.$$

Доказательство. Докажем утверждение 1).

Произвольный элемент дефектного пространства $\mathfrak{N}^0_\lambda$ ортогонален каждому элементу вида $(\lambda I_6 - \hat{A}_0)w$, $w \in \mathcal{D}(\hat{A}_0)$, то есть $(v_\lambda, (\lambda I_6 - \hat{A}_0)w) = 0$ для любого $w \in \mathcal{S}^6(R^3|S)$.

Отсюда, в силу симметричности оператора $\hat{A}_0$ следует, что в смысле теории обобщенных функций

$$< (\bar{\lambda} I_6 - \hat{A}) v_\lambda, \bar{w} >= 0.$$

Но это означает, что носитель обобщенной функции $(\bar{\lambda} I_6 - \hat{A}) v_\lambda$ принадлежит плоскости S, а значит

$$[(\bar{\lambda} I_6 - \hat{A}) v_\lambda](x_1, x_2, x_3) = \sum_{|j| \le N} \chi_j(x_1, x_2) \delta^{(j)}(x_3),$$

где $\quad \chi_j(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \chi_{j_1}(x_1,x_2) \\ \chi_{j_2}(x_1,x_2) \\ \chi_{j_3}(x_1,x_2) \\ \chi_{j_4}(x_1,x_2) \\ \chi_{j_5}(x_1,x_2) \\ \chi_{j_6}(x_1,x_2) \end{pmatrix}, \qquad \chi_{ji} \in \mathcal{S}(R^2).$

Следовательно,

$$v_\lambda = \hat{R}(\bar{\lambda}) \sum_{|j| \le N} \chi_j \cdot \delta^{(j)}.$$

Выясним теперь при каких значениях индекса j выполнено условие $\hat{R}(\bar{\lambda})\varphi\delta^{(j)} \in L_2^6(R^3)$ для вектор-функции φ из $\mathcal{S}^6(R^2)$.

Имеет место следующее соотношение

$$\hat{R}(\bar{\lambda})\varphi\delta^{(j)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\lambda}}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\bar{\lambda}^2 I_3)\hat{r}(\bar{\lambda})\varphi_1\delta^{(j)} - ai\operatorname{rot}\hat{r}(\bar{\lambda})\varphi_2\delta^{(j)} \\ \\ ai\operatorname{rot}\hat{r}(\bar{\lambda})\varphi_1\delta^{(j)} + \frac{1}{\bar{\lambda}}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\bar{\lambda}^2 I_3)\hat{r}(\bar{\lambda})\varphi_2\delta^{(j)} \end{pmatrix},$$

где обозначено

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{23} \end{pmatrix}.$$

Так как преобразование Фурье отличается от унитарного оператора лишь постоянным множителем, то необходимо и достаточно проверить условие

$$\|\mathcal{F}\hat{R}(\bar{\lambda})\varphi \cdot \delta^{(j)}\|_{L_2^6(R^3)} < \infty.$$

Поскольку

$$\mathcal{F}[\frac{1}{\bar\lambda}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\bar\lambda^2 I_3)(a^2\bar\lambda^2 + \triangle)^{-1}\varphi_1(x_1,x_2)\delta^{(j)}(x_3) -$$
$$-ai\operatorname{rot}(a^2\bar\lambda^2 + \triangle)^{-1}\varphi_2(x_1,x_2)\delta^{(j)}(x_3)] =$$
$$= \frac{1}{\bar\lambda}\cdot\frac{(-ip_3)^j}{a^2\bar\lambda^2 - |p|^2}\cdot$$
$$\cdot\begin{pmatrix} (a^2\bar\lambda^2 - p_1^2)\tilde\varphi_{11} - p_1p_2\tilde\varphi_{12} - p_1p_3\tilde\varphi_{13} + a\bar\lambda p_3\tilde\varphi_{22} - a\bar\lambda p_2\tilde\varphi_{23} \\ -p_1p_2\tilde\varphi_{11} + (a^2\bar\lambda^2 - p_2^2)\tilde\varphi_{12} - p_2p_3\tilde\varphi_{13} - a\bar\lambda p_3\tilde\varphi_{21} + a\bar\lambda p_1\tilde\varphi_{23} \\ -p_1p_3\tilde\varphi_{11} - p_2p_3\tilde\varphi_{12} + (a^2\bar\lambda^2 - p_3^2)\tilde\varphi_{13} + a\bar\lambda p_2\tilde\varphi_{21} - a\bar\lambda p_1\tilde\varphi_{22} \end{pmatrix}$$

и

$$\mathcal{F}[ai\operatorname{rot}(a^2\bar\lambda^2 + \triangle)^{-1}\varphi_1(x_1,x_2)\delta^{(j)}(x_3) +$$
$$+\frac{1}{\bar\lambda}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\bar\lambda^2 I_3)(a^2\bar\lambda^2 + \triangle)^{-1}\varphi_2(x_1,x_2)\delta^{(j)}(x_3)] =$$
$$= -\frac{1}{\bar\lambda}\cdot\frac{(-ip_3)^j}{a^2\bar\lambda^2 - |p|^2}\cdot$$
$$\cdot\begin{pmatrix} a\bar\lambda p_3\tilde\varphi_{12} - a\bar\lambda p_2\tilde\varphi_{13} - (a^2\bar\lambda^2 - p_1^2)\tilde\varphi_{21} + p_1p_2\tilde\varphi_{22} + p_1p_3\tilde\varphi_{23} \\ -a\bar\lambda p_3\tilde\varphi_{11} + a\bar\lambda p_1\tilde\varphi_{13} + p_1p_2\tilde\varphi_{21} - (a^2\bar\lambda^2 - p_2^2)\tilde\varphi_{22} + p_2p_3\tilde\varphi_{23} \\ a\bar\lambda p_2\tilde\varphi_{11} - a\bar\lambda p_1\tilde\varphi_{12} + p_1p_3\tilde\varphi_{21} + p_2p_3\tilde\varphi_{22} - (a^2\bar\lambda^2 - p_3^2)\tilde\varphi_{23} \end{pmatrix},$$

где $\tilde\varphi_{ij}$ - преобразование Фурье от φ_{ij}, то очевидно, что для принадлежности компонент полученного вектора пространству $L_2(R^3)$ необходимо выполнение условий

$$j = 0, \qquad \tilde\varphi_{13} \equiv 0, \qquad \tilde\varphi_{23} \equiv 0.$$

Таким образом, получаем, что произвольный вектор дефектного пространства $\mathfrak{N}^0_\lambda$ имеет вид

$$v_\lambda = \hat R(\bar\lambda)Q_0^*\varphi, \qquad \text{где} \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \end{pmatrix}.$$

Теперь покажем, что $v_\lambda \in L_2^6(R^3)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathcal{L}_0$, то есть выполняются условия (7).

Положим $\lambda = i\eta$, где $\eta > M > 0$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\|\mathcal{F}\hat{R}(-i\eta)Q_0^*\varphi\|^2_{L_2^6(R^3)} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |[\mathcal{F}\hat{R}(-i\eta)Q_0^*\varphi](p_1,p_2,p_3)|^2 dp_1\, dp_2\, dp_3 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |[\mathcal{F}\hat{R}(-i\eta)\mathcal{F}^{-1}v](p_1,p_2,p_3)|^2(p_1,p_2))\, dp_1\, dp_2\, dp_3,$$

где

$$v = \mathcal{F}Q_0^*\varphi,$$

или

$$v(p_1,p_2) = \begin{pmatrix} v_1(p_1,p_2) \\ \\ v_2(p_1,p_2) \end{pmatrix},$$

$$v_i(p_1,p_2) = [\mathcal{F}Q_0^*\varphi_i](p_1,p_2) = \begin{pmatrix} (\mathcal{F}\varphi_{i1})(p_1,p_2) \\ \\ (\mathcal{F}\varphi_{i2})(p_1,p_2) \\ \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$i = 1, 2.$$

Откуда

$$\|\mathcal{F}\hat{R}(-i\eta)Q_0^*\varphi\|^2_{L_2^6(R^3)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{D}v, v)_{R^6}\, dp_1\, dp_2,$$

где

$$\mathcal{D} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\hat{R}(i\eta)\hat{R}(-i\eta)\mathcal{F}^{-1}\, dp_3.$$

Применяя тождество Гильберта для произведения двух резольвент, получим

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2i\eta}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mathcal{F}\hat{R}(-i\eta)\mathcal{F}^{-1} - \mathcal{F}\hat{R}(i\eta)\mathcal{F}^{-1}\right)\, dp_3.$$

Так как у векторов v_1, v_2 последняя компонента нулевая, то

$$(\mathcal{D}v, v)_{R^6} = (\mathcal{B}u, u)_{R^4},$$

где u получается из v отбрасыванием третьей нулевой компоненты, а $\mathcal{B}$ получается из $\mathcal{D}$ вычеркиванием соответствующих строк и столбцов, то есть

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

$$u_i = \mathcal{F}\varphi_i = \begin{pmatrix} \mathcal{F}\varphi_{i1} \\ \\ \mathcal{F}\varphi_{i2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

и

$$\mathcal{B} = \int_{-\infty}^{\infty} B(p_1, p_2, p_3)\, dp_3,$$

где

$$B = \frac{1}{2i\eta(-a^2\eta^2 - |p|^2)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{i}{\eta}(-a^2\eta^2 I_2 - p_{||} \otimes p_{||}) & -ap_3 J \\ \\ ap_3 J & \frac{i}{\eta}(-a^2\eta^2 I_2 - p_{||} \otimes p_{||}) \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{1}{2i\eta(-a^2\eta^2 - |p|^2)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{i\eta}(-a^2\eta^2 I_2 - p_{||} \otimes p_{||}) & -ap_3 J \\ \\ ap_3 J & \frac{1}{i\eta}(-a^2\eta^2 I_2 - p_{||} \otimes p_{||}) \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и $\quad p_{||} = \{p_1, p_2\}.$

Таким образом,

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_1 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{B}_1 = \frac{a^2\eta^2 I_2 + p_{||}\otimes p_{||}}{\eta^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2\eta^2+|p|^2}\,dp_3.$$

А так как

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|p|^2+a^2\eta^2}\,dp_3 = \frac{\pi}{\sqrt{a^2\eta^2+|p_{||}|^2}},$$

то

$$B_1 = \frac{\pi a^2}{\sqrt{a^2\eta^2+|p_{||}|^2}}I_2 + \frac{\pi}{\eta^2\sqrt{a^2\eta^2+|p_{||}|^2}}p_{||}\otimes p_{||}.$$

Или

$$B_1 = \left(\frac{1+|p_{||}|^2}{a^2\eta^2+|p_{||}|^2}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{1+|p_{||}|^2}}I_2 + \frac{\pi}{\eta^2\sqrt{1+|p_{||}|^2}}p_{||}\otimes p_{||}\right).$$

Так как для достаточно больших положительных значений η очевидны следующие неравенства

$$\frac{1}{a\eta} < \left(\frac{1+|p_{||}|^2}{a^2\eta^2+|p_{||}|^2}\right)^{1/2} < 1,$$

то

$$\|\mathcal{F}\hat{R}(-i\eta)Q_0^*\varphi\|^2_{L_2^6(R^3)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}(B_1u_i,u_i)_{R_2}dp_1\,dp_2 =$$

$$= \gamma\cdot\frac{\pi}{\eta^2}\sum_{i=1}^{2}\|(1+|p_{||}|^2)^{-1/4}(p_{||},u_i)\|^2_{L_2^2(R^2)}+$$

$$+\gamma\cdot\pi a^2\|(1+|p_{||}|^2)^{-1/4}u\|^2_{L_2^4(R^2)}, \tag{10}$$

где

$$\frac{1}{a\eta} < \gamma < 1.$$

Отсюда следует, что для чисто мнимых значений параметра λ с достаточно большой положительной мнимой частью

$$\|\mathcal{F}\hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*\varphi\|^2_{L_2^6(R^3)} < \infty$$

тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathcal{L}_0$.

Пусть теперь $\lambda = \xi + i\eta$.

Очевидно

$$v_\lambda = \hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*\varphi = \hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta I - \hat{A})\hat{R}(\bar{i\eta})Q_0^*\varphi. \tag{11}$$

Поэтому

$$\|v_\lambda\| = \|\hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*\varphi\| \le \|\hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta I - \hat{A})\| \cdot \|\hat{R}(\bar{i\eta})Q_0^*\varphi\|.$$

Оценим норму функции

$$F(\hat{A}) = \hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta I - \hat{A}) = (\bar{\lambda}I - \hat{A})^{-1}(-i\eta I - \hat{A})$$

от самосопряженного оператора $\hat{A}$.

$$\|F(\hat{A})\| = \sup_\mu |F(\mu)|,$$

где

$$F(\mu) = \frac{-i\eta - \mu}{\xi - i\eta - \mu}.$$

Очевидно

$$\sup_\mu \left|\frac{-i\eta - \mu}{\xi - i\eta - \mu}\right| = \sqrt{\sup_\mu g(\mu)},$$

где

$$g(\mu) = \frac{(\mu + \xi)^2 + \eta^2}{\mu^2 + \eta^2}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$\sup_{\mu} g(\mu) = \frac{(\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2} + |\xi|)^2}{4\eta^2}.$$

Таким образом

$$\|\hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta I - \hat{A})\| = \frac{\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2} + |\xi|}{2\eta} \leq \frac{3|\lambda|}{2\operatorname{Im}\lambda}. \tag{12}$$

А значит, если φ удовлетворяет условиям (7), и $\operatorname{Im}\lambda > M$, то $v_\lambda \in L_2^6(R^3)$.

Обратно, пусть $v_\lambda \in L_2^6(R^3)$.

Из формулы (11) получаем

$$\hat{R}(-i\eta)Q_0^*\varphi = \left(\hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta - \hat{A})\right)^{-1} v_\lambda.$$

Откуда

$$\|\hat{R}(-i\eta)Q_0^*\varphi\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\|\hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta - \hat{A})\|}\|v_\lambda\| = \frac{2\eta}{\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2} + |\xi|}\|v_\lambda\|.$$

Учитывая (10), получим

$$\gamma \cdot \frac{\pi}{\eta^2} \sum_{i=1}^{2} \|(1 + |p_{||}|^2)^{-1/4}(p_{||}, u_i)\|^2_{L_2^2(R^2)} +$$

$$+\gamma \cdot \pi a^2 \|(1 + |p_{||}|^2)^{-1/4} u\|^2_{L_2^4(R^2)} <$$

$$< a\eta \|\hat{R}(-i\eta)Q_0^*\varphi\|.$$

Или

$$\gamma \cdot \frac{\pi}{\eta^2} \sum_{i=1}^{2} \|(1+|p_{\|}|^2)^{-1/4}(p_{\|}, u_i)\|^2_{L_2^2(R^2)} +$$

$$+\gamma \cdot \pi a^2 \|(1+|p_{\|}|^2)^{-1/4} u\|^2_{L_2^4(R^2)} \leq$$

$$\leq \frac{2a\eta^2}{\sqrt{\xi^2+4\eta^2}+|\xi|} \|v_\lambda\|.$$

Таким образом, если $\|v_\lambda\|_{L_2^6(R^3)} < \infty$, то выполняются условия (7), то есть $\varphi \in \mathcal{L}_0$.

Утверждение 1) доказано.

Докажем теперь утверждение 2).

Поскольку

$$\mathcal{E}_\lambda = \frac{1}{\bar\lambda}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\bar\lambda^2 I_3)(a^2\bar\lambda^2+\Delta)^{-1}Q_0^*\varphi_1(x_1,x_2)-$$
$$-ai\operatorname{rot}(a^2\bar\lambda^2+\Delta)^{-1}Q_0^*\varphi_2(x_1,x_2)$$

и

$$\mathcal{H}_\lambda = ai\operatorname{rot}(a^2\bar\lambda^2+\Delta)^{-1}Q_0^*\varphi_1(x_1,x_2)+$$
$$+\frac{1}{\bar\lambda}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\bar\lambda^2 I_3)(a^2\bar\lambda^2+\Delta)^{-1}Q_0^*\varphi_2(x_1,x_2),$$

то учитывая,что $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$ и $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\lambda^2 I_3)(a^2\lambda^2+\Delta)^{-1} = \operatorname{div}$, получим соотношения

$$\operatorname{div}\mathcal{E}_\lambda = \delta(x_3)\frac{1}{\bar\lambda}\operatorname{div}\varphi_1(x_1,x_2),$$

$$\operatorname{div}\mathcal{H}_\lambda = \delta(x_3)\frac{1}{\bar\lambda}\operatorname{div}\varphi_2(x_1,x_2).$$

Из которых следует утверждение 2).

Теорема доказана.

Теперь нашей целью является получение формулы, выражающей резольвенту краевой задачи через резольвенту задачи в безграничном пространстве и операторы $\hat m_\pm(\lambda)$ в пространстве

$\mathcal{L}_0$ вектор-функций на границе, которые определяются следующим образом

$$\hat{m}_+(\lambda) = Q_+\hat{R}(\lambda)Q_0^*,$$
$$\hat{m}_-(\lambda) = Q_-\hat{R}(\lambda)Q_0^*. \tag{13}$$

Предложение 2.1. *Пусть λ невещественное, тогда операторы $\hat{m}_\pm$ непрерывны в $\mathcal{S}^4(R^2)$ и имеют вид*

$$\hat{m}_\pm(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{m}_1(\lambda) & \pm\hat{m}_2(\lambda) \\ \mp\hat{m}_2(\lambda) & \hat{m}_1(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где

$$\mathcal{F}\hat{m}_1(\lambda)\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\lambda\sqrt{p_1^2+p_2^2-a^2\lambda^2}} \begin{pmatrix} -a^2\lambda^2+p_1^2 & p_1p_2 \\ p_1p_2 & -a^2\lambda^2+p_2^2 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\mathcal{F}\hat{m}_2(\lambda)\mathcal{F}^{-1} = \frac{ai}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Доказательство. Вычислим операторы $\hat{m}_\pm(\lambda)$. Для этого применим преобразование Фурье $\mathcal{F}_2$ по переменным x_1 и x_2.

Очевидно,

$$\mathcal{F}_2\hat{R}(\lambda)\mathcal{F}_2^{-1} = \frac{1}{\lambda}(a^2\lambda^2 - p_1^2 - p_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})^{-1}\times$$

$$
\times \begin{pmatrix}
a^2\lambda^2 - p_1^2 & -p_1p_2 & -ip_1\dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 & a\lambda i\dfrac{\partial}{\partial x_3} & -a\lambda p_2 \\
-p_1p_2 & a^2\lambda^2 - p_2^2 & -ip_2\dfrac{\partial}{\partial x_3} & -a\lambda i\dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 & a\lambda p_1 \\
-ip_1\dfrac{\partial}{\partial x_3} & -ip_2\dfrac{\partial}{\partial x_3} & a^2\lambda^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} & a\lambda p_2 & -a\lambda p_1 & 0 \\
0 & -a\lambda i\dfrac{\partial}{\partial x_3} & a\lambda p_2 & a^2\lambda^2 - p_1^2 & -p_1p_2 & -ip_1\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\
a\lambda i\dfrac{\partial}{\partial x_3} & 0 & -a\lambda p_1 & -p_1p_2 & a^2\lambda^2 - p_2^2 & -ip_2\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\
-a\lambda p_2 & a\lambda p_1 & 0 & -ip_1\dfrac{\partial}{\partial x_3} & -ip_2\dfrac{\partial}{\partial x_3} & a^2\lambda^2 + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}
\end{pmatrix}
$$

и

$$
Q_0^*\chi = \begin{pmatrix} \chi_{11}(x_1,x_2)\delta(x_3) \\ \chi_{12}(x_1,x_2)\delta(x_3) \\ 0 \\ \chi_{21}(x_1,x_2)\delta(x_3) \\ \chi_{22}(x_1,x_2)\delta(x_3) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{F}_2 Q_0^*\chi = \begin{pmatrix} \tilde\chi_{11}(p_1,p_2)\delta(x_3) \\ \tilde\chi_{12}(p_1,p_2)\delta(x_3) \\ 0 \\ \tilde\chi_{21}(p_1,p_2)\delta(x_3) \\ \tilde\chi_{22}(p_1,p_2)\delta(x_3) \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Тогда

$$\mathcal{F}_2\hat{R}(\lambda)Q_0^*\chi = \frac{1}{\lambda}(a^2\lambda^2 - p_1^2 - p_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})^{-1}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} a\lambda i\tilde{\chi}_{22}\delta'(x_3) + ((a^2\lambda^2 - p_1^2)\tilde{\chi}_{11} - p_1p_2\tilde{\chi}_{12})\delta(x_3) \\ -a\lambda i\tilde{\chi}_{21}\delta'(x_3) + (-p_1p_2\tilde{\chi}_{11} + (a^2\lambda^2 - p_2^2)\tilde{\chi}_{12})\delta(x_3) \\ -(ip_1\tilde{\chi}_{11} + ip_2\tilde{\chi}_{12})\delta'(x_3) + (a\lambda p_2\tilde{\chi}_{21} - a\lambda p_1\tilde{\chi}_{22})\delta(x_3) \\ -a\lambda i\tilde{\chi}_{12}\delta'(x_3) + ((a^2\lambda^2 - p_1^2)\tilde{\chi}_{21} - p_1p_2\tilde{\chi}_{22})\delta(x_3) \\ a\lambda i\tilde{\chi}_{11}\delta'(x_3) + (-p_1p_2\tilde{\chi}_{21} + (a^2\lambda^2 - p_2^2)\tilde{\chi}_{22})\delta(x_3) \\ -(ip_1\tilde{\chi}_{21} + ip_2\tilde{\chi}_{22})\delta'(x_3) + (-a\lambda p_2\tilde{\chi}_{11} + a\lambda p_1\tilde{\chi}_{12})\delta(x_3) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$\hat{R}_1(\gamma) = (\gamma + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})^{-1}, \quad \text{где} \quad \gamma = a^2\lambda^2 - p_1^2 - p_2^2.$$

Для произвольной основной функции f

$$\hat{R}_1(\gamma)f(x_3) = (\gamma + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})^{-1}f(x_3) =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{-\gamma}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{-\gamma}|s - x_3|} f(s)ds,$$

и поэтому

$$\hat{R}_1(\gamma)\delta = -\frac{1}{2\sqrt{-\gamma}}e^{-\sqrt{-\gamma}|x_3|}, \ \mathrm{Re}\sqrt{-\gamma} > 0.$$

Далее,

$$< \hat{R}_1(\gamma)\delta'(x_3), \psi > = < \delta'(x_3), \hat{R}_1(\gamma)\psi > = - < \delta(x_3), (\hat{R}_1(\gamma)\psi)'_{x_3} >$$

$$(\hat{R}_1(\gamma)\psi)'_{x_3} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(s - x_3)e^{-\sqrt{-\gamma}|s - x_3|}\,\psi(s)ds,$$

и

$$<\delta, (\hat{R}_1(\gamma)\psi)'_{x_3}>= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sign}(s)e^{-\sqrt{-\gamma}|s|}\,\psi(s)ds.$$

Следовательно,

$$\hat{R}_1(\gamma)\delta' = \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(x_3)e^{-\sqrt{-\gamma}|x_3|}.$$

Поэтому

$$\mathcal{F}_2\hat{R}(\lambda)Q_0^*\varphi =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\cdot\begin{pmatrix} a\lambda i\tilde{\chi}_{22} \\ -a\lambda i\tilde{\chi}_{21} \\ -ip_1\tilde{\chi}_{11} - ip_2\tilde{\chi}_{12} \\ -a\lambda i\tilde{\chi}_{12} \\ a\lambda i\tilde{\chi}_{11} \\ -ip_1\tilde{\chi}_{21} - ip_2\tilde{\chi}_{22} \end{pmatrix}\cdot\frac{\mathrm{sign}(x_3)}{2}e^{-\sqrt{p_1^2+p_2^2-a^2\lambda^2}|x_3|}+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\cdot\begin{pmatrix} (p_1^2 - a^2\lambda^2)\tilde{\chi}_{11} + p_1p_2\tilde{\chi}_{12} \\ p_1p_2\tilde{\chi}_{11} + (p_2^2 - a^2\lambda^2)\tilde{\chi}_{12} \\ -a\lambda p_2\tilde{\chi}_{21} + a\lambda p_1\tilde{\chi}_{22} \\ (p_1^2 - a^2\lambda^2)\tilde{\chi}_{21} + p_1p_2\tilde{\chi}_{22} \\ p_1p_2\tilde{\chi}_{21} + (p_2^2 - a^2\lambda^2)\tilde{\chi}_{22} \\ a\lambda p_2\tilde{\chi}_{11} - a\lambda p_1\tilde{\chi}_{12} \end{pmatrix}\cdot\frac{e^{-\sqrt{p_1^2+p_2^2-a^2\lambda^2}|x_3|}}{2\sqrt{p_1^2+p_2^2-a^2\lambda^2}}. \tag{17}$$

Таким образом получаем

$$\mathcal{F}_2\hat{m}_\pm(\lambda)\mathcal{F}_2^{-1} = Q_\pm\mathcal{F}_2\hat{R}(\lambda)Q_0^*\varphi =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\cdot\begin{pmatrix} \dfrac{-a^2\lambda^2+p_1^2}{2d(\lambda,p)} & \dfrac{p_1p_2}{2d(\lambda,p)} & 0 & \pm\dfrac{a\lambda i}{2} \\[3ex] \dfrac{p_1p_2}{2d(\lambda,p)} & \dfrac{-a^2\lambda^2+p_2^2}{2d(\lambda,p)} & \mp\dfrac{a\lambda i}{2} & 0 \\[3ex] 0 & \mp\dfrac{a\lambda i}{2} & \dfrac{-a^2\lambda^2+p_1^2}{2d(\lambda,p)} & \dfrac{p_1p_2}{2} \\[3ex] \pm\dfrac{a\lambda i}{2} & 0 & \dfrac{p_1p_2}{2d(\lambda,p)} & \dfrac{-a^2\lambda^2+p_2^2}{2d(\lambda,p)} \end{pmatrix},$$

где $d(\lambda,p) = \sqrt{p_1^2+p_2^2-a^2\lambda^2}$.

То есть операторы $\hat{m}_\pm(\lambda)$ действительно имеют блочную структуру, описываемую соотношениями (14)–(16).

Предложение 2.1 доказано.

Теорема 2.2.

1) Если операторы $(\hat{m}_1(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$ *и* $(\hat{m}_1(\lambda)-\mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$ *существуют и равномерно ограничены, то резольвента* $\hat{R}_\mathcal{Z}(\lambda)$ *оператора* $\hat{A}_\mathcal{Z}$ *существует и представима в виде*

$$\hat{R}_\mathcal{Z}(\lambda) = \hat{R}(\lambda) - \hat{R}(\lambda)Q_0^*\hat{C}(\lambda)Q_0\hat{R}(\lambda), \tag{18}$$

где

$$\hat{C}(\lambda) = \begin{pmatrix} (\hat{m}_1(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1} & 0 \\ 0 & (\hat{m}_1(\lambda)-\mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_2(\lambda))^{-1} \end{pmatrix}.$$

2) В случае граничных условий Леонтовича, которым соответствует импедансная матрица

$$\mathcal{Z} = -bJ, \qquad \text{где} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

и для значений параметра λ с достаточно большой положительной мнимой частью операторы $(\hat{m}_1(\lambda) + \mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$ и $(\hat{m}_1(\lambda) - \mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$ существуют и равномерно ограничены, если при указанных значениях параметра λ выполнены следующие условия для $b = b(\lambda)$.

$$
\begin{array}{lll}
a) & |b| < c, \ \textit{где } c = \text{const}; & \\
б) & \operatorname{Re} b < b_0 < 0, \ \textit{где } b_0 = \text{const}; & (20)\\
в) & |\operatorname{Re} b| \geq \theta |\operatorname{Im} b|, \ \textit{где } \theta = \max\{1, \dfrac{|\operatorname{Re}\lambda|}{\operatorname{Im}\lambda}\}. &
\end{array}
$$

При этом имеет место следующая оценка для нормы резольвенты $\hat{R}_{\mathcal{Z}}(\lambda)$

$$\|\hat{R}_{\mathcal{Z}}(\lambda)\| \leq c|\lambda|^2, \quad \textit{где} \quad c = const.$$

Замечание 1: *Граничным условиям Леонтовича на металлической поверхности соответствует $b = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\text{гр}}\varepsilon}{\mu_{\text{гр}}\mu}}$, где $\operatorname{Re} b < 0$, $\mu_{\text{гр}}$ - вещественная постоянная, а $\varepsilon_{\text{гр}} = 1 - i\dfrac{2\pi\sigma}{\lambda}$, $\sigma = const$.*

Покажем, что в этом случае функция $b(\lambda)$ удовлетворяет условиям а)-в).

Очевидно

$$|b| \longrightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu\mu_{\text{гр}}}},$$

если $|\lambda| \longrightarrow \infty$, а значит выполнено условие а).

Условие б) обеспечивается выбором ветви квадратного корня.

Таким образом,

$$\operatorname{Re} b = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\frac{|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\operatorname{Im}\lambda + \sqrt{(|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\operatorname{Im}\lambda)^2 + (2\pi\sigma\operatorname{Re}\lambda)^2}}{2\mu_{\text{гр}}|\lambda|^2}},$$

$$\mathrm{Im}b = \mathrm{sign}\,\mathrm{Re}\lambda\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{-|\lambda|^2 + 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda + \sqrt{(|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda)^2 + (2\pi\sigma\mathrm{Re}\lambda)^2}}{2\mu_{rp}|\lambda|^2}}.$$

А так как при достаточно больших значениях $\mathrm{Im}\lambda$ (именно при $\mathrm{Im}\lambda > 2\pi\sigma$)

$$|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda = (\mathrm{Re}\lambda)^2 + \mathrm{Im}\lambda(\mathrm{Im}\lambda - 2\pi\sigma) \geq 0,$$

$$\text{то} \qquad |\mathrm{Re}b| \geq |\mathrm{Im}b|.$$

Покажем, что

$$|\mathrm{Re}\,b| \geq \frac{|\mathrm{Re}\,\lambda|}{\mathrm{Im}\,\lambda}|\mathrm{Im}\,b|.$$

Для этого оценим знак разности

$$\mathrm{Im}\lambda\,|\mathrm{Re}b| - |\mathrm{Re}\lambda|\,|\mathrm{Im}b|.$$

Очевидно знак этого выражения совпадает со знаком выражения

$$(\mathrm{Im}\lambda)^2(\mathrm{Re}b)^2 - (\mathrm{Re}\lambda)^2(\mathrm{Im}b)^2 =$$
$$= \frac{(\mathrm{Im}\lambda)^2}{2\mu_{rp}|\lambda|^2}\left(|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda + \sqrt{(|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda)^2 + (2\pi\sigma\mathrm{Re}\lambda)^2}\right) -$$
$$-\frac{(\mathrm{Re}\lambda)^2}{2\mu_{rp}|\lambda|^2}\left(-|\lambda|^2 + 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda + \sqrt{(|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda)^2 + (2\pi\sigma\mathrm{Re}\lambda)^2}\right).$$

Очевидно

$$(\mathrm{Im}\lambda)^2(\mathrm{Re}b)^2 - (\mathrm{Re}\lambda)^2(\mathrm{Im}b)^2 =$$
$$= \frac{1}{2\mu_{rp}|\lambda|^2}\Big(|\lambda|^4 - 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda|\lambda|^2 +$$
$$+|\lambda|^2\sqrt{(|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda)^2 + (2\pi\sigma\mathrm{Re}\lambda)^2} -$$
$$-2(\mathrm{Re}\lambda)^2\sqrt{(|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda)^2 + (2\pi\sigma\mathrm{Re}\lambda)^2}\Big).$$

Так как

$$|\lambda||\mathrm{Re}\lambda| \leq \sqrt{(|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda)^2 + (2\pi\sigma\mathrm{Re}\lambda)^2} \leq |\lambda|^2,$$

то

$$(\mathrm{Im}\lambda)^2(\mathrm{Re}b)^2 - (\mathrm{Re}\lambda)^2(\mathrm{Im}b)^2 \geq$$
$$\geq \frac{1}{2\mu_{гр}|\lambda|^2}\left(|\lambda|^2(|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda) + |\lambda|^3|\mathrm{Re}\lambda| - 2(\mathrm{Re}\lambda)^2|\lambda|^2\right).$$

Учитывая, что

$$|\lambda|^2 - 2\pi\sigma\mathrm{Im}\lambda \geq (\mathrm{Re}\lambda)^2 \quad \text{и} \quad |\lambda| > |\mathrm{Re}\lambda|,$$

получим

$$(\mathrm{Im}\lambda)^2(\mathrm{Re}b)^2 - (\mathrm{Re}\lambda)^2(\mathrm{Im}b)^2 \geq$$
$$\geq \frac{1}{2\mu_{гр}|\lambda|^2}\left(|\lambda|\cdot(\mathrm{Re}\lambda)^2 + |\lambda|\cdot(\mathrm{Re}\lambda)^2 - 2|\lambda|\cdot(\mathrm{Re}\lambda)^2\right).$$

То есть

$$(\mathrm{Im}\lambda)^2(\mathrm{Re}b)^2 - (\mathrm{Re}\lambda)^2(\mathrm{Im}b)^2 \geq 0.$$

Откуда вытекает, что

$$|\mathrm{Re}\, b| \geq \frac{|\mathrm{Re}\,\lambda|}{\mathrm{Im}\,\lambda}|\mathrm{Im}\, b|.$$

А значит, утверждение в) верно.

Таким образом для граничных условий Леонтовича на металлической поверхности выполняются условия теоремы 2.2.

Замечание 2: *Очевидно, условия теоремы 2.2 выполняются и для вещественной отрицательной постоянной:*

$$b < 0, \qquad b = \mathrm{const}.$$

Доказательство. 1) По теореме фон Неймана, каждое самосопряженное расширение оператора $\hat{A}_0$ однозначно определяется некоторым изометрическим оператором

$$\hat{V}(\lambda) : \mathfrak{N}^0_\lambda \longrightarrow \mathfrak{N}^0_{\bar{\lambda}}.$$

Любой элемент из области определения этого расширения имеет вид

$$u = u_0 + v_\lambda - \hat{V}(\lambda)v_\lambda \tag{21}$$

и переводится этим расширением $\hat{A}_V$ в вектор

$$\hat{A}_V u = \hat{A}_0 u_0 + \bar{\lambda} v_\lambda - \lambda \hat{V}(\lambda) v_\lambda. \tag{22}$$

Но мы покажем ниже, что эту конструкцию можно применить для построения некоторых несамосопряженных расширений, отвечающих неизометрическим операторам $\hat{V}(\lambda)$.

Поскольку $\hat{R}(\lambda)Q_0^*$ является изоморфизмом, то для любого ограниченного оператора $\hat{V}(\lambda)$ оператор

$$\hat{K}(\lambda) = (Q_0^*)^{-1}(\lambda I_6 - \hat{A})\hat{V}(\lambda)\hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*$$

ограничен в пространстве $\mathcal{L}_0$.

Поэтому соотношения (21), (22) можно записать следующим образом

$$u = u_0 + \hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*\chi - \hat{R}(\lambda)Q_0^*\hat{K}(\lambda)\chi, \tag{23}$$

$$\hat{A}_K u = \hat{A}_0 u_0 + \bar{\lambda}\hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*\chi - \lambda\hat{R}(\lambda)Q_0^*\hat{K}(\lambda)\chi, \tag{24}$$

где $\chi \in \mathcal{L}_0$.

Лемма 2.1. *Пусть $\hat{K}(\lambda)$ — ограниченный оператор в пространстве $\mathcal{L}_0$, тогда для любого невещественного λ резольвента оператора $\hat{A}_K$ существует и имеет вид*

$$\hat{R}_K(\lambda) = \hat{R}(\lambda)[I_6 + \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} Q_0^*(I_4 - \hat{K}(\lambda))(\dot{Q}_0^*)^{-1}(\bar{\lambda} I_6 - \hat{A})\hat{P}_\lambda]. \tag{25}$$

Доказательство. Для построения резольвенты $\hat{R}_K(\lambda)$ мы должны решить уравнение

$$(\lambda I_6 - \hat{A}_K)u = f$$

для произвольного $f \in L_2(R^3)^6$.

Это уравнение можно переписать в виде

$$(\lambda I_6 - \hat{A})u_0 + (\lambda - \bar{\lambda})\hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*\varphi = f.$$

Применяя к обеим частям уравнения проектор $\hat{P}_\lambda$ на дефектное пространство $\mathfrak{N}^0{}_\lambda$, получим новое соотношение

$$(\lambda - \bar{\lambda})\hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*\varphi = \hat{P}_\lambda f.$$

Откуда $Q_0^*\varphi = \dfrac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(\bar{\lambda}I_6 - \hat{A})\hat{P}_\lambda f$.

Теперь из соотношения (23) имеем

$$u = \hat{R}(\lambda)f + \hat{R}(\lambda)Q_0^*(I_4 - \hat{K}(\lambda))\varphi =$$

$$= \hat{R}(\lambda)[f + Q_0^*(I_4 - \hat{K}(\lambda))(Q_0^*)^{-1}\frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}}(\bar{\lambda}I_6 - \hat{A})\hat{P}_\lambda f],$$

что эквивалентно соотношению (25).

Лемма доказана.

Построим оператор $\hat{K}(\lambda)$, который соответствует рассматриваемым импедансным условиям.

Применим операторы $Q_\pm$ к вектору u из области определения самосопряженного расширения оператора $\hat{A}_0$, имеющему вид (23').

$$Q_\pm u = Q_\pm \hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*\chi - Q_\pm \hat{R}(\lambda)Q_0^*\hat{K}(\lambda)\chi.$$

Отсюда, учитывая (13), получаем

$$Q_\pm u = \hat{m}_\pm(\bar{\lambda})\chi - \hat{m}_\pm(\lambda)\hat{K}(\lambda)\chi.$$

Воспользуемся соотношением (14), тогда

$$Q_{\pm}u = \begin{pmatrix} \hat{m}_1(\bar{\lambda}) & \pm\hat{m}_2(\bar{\lambda}) \\ \mp\hat{m}_2(\bar{\lambda}) & \hat{m}_1(\bar{\lambda}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} \hat{m}_1(\lambda) & \pm\hat{m}_2(\lambda) \\ \mp\hat{m}_2(\lambda) & \hat{m}_1(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{m}_1(\bar{\lambda})\varphi_1 \pm \hat{m}_2(\bar{\lambda})\varphi_2 - \hat{m}_1(\lambda)[\hat{K}_{11}\varphi_1 + \hat{K}_{12}\varphi_2] \mp \\ \mp\hat{m}_2(\lambda)[\hat{K}_{21}\varphi_1 + \hat{K}_{22}\varphi_2] \\ \\ \mp\hat{m}_2(\bar{\lambda})\varphi_1 + \hat{m}_1(\bar{\lambda})\varphi_2 \pm \hat{m}_2(\lambda)[\hat{K}_{11}\varphi_1 + \hat{K}_{12}\varphi_2] - \\ -\hat{m}_1(\lambda)[\hat{K}_{21}\varphi_1 + \hat{K}_{22}\varphi_2] \end{pmatrix},$$

и, следовательно,

$$Q_{\pm}\mathcal{E} = \hat{m}_1(\bar{\lambda})\varphi_1 \pm \hat{m}_2(\bar{\lambda})\varphi_2 - \hat{m}_1(\lambda)[\hat{K}_{11}\varphi_1 + \hat{K}_{12}\varphi_2] \mp$$

$$\mp\hat{m}_2(\lambda)[\hat{K}_{21}\varphi_1 + \hat{K}_{22}\varphi_2],$$

$$Q_{\pm}\mathcal{H} = \mp\hat{m}_2(\bar{\lambda})\varphi_1 + \hat{m}_1(\bar{\lambda})\varphi_2 \pm \hat{m}_2(\lambda)[\hat{K}_{11}\varphi_1 + \hat{K}_{12}\varphi_2] -$$

$$-\hat{m}_1(\lambda)[\hat{K}_{21}\varphi_1 + \hat{K}_{22}\varphi_2].$$

Используя импедансные условия, получим следующие соотношения для блоков матричного оператора $\hat{K}(\lambda)$.

$$\begin{aligned}(\hat{m}_1(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))\hat{K}_{11} &+ (\hat{m}_2(\lambda)-\mathcal{Z}\hat{m}_1(\lambda))\hat{K}_{21} = \\ &= \hat{m}_1(\bar{\lambda})+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\bar{\lambda})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\hat{m}_1(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))\hat{K}_{11} &+ (-\hat{m}_2(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_1(\lambda))\hat{K}_{21} = \\ &= \hat{m}_1(\bar{\lambda})+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\bar{\lambda})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\hat{m}_1(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))\hat{K}_{12} &+ (\hat{m}_2(\lambda)-\mathcal{Z}\hat{m}_1(\lambda))\hat{K}_{22} = \\ &= \hat{m}_2(\bar{\lambda})-\mathcal{Z}\hat{m}_1(\bar{\lambda})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\hat{m}_1(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))\hat{K}_{12} &+ (-\hat{m}_2(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_1(\lambda))\hat{K}_{22} = \\ &= -\hat{m}_2(\bar{\lambda})+\mathcal{Z}\hat{m}_1(\bar{\lambda})\end{aligned}$$

Учитывая, что $\hat{m}_2(\bar{\lambda}) = \hat{m}_2(\lambda)$, получаем следующие выражения для блоков матрицы

$$I_4-\hat{K}(\lambda)=\begin{pmatrix} I_2-\hat{K}_{11} & -\hat{K}_{12} \\ -\hat{K}_{21} & I_2-\hat{K}_{22}\end{pmatrix}$$

$$I_2-\hat{K}_{11}=(\hat{m}_1(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}(\hat{m}_1(\lambda)-\hat{m}_1(\bar{\lambda})),$$

$$\hat{K}_{12}=\hat{K}_{21}=0,$$

$$I_2-\hat{K}_{22}=(\hat{m}_1(\lambda)-\mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}(\hat{m}_1(\lambda)-\hat{m}_1(\bar{\lambda})).$$

То есть,

$$I_4-\hat{K}(\lambda)=\hat{C}(\lambda)(\hat{m}_\pm(\lambda)-\hat{m}_\pm(\bar{\lambda}))=\hat{C}(\lambda)Q_0\hat{R}(\lambda)\hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*(\bar{\lambda}-\lambda),$$

где $\hat{C}(\lambda)=\begin{pmatrix}(\hat{m}_1(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1} & 0 \\ 0 & (\hat{m}_1(\lambda)-\mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}\end{pmatrix}$.

Поэтому

$$\hat{R}_{\mathcal{Z}}(\lambda)=\hat{R}(\lambda)[I_6-Q_0^*\hat{C}(\lambda)Q_0\hat{R}(\lambda)\hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*(Q_0^*)^{-1}(\bar{\lambda}I_6-\hat{A})\hat{P}_\lambda],$$

где
$$\hat{P}_\lambda = \hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*(Q_0\hat{R}(\lambda)\hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*)^{-1}Q_0\hat{R}(\lambda).$$
И, следовательно,
$$\hat{R}_{\mathcal{Z}}(\lambda) = \hat{R}(\lambda)[I_6 - Q_0^*\hat{C}(\lambda)Q_0\hat{R}(\lambda)] = \hat{R}(\lambda) - \hat{R}(\lambda)Q_0^*\hat{C}(\lambda)Q_0\hat{R}(\lambda),$$
где $\hat{C}(\lambda)$ — определенный ранее оператор.

2) Обозначим
$$\hat{L}_1 = \mathcal{F}[\hat{m}_1(\lambda) + \mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda)]\mathcal{F}^{-1}, \ \hat{L}_2 = \mathcal{F}[\hat{m}_1(\lambda) - \mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_2(\lambda)]\mathcal{F}^{-1}.$$
Учитывая вид операторов $\hat{m}_1, \hat{m}_2$ и условие (19), получим
$$\hat{L}_1 = f_1 \cdot I_2 + g_1 \cdot p_{\parallel} \otimes p_{\parallel},$$
$$\hat{L}_2 = f_2 \cdot I_2 + g_2 \cdot p_{\parallel} \otimes p_{\parallel},$$
где
$$f_1 = \frac{abi}{2} - \frac{a^2\lambda}{2\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2}},$$
$$g_1 = \frac{1}{2\lambda\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2}},$$
$$f_2 = \frac{ai}{2b} - \frac{a^2\lambda}{2\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2}},$$
$$g_2 = \frac{1}{2\lambda\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2}},$$
и $p_{\parallel} = \{p_1, p_2\}$.

Введем ортонормированные вектора $e_{\parallel}$ и $e_{\perp}$ следующим образом:
$$e_{\parallel} = \frac{1}{|p_{\parallel}|}\{p_1, p_2\}, \qquad e_{\perp} = \frac{1}{|p_{\parallel}|}\{p_2, -p_1\}.$$
Очевидно, что
$$I_2 = e_{\parallel} \otimes e_{\parallel} + e_{\perp} \otimes e_{\perp},$$

и поэтому

$$\hat{L}_1 = f_1 \cdot e_\perp \otimes e_\perp + (f_1 + g_1) \cdot e_\| \otimes e_\|,$$

$$\hat{L}_2 = f_2 \cdot e_\perp \otimes e_\perp + (f_2 + g_2) \cdot e_\| \otimes e_\|.$$

Из взаимной ортогональности векторов $e_\|$ и $e_\perp$ вытекают равенства

$$\hat{L}_1^{-1} = \frac{1}{f_1} \cdot e_\perp \otimes e_\perp + \frac{1}{f_1 + g_1} \cdot e_\| \otimes e_\|,$$

$$\hat{L}_2^{-1} = \frac{1}{f_2} \cdot e_\perp \otimes e_\perp + \frac{1}{f_2 + g_2} \cdot e_\| \otimes e_\|.$$

Для доказательства равномерной ограниченности операторов $\hat{L}_1^{-1}$ и $\hat{L}_2^{-1}$ достаточно показать, что величины $\left|\frac{1}{f_1}\right|$, $\left|\frac{1}{f_2}\right|$, $\left|\frac{1}{f_1+g_1}\right|$, $\left|\frac{1}{f_2+g_2}\right|$ равномерно ограничены.

Сначала оценим величину

$$\left|\frac{1}{f_1}\right| = \frac{2\left|\sqrt{|p_\||^2 - a^2\lambda^2}\right|}{a\left|b\sqrt{|p_\||^2 - a^2\lambda^2} + a\lambda i\right|}.$$

Рассмотрим знаменатель этой дроби.

Очевидно

$$\left|b\sqrt{|p_\||^2 - a^2\lambda^2} + a\lambda i\right| =$$

$$= \left(\left(\mathrm{Re}b\,\mathrm{Re}\sqrt{|p_\||^2 - a^2\lambda^2} - \mathrm{Im}b\,\mathrm{Im}\sqrt{|p_\||^2 - a^2\lambda^2} - a\,\mathrm{Im}\lambda\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\mathrm{Re}b\,\mathrm{Im}\sqrt{|p_\||^2 - a^2\lambda^2} + \mathrm{Im}b\,\mathrm{Re}\sqrt{|p_\||^2 - a^2\lambda^2} + a\,\mathrm{Re}\lambda\right)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(|b|^2\left|\sqrt{|p_\||^2 - a^2\lambda^2}\right|^2 + a^2|\lambda|^2 + 2ah_1(p,\lambda)\right)^{1/2},$$

где

$$h_1(p,\lambda) = -\mathrm{Im}\lambda\,\mathrm{Re}b\,\mathrm{Re}\sqrt{|p_\||^2 - a^2\lambda^2} + \mathrm{Im}\lambda\,\mathrm{Im}b\,\mathrm{Im}\sqrt{|p_\||^2 - a^2\lambda^2} +$$

$$+\operatorname{Re}\lambda\operatorname{Re}b\operatorname{Im}\sqrt{|p_{\|}|^2-a^2\lambda^2}+\operatorname{Re}\lambda\operatorname{Im}b\operatorname{Re}\sqrt{|p_{\|}|^2-a^2\lambda^2}.$$

Определим знак $h_1(p,\lambda)$.

Обозначим $q=|p_{\|}|^2-a^2\lambda^2$, тогда

$$\operatorname{Re}\sqrt{q}=\sqrt{\frac{\operatorname{Re}q+|q|}{2}},$$

$$\operatorname{Im}\sqrt{q}=-\operatorname{sign}\operatorname{Re}\lambda\sqrt{\frac{-\operatorname{Re}q+|q|}{2}}.$$

Учитывая, что $\operatorname{Re}b<0$, получим

$$-\operatorname{Im}\lambda\operatorname{Re}b\operatorname{Re}\sqrt{|p_{\|}|^2-a^2\lambda^2}\geq 0,$$

$$\operatorname{sign}\left(\operatorname{Im}\lambda\operatorname{Im}b\operatorname{Im}\sqrt{|p_{\|}|^2-a^2\lambda^2}\right)=-\operatorname{sign}\operatorname{Re}\lambda\cdot\operatorname{sign}\operatorname{Im}b,$$

$$\operatorname{Re}\lambda\operatorname{Re}b\operatorname{Im}\sqrt{|p_{\|}|^2-a^2\lambda^2}\geq 0,$$

$$\operatorname{sign}\left(\operatorname{Re}\lambda\operatorname{Im}b\operatorname{Re}\sqrt{|p_{\|}|^2-a^2\lambda^2}\right)=\operatorname{sign}\operatorname{Re}\lambda\cdot\operatorname{sign}\operatorname{Im}b.$$

Рассмотрим такие значения параметра λ, что

$$\operatorname{Re}\lambda\cdot\operatorname{Im}b\geq 0,$$

то есть второе слагаемое, входящее в $h_1(p,\lambda)$, неположительное, а четвертое — неотрицательное.

Пусть $|\operatorname{Re}\lambda|\leq\operatorname{Im}\lambda$, тогда

$$\operatorname{Re}q=|p_{\|}|^2+a^2\left((\operatorname{Im}\lambda)^2-(\operatorname{Re}\lambda)^2\right)\geq 0.$$

А значит

$$\left|\operatorname{Re}\sqrt{|p_{\|}|^2-a^2\lambda^2}\right|\geq\left|\operatorname{Im}\sqrt{|p_{\|}|^2-a^2\lambda^2}\right|.$$

Рассмотрим первые два слагаемые, входящие в $h_1(p,\lambda)$.

Так как

$$-\operatorname{Im}\lambda\operatorname{Re}b\operatorname{Re}\sqrt{|p_{\|}|^2-a^2\lambda^2}+\operatorname{Im}\lambda\operatorname{Im}b\operatorname{Im}\sqrt{|p_{\|}|^2-a^2\lambda^2}=$$

$$= \mathrm{Im}\lambda \left(|\mathrm{Re}b| \left|\mathrm{Re}\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2}\right| - |\mathrm{Im}b| \left|\mathrm{Im}\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2}\right|\right).$$

то из условия $|\mathrm{Re}\, b| \geq |\mathrm{Im}\, b|$ следует, что

$$-\mathrm{Im}\lambda\, \mathrm{Re}b\, \mathrm{Re}\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2} + \mathrm{Im}\lambda\, \mathrm{Im}b\, \mathrm{Im}\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2} \geq 0.$$

Пусть теперь $|\mathrm{Re}\lambda| > \mathrm{Im}\lambda$.

Оценим знак суммы второго и третьего слагаемых в $h_1(p, \lambda)$. Так как

$$\mathrm{Im}\lambda\, \mathrm{Im}b\, \mathrm{Im}\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2} + \mathrm{Re}\lambda\, \mathrm{Re}b\, \mathrm{Im}\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2} =$$
$$= \left|\mathrm{Im}\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2}\right| (-\mathrm{Im}\lambda\, |\mathrm{Im}b| + |\mathrm{Re}\lambda|\, |\mathrm{Re}b|)$$

и в силу неравенства (20) получим $|\mathrm{Re}\, b| \geq \dfrac{|\mathrm{Re}\lambda|}{\mathrm{Im}\lambda} |\mathrm{Im}\, b|$, и тем более $|\mathrm{Re}b| \geq |\mathrm{Im}b|$. Значит для $|\mathrm{Re}\lambda| > \mathrm{Im}\lambda$ рассматриваемая сумма неотрицательна.

Рассмотрим теперь такие значения параметра λ, что

$$\mathrm{Re}\lambda \cdot \mathrm{Im}\, b \leq 0,$$

то есть второе слагаемое, входящее в $h_1(p, \lambda)$, неотрицательное, а четвертое — неположительное.

Рассмотрим сумму первого и четвертого слагаемых из $h_1(p, \lambda)$. Очевидно,

$$-\mathrm{Im}\lambda\, \mathrm{Re}b\, \mathrm{Re}\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2} + \mathrm{Re}\lambda\, \mathrm{Im}b\, \mathrm{Re}\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2} =$$

$$= \mathrm{Re}\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2}\, (\mathrm{Im}\lambda\, |\mathrm{Re}\, b| - |\mathrm{Re}\lambda|\, |\mathrm{Im}\, b|).$$

Если $|\mathrm{Re}\lambda| \leq \mathrm{Im}\lambda$, то $|\mathrm{Re}\, b| \geq |\mathrm{Im}\, b|$, и таким образом рассматриваемая сумма неотрицательна.

Если же $|\mathrm{Re}\lambda| > \mathrm{Im}\lambda$, то

$$|\mathrm{Re}\, b| \geq \frac{|\mathrm{Re}\lambda|}{\mathrm{Im}\lambda} |\mathrm{Im}\, b|.$$

Откуда видно, что рассматриваемая сумма неотрицательна и в этом случае.

Таким образом мы показали, что

$$\left|b\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2} + a\lambda i\right| =$$

$$= \left(|b|^2 \left|\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2}\right|^2 + a^2|\lambda|^2 + 2ah_1(p,\lambda)\right)^{1/2},$$

где

$$h_1(p,\lambda) \geq 0.$$

Следовательно

$$\left|b\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2} + a\lambda i\right| \geq |b| \left|\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2}\right|$$

или

$$\left|\frac{1}{f_1}\right| \leq \frac{2}{a|b|}.$$

Так как $\operatorname{Re} b < b_0$, то есть $|b| > |b_0|$, то мы можем утверждать, что

$$\left|\frac{1}{f_1}\right| \leq M_1, \qquad \text{где} \qquad M_1 = \text{const}.$$

Оценим теперь величину

$$\left|\frac{1}{f_2}\right| = \frac{2|b| \left|\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2}\right|}{a\left|\sqrt{|p_{\parallel}|^2 - a^2\lambda^2} + ab\lambda i\right|}.$$

Очевидно $f_2(b,p,\lambda) = f_1(\frac{1}{b},p,\lambda)$.

Так как $\frac{1}{b} = \frac{1}{|b|^2}\bar{b}$, то для $b' = \frac{1}{b}$ выполняются условия теоремы 2.2, если они выполняются для b.

А значит

$$\left|\frac{1}{f_2}\right| \leq \frac{2}{a\left|\frac{1}{b}\right|}.$$

Или

$$\left|\frac{1}{f_2}\right| \le \frac{2|b|}{|a|}.$$

А так как $|b| < c$, где $c = \text{const}$,

$$\text{то} \qquad \left|\frac{1}{f_2}\right| \le M_2, \qquad \text{где} \qquad M_2 = \text{const}.$$

Совершенно аналогично показывается ограниченность величин $\left|\dfrac{1}{f_1 + g_1}\right|$ и $\left|\dfrac{1}{f_2 + g_2}\right|$.

Таким образом показана равномерная ограниченность операторов $\hat{L}_1^{-1}$ и $\hat{L}_2^{-1}$ для значений λ, имеющих достаточно большую положительную мнимую часть (именно $\mathrm{Im}\lambda > 2\pi\sigma$).

То есть, операторы $(\hat{m}_1 + \mathcal{Z}\hat{m}_2)^{-1}$ и $(\hat{m}_1 - \mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_2)^{-1}$ существуют и равномерно ограничены при достаточно больших положительных значениях мнимой части параметра λ. Значит в этом случае существует и равномерно ограничен оператор $\hat{C}(\lambda)$.

Покажем единственность решения рассматриваемой задачи. Для этого достаточно показать, что существует ограниченный левый обратный оператор для оператора $(\lambda I_6 - \hat{A}^*_{\mathcal{Z}})$, где $\hat{A}^*_{\mathcal{Z}}$ — сопряженный к $\hat{A}_{\mathcal{Z}}$ оператор.

Легко видеть, что оператор, сопряженный к $\hat{A}_{\mathcal{Z}}$ имеет следующий вид

$$\hat{A}^*_{\mathcal{Z}} u = \pi_S \hat{A} u,$$

где оператор $\hat{A}$ задан выражением (3).

$$\mathcal{D}(\hat{A}^*_{\mathcal{Z}}) = \{u \in L_2^6(R^3) : \hat{A}u \in L_2^6(R^3|S), \text{существуют } Q_\pm\mathcal{E}, Q_\pm\mathcal{H},$$
$$\text{и } Q_+\mathcal{E} = \mathcal{Z}'Q_+\mathcal{H}, Q_-\mathcal{E} = -\mathcal{Z}'Q_-\mathcal{H}\},$$

$$\text{где } \mathcal{Z}' = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{Z}}_{22} & -\bar{\mathcal{Z}}_{12} \\ -\bar{\mathcal{Z}}_{21} & \bar{\mathcal{Z}}_{11} \end{pmatrix} = -J\mathcal{Z}^* J.$$

Для условий Леонтовича (19) импедансная матрица $\mathcal{Z}'$ сопряженного оператора имеет вид

$$\mathcal{Z}' = \begin{pmatrix} 0 & \bar{b} \\ -\bar{b} & 0 \end{pmatrix} = \bar{b}J.$$

Для такой импедансной матрицы оператор

$$\hat{C}'(\lambda) = \begin{pmatrix} (\hat{m}_1 + \mathcal{Z}'\hat{m}_2)^{-1} & 0 \\ 0 & (\hat{m}_1 - (\mathcal{Z}')^{-1}\hat{m}_2)^{-1} \end{pmatrix}$$

ограничен, если мнимая часть параметра λ отрицательна и достаточно велика по модулю. Значит для всех λ из указанной полуплоскости существует ограниченный оператор

$$\hat{R}_{\mathcal{Z}'}(\lambda) = (\lambda I_6 - \hat{A}_{\mathcal{Z}'})^{-1},$$

то есть

$$(\lambda I_6 - \hat{A}_{\mathcal{Z}'})\hat{R}_{\mathcal{Z}'}(\lambda) = I_6.$$

Отсюда следует, что верно следующее равенство для сопряженных операторов

$$\hat{R}^*_{\mathcal{Z}'}(\bar{\lambda})(\bar{\lambda} I_6 - \hat{A}^*_{\mathcal{Z}'}) = I_6,$$

что равносильно равенству

$$\hat{R}^*_{\mathcal{Z}'}(\bar{\lambda})(\bar{\lambda} I_6 - \hat{A}_{\mathcal{Z}}) = I_6.$$

Таким образом, существует левый обратный для оператора $(\lambda I_6 - \hat{A}_{\mathcal{Z}})$ для всех значений λ, имеющих достаточно большую положительную мнимую часть. Значит он совпадает с правым обратным, и решение задачи единственно.

Оценим норму резольвенты

$$\hat{R}_{\mathcal{Z}}(\lambda) = \hat{R}(\lambda) - \hat{R}(\lambda)Q_0^*\hat{C}(\lambda)Q_0\hat{R}(\lambda).$$

Так как оператор $\hat{A}$ симметрический, то

$$\|\hat{R}(\lambda)\| \le \frac{c_1}{|\mathrm{Im}\lambda|},$$

где $c_1 = \mathrm{const}$.

По определению нормы оператора

$$\|\hat{R}(\lambda)Q_0^*\| = \sup_{\varphi\in\mathcal{L}_0} \frac{\|\hat{R}(\lambda)Q_0^*\varphi\|_{L_2^6(R^3)}}{\|\varphi\|_{\mathcal{L}_0}} =$$

$$= \sup_{\varphi\in\mathcal{L}_0} \frac{\|\mathcal{F}_2\hat{R}(\lambda)Q_0^*\varphi\|_{L_2^6(R^3)}}{\|\varphi\|_{\mathcal{L}_0}},$$

где $\|\varphi\|_{\mathcal{L}_0}$ задана выражением (8), и $\mathcal{F}_2$ — преобразование Фурье по переменным x_1, x_2.

При вычислении операторов $\hat{m}_\pm(\lambda)$ мы получили выражение для $\mathcal{F}_2\hat{R}(\lambda)Q_0^*\varphi$, заданное формулой (17).

Обозначим

$$v_1(\lambda) = \frac{e^{-\sqrt{p_1^2+p_2^2-a^2\lambda^2}|x_3|}}{2\lambda\sqrt{p_1^2+p_2^2-a^2\lambda^2}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} p_1^2-a^2\lambda^2 & p_1p_2 & 0 & 0 \\ p_1p_2 & p_2^2-a^2\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a\lambda p_2 & a\lambda p_1 \\ 0 & 0 & p_1^2-a^2\lambda^2 & p_1p_2 \\ 0 & 0 & p_1p_2 & p_2^2-a^2\lambda^2 \\ a\lambda p_2 & -a\lambda p_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$v_2(\lambda) = \frac{\mathrm{sign}(x_3)}{2\lambda}e^{-\sqrt{p_1^2+p_2^2-a^2\lambda^2}|x_3|}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a\lambda i \\ 0 & 0 & -a\lambda i & 0 \\ -ip_1 & -ip_2 & 0 & 0 \\ 0 & -a\lambda i & 0 & 0 \\ a\lambda i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ip_1 & -ip_2 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Тогда

$$\mathcal{F}_2\hat{R}(\lambda)Q_0^*\varphi = v_1(\lambda)\tilde{\varphi} + v_2(\lambda)\tilde{\varphi},$$

где $\tilde{\varphi} = \mathcal{F}_2\varphi$.

Следовательно,

$$\|\mathcal{F}_2\hat{R}(\lambda)Q_0^*\varphi\| \le \|v_1(\lambda)\tilde{\varphi}\| + \|v_2(\lambda)\tilde{\varphi}\|.$$

Пусть $\lambda = i\eta$.

Оценим сначала $\|v_1(i\eta)\tilde{\varphi}\|$.

Поскольку

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{e^{-\sqrt{|p_{\|}|^2+a^2\eta^2}|x_3|}}{2\sqrt{|p_{\|}|^2+a^2\eta^2}}\right|^2 dx_3 = \frac{1}{4(|p_{\|}|^2+a^2\eta^2)^{3/2}},$$

то

$$\|v_1(i\eta)\tilde{\varphi}\|^2 = \left\|\frac{(-a^2\eta^2-p_1^2)\tilde{\varphi}_{11}-p_1p_2\tilde{\varphi}_{12}}{2i\eta(|p_{\|}|^2+a^2\eta^2)^{3/4}}\right\|^2 +$$

$$+\left\|\frac{-p_1p_2\tilde{\varphi}_{11}+(-a^2\eta^2-p_2^2)\tilde{\varphi}_{12}}{2i\eta(|p_{\|}|^2+a^2\eta^2)^{3/4}}\right\|^2 + \left\|\frac{ai\eta p_2\tilde{\varphi}_{21}-ai\eta p_1\tilde{\varphi}_{22}}{2i\eta(|p_{\|}|^2+a^2\eta^2)^{3/4}}\right\|^2 +$$

$$+\left\|\frac{(-a^2\eta^2-p_1^2)\tilde{\varphi}_{21}-p_1p_2\tilde{\varphi}_{22}}{2i\eta(|p_{\|}|^2+a^2\eta^2)^{3/4}}\right\|^2 +$$

$$+\left\|\frac{-p_1p_2\tilde{\varphi}_{21}+(-a^2\eta^2-p_2^2)\tilde{\varphi}_{22}}{2i\eta(|p_{\|}|^2+a^2\eta^2)^{3/4}}\right\|^2 + \left\|\frac{-ai\eta p_2\tilde{\varphi}_{11}+ai\eta p_1\tilde{\varphi}_{12}}{2i\eta(|p_{\|}|^2+a^2\eta^2)^{3/4}}\right\|^2.$$

Учитывая, что

$$\|\varphi\|^2_{\mathcal{L}_0} = \|(1+|p_{\|}|^2)^{-1/4}\tilde{\varphi}\|^2_{L_2^4(R^2)}+$$
$$+\sum_{i=1}^2\|(1+|p_{\|}|^2)^{-1/4}(p_1\tilde{\varphi}_{i1}+p_2\tilde{\varphi}_{i2})\|^2_{L_2(R^2)},$$

и

$$\|u_1+u_2\|^2 \le 2\|u_1\|^2 + 2\|u_2\|^2,$$

получим отсюда, что

$$\|v_1(i\eta)\tilde{\varphi}\|^2 \le$$
$$\le \sup_{(p_1,p_2)} \left(\frac{a^4\eta^4 + |p_{\|}|^2 + a^2\eta^2|p_{\|}|^2}{2\eta^2||p_{\|}|^2 + a^2\eta^2|} \cdot \left| \frac{|p_{\|}|^2 + 1}{|p_{\|}|^2 + a^2\eta^2} \right|^{1/2} \right) \times$$
$$\times \|\varphi\|^2_{\mathcal{L}_0}.$$

Так как

$$\frac{|p_{\|}|^2}{||p_{\|}|^2 + a^2\eta^2|} < 1,$$

то

$$\frac{|p_{\|}|^2}{2\eta^2(|p_{\|}|^2 + a^2\eta^2)} < \frac{1}{2\eta^2}.$$

Очевидно

$$\frac{a^4\eta^4 + a^2\eta^2|p_{\|}|^2}{2\eta^2(|p_{\|}|^2 + a^2\eta^2)} = \frac{a^2}{2}.$$

Таким образом

$$\|v_1(i\eta)\tilde{\varphi}\| \le c_4\|\varphi\|_{\mathcal{L}_0}.$$

Теперь оценим $v_2(i\eta)$.

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + a^2\eta^2}|x_3|} \right|^2 dx_3 = \frac{1}{(|p_{\|}|^2 + a^2\eta^2)^{1/2}},$$

то

$$\|v_2(\lambda)\tilde{\varphi}\|^2 = \left\| \frac{a\eta\tilde{\varphi}_{22}}{2\eta(|p_{\|}|^2 + a^2\eta^2)^{1/4}} \right\|^2 + \left\| \frac{a\eta\tilde{\varphi}_{21}}{2\eta(|p_{\|}|^2 + a^2\eta^2)^{1/4}} \right\|^2 +$$
$$+ \left\| \frac{ip_1\tilde{\varphi}_{11} + ip_2\tilde{\varphi}_{12}}{2\eta(|p_{\|}|^2 + a^2\eta^2)^{1/4}} \right\|^2 + \left\| \frac{a\eta\tilde{\varphi}_{12}}{2\eta(|p_{\|}|^2 + a^2\eta^2)^{1/4}} \right\|^2 +$$
$$+ \left\| \frac{a\eta\tilde{\varphi}_{11}}{2\eta(|p_{\|}|^2 + a^2\eta^2)^{1/4}} \right\|^2 + \left\| \frac{ip_1\tilde{\varphi}_{21} + ip_2\tilde{\varphi}_{22}}{2\eta(|p_{\|}|^2 + a^2\eta^2)^{1/4}} \right\|^2.$$

Отсюда как и для $v_1(i\eta)$ получается неравенство

$$\|v_2(i\eta)\tilde{\varphi}\|^2 \leq \sup_{(p_1,p_2)} \left(\frac{a^2\eta^2+1}{4\eta^2} \cdot \left(\frac{|p_{\|}|^2+1}{|p_{\|}|^2+a^2\eta^2} \right)^{1/2} \right) \cdot \|\varphi\|^2_{\mathcal{L}_0},$$

или

$$\|v_2(i\eta)\tilde{\varphi}\| \leq c_5\|\varphi\|_{\mathcal{L}_0}.$$

Итак,

$$\|\hat{R}(i\eta)Q_0^*\| \leq c_6, \quad \text{где } c_6 = \text{const}.$$

Рассмотрим теперь $\lambda = \xi + i\eta$.

Используя тождество

$$\hat{R}(\lambda)Q_0^* = \hat{R}(\lambda)(i\eta - \hat{A})\hat{R}(i\eta)Q_0^*,$$

получим

$$\|\hat{R}(\lambda)Q_0^*\| \leq \|\hat{R}(\lambda)(i\eta - \hat{A})\| \cdot \|\hat{R}(i\eta)Q_0^*\|.$$

Согласно оценке (12) для нормы оператора $\hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta - \hat{A})$,

$$\|\hat{R}(\lambda)(i\eta - \hat{A})\| \leq \frac{3|\lambda|}{2\mathrm{Im}\lambda}.$$

Таким образом,

$$\|\hat{R}(\lambda)Q_0^*\| \leq \frac{c_7|\lambda|}{\mathrm{Im}\lambda}, \quad \text{где} \quad c_7 = \text{const}. \tag{28}$$

Оператор $Q_0\hat{R}(\lambda)$ является сопряженным к оператору $\hat{R}(\bar{\lambda})Q_0^*$, значит нормы этих операторов совпадают.

Таким образом, получаем требуемое неравенство

$$\|\hat{R}_Z(\lambda)\| \leq \|\hat{R}(\lambda)\| + \|\hat{R}(\lambda)Q_0^*\| \cdot \|\hat{C}(\lambda)\| \cdot \|Q_0\hat{R}(\lambda)\| \leq$$
$$\leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|} + \frac{c_8|\lambda|^2}{\mathrm{Im}\lambda} \leq c|\lambda|^2,$$

где $c =$const.

Теорема доказана.

3. Оператор Максвелла для случая импедансных граничных условий на гладкой поверхности

Теперь перейдем к более сложной задаче. Пусть функция f из соотношения (1), определяющего поверхность S, отлична от постоянной.

Введем оператор $Q : \mathcal{S}^3(R^3) \longrightarrow \mathcal{S}^2(R^2)$, полагая для вектор-функции $w = \{w_1, w_2, w_3\}$ из пространства $\mathcal{S}^3(R^3)$

$$[Qw](x_1, x_2) = \{w_1^\tau(x_1, x_2, f(x_1, x_2)), w_2^\tau(x_1, x_2, f(x_1, x_2)\},$$

где $w^\tau = \{w_1^\tau, w_2^\tau\}$ — ортогональная проекция вектора w на касательную плоскость к поверхности S. Ее компоненты выражаются через компоненты вектора w следующим образом

$$w_i^\tau = w_i + \frac{\partial f}{\partial x_i} w_3 \Big|_{x_3 = f(x_1, x_2)}, \quad i = 1, 2.$$

Определим оператор $Q^* : \mathcal{S}^2(R^2) \longrightarrow \mathcal{S}'^3(R^3)$ полагая для вектора $v = \{v_1, v_2\}$ из постранства $\mathcal{S}^2(R^2)$

$$[Q^* v](x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2) \\ \\ v_2(x_1, x_2) \\ \\ v_1(x_1, x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + v_2(x_1, x_2)\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot \delta_S,$$

где $\delta_S = \delta(x_3 - f(x_1, x_2))$ - функция Дирака.

Оператор Q^* является сопряженным к оператору Q.

Для дальнейших вычислений нам понадобиться конструкция приближенного обратного оператора — параметрикса — одна из основных конструкций теории псевдо-дифференциальных операторов, основанной на квантовании Вейля.

Квантование Вейля $\mathcal{G}$ сопоставляет каждой функции B из пространства Шварца $\mathcal{S}(R^{2n})$, $B = B(u)$, $u = \{p, q\}$, где p, q — вектора из евклидова пространства R^n, интегральный оператор $\hat{B}$ с ядром $\mathcal{B}$, определяемым соотношением

$$\mathcal{B}(x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} B(p, \frac{x+y}{2}) e^{i(x-y,p)}\, dp. \qquad (29)$$

Таким образом, отображение $\mathcal{G}B = \mathcal{B}$ является композицией преобразования Фурье по части переменных и линейной замены переменных, и поэтому $\mathcal{G}$ — непрерывное отображение в $\mathcal{S}(R^{2n})$.

Преобразование $\mathcal{G}$ может быть продолжено на пространство обобщенных функций $\mathcal{S}'(R^{2n})$: для обобщенной функции A из пространства $\mathcal{S}'(R^{2n})$ соответствующий линейный непрерывный оператор $\hat{A} \ : \ \mathcal{S}(R^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(R^{2n})$ определяется квадратичной формой

$$(\hat{A}\varphi, \psi) = < A, \mathcal{G}^T(\varphi \otimes \psi) >, \qquad (30)$$

где $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(R^n)$, $\mathcal{G}^T$ — оператор, транспонированный к $\mathcal{G}$ и

$$[\varphi \otimes \psi](x,y) = \bar{\psi}(x)\varphi(y), \qquad x, y \in R^n,$$

$$< \mathcal{G}^T \mathcal{B}, \mathcal{C} > = < \mathcal{B}, \mathcal{G}\mathcal{C} >, \qquad \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{S}(R^n).$$

Соотношение (30) дает продолжение квантования Вейля из пространства $\mathcal{S}(R^{2n})$ на пространство обобщенных функций медленного роста $\mathcal{S}'(R^{2n})$.

Таким образом, каждая обобщенная функция медленного роста является символом Вейля единственного линейного нерерывного оператора.

Также верно обратное : для любого линейного непрерывного оператора $\hat{A} \ : \ \mathcal{S}(R^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(R^n)$ символ Вейля определен однозначно.

Если $\mathcal{A}$ — ядро оператора $\hat{A}$, то есть

$$< \mathcal{A}, \varphi \otimes \psi > = (\hat{A}\varphi, \psi), \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{S}(R^n),$$

то обобщенная функция

$$A = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{A}, \qquad (31)$$

где

$$[\mathcal{G}^{-1}A](p,q) = \int_{-\infty}^{\infty} A(q-\frac{y}{2}, q+\frac{y}{2})e^{i(p,y)}\,dy,$$

является символом Вейля оператора $\hat{A}$.

Для символов Вейля A, B определим их произведение по Вейлю $A\#B$ как символ Вейля, соответствующий произведению операторов $\hat{A}\hat{B}$.

Для произведения символов по Вейлю имеет место следующее формальное разложение

$$[A\#B](u) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{1}{2i}\right)^r \left(\frac{\partial}{\partial u}, J\frac{\partial}{\partial u'}\right)^r \Big|_{u=u'} A(u')B(u), \tag{32}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

$$u = \{p, q\}.$$

Пусть оператор $\hat{A}$ имеет символ Вейля $A(u)$. Определим так называемый параметрикс — оператор с символом $R_0(u)$ следующим образом.

Положим

$$R_0(u) = \frac{1}{A(u)}. \tag{33}$$

Прямые вычисления показывают, что

$$A\#R_0 = 1 + T_0^r.$$

При выполнении определенных условий операторы, отвечающие символам T_0^r являются достаточно малыми по норме, и из этих соотношений следует существование оператора обратного к оператору $\hat{A}$ (см. [9]).

Для вещественных чисел ρ, δ, m обозначим через $S_m^{\rho,\delta}$ множество бесконечно дифференцируемых функций $A(p,q)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left|\frac{\partial^{|k+l|}A(p,q)}{\partial p^k \partial q^l}\right| \le c_{k,l}(1+|p|^2)^{\dfrac{m-\rho|k|+\delta|l|}{2}},$$

$$k,l = 0,1,\ldots, \qquad p,q \in R^n, \qquad c_{k,l} = \mathrm{const}.$$

Очевидно $S_{m_1}^{\rho,\delta} \subset S_{m_2}^{\rho,\delta}$, если $m_1 < m_2$.

Для произведения символов по Вейлю имеет место следующая теорема (см. [9]).

Теорема : *1) Пусть $A_1(p,q) \in S_{m_1}^{\rho,\delta}$, $A_2(p,q) \in S_{m_2}^{\rho,\delta}$, и*

$$\theta_N = A_1 \# A_2 - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2i}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial u}, J\frac{\partial}{\partial u'}\right)^k \bigg|_{u'=u} A_1(u') \cdot A_2(u) -$$

остаток ряда порядка N в разложении произведения по Вейлю (32).

Тогда

$$\theta_N \in S^{\rho,\delta}_{m_1+m_2-(N+1)(\rho-\delta)}.$$

2) Если $A \in S_0^{\rho,\delta}$, то квантование Вейля ставит ей в соответствие ограниченный в $L_2(R^n)$ оператор $\hat{A}$.

Теорема 3.1. *Пусть все производные функции f малы по абсолютной величине.*

Пусть оператор $\hat{A}^S$ определен дифференциальным выражением (3) на области $\mathcal{D}(\hat{A}^S) = \mathcal{S}^6(R^3|S)$, тогда

1) дефектное пространство $\mathfrak{N}_\lambda^S$ оператора $(\lambda I_6 - \hat{A}_S)$ изоморфно пространству $\mathcal{L}_0$. А именно, произвольный элемент v_λ дефектного пространства $\mathfrak{N}_\lambda^S$ однозначным образом представим в виде

$$v_\lambda = \hat{R}(\bar{\lambda})Q^*\varphi,$$

где $\varphi \in \mathcal{L}_0$.

2) для произвольной обобщенной вектор-функции $v_\lambda = \{\mathcal{E}_\lambda, \mathcal{H}_\lambda\}$ *из дефектного пространства* $\mathfrak{N}^S_\lambda$ *вне границы* S *выполняется соотношение* $\operatorname{div} \mathcal{E}_\lambda = \operatorname{div} \mathcal{H}_\lambda = 0$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Произвольный элемент дефектного пространства $\mathfrak{N}^S_\lambda$ ортогонален каждому элементу вида $(\lambda I_6 - \hat{A}_S)w$, $w \in \mathcal{D}(\hat{A}_S)$,
то есть $(v_\lambda, (\lambda I_6 - \hat{A}_S)w) = 0$ для любого $w \in \mathcal{S}^6(R^3|S)$.

Отсюда, в силу симметричности оператора $\hat{A}_S$ следует, что в смысле обобщенных функций

$$< (\bar{\lambda} I_6 - \hat{A})v_\lambda, \bar{w} >= 0.$$

Но это означает, что носитель обобщенной функции $(\bar{\lambda} I_6 - \hat{A})v_\lambda$ принадлежит плоскости S, а значит

$$[(\bar{\lambda} I_6 - \hat{A})v_\lambda](x_1, x_2, x_3) = \sum_{|j| \le N} \chi_j(x_1, x_2)\delta^{(j)}(x_3 - f(x_1, x_2)),$$

$$\text{где} \quad \chi_j(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \chi_{j_1}(x_1, x_2) \\ \chi_{j_2}(x_1, x_2) \\ \chi_{j_3}(x_1, x_2) \\ \chi_{j_4}(x_1, x_2) \\ \chi_{j_5}(x_1, x_2) \\ \chi_{j_6}(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \qquad \chi_{ji} \in \mathcal{S}(R^2).$$

Следовательно,

$$v_\lambda = \hat{R}(\bar{\lambda}) \sum_{|j| \le N} \chi_j \cdot \delta^{(j)}_S.$$

Выясним теперь при каких значениях индекса j выполнено условие $\hat{R}(\bar{\lambda})\psi\delta^{(j)}_S \in L^6_2(R^3)$ для вектор-функции ψ из $\mathcal{S}^6(R^2)$.

Имеем следующее соотношение

$$\hat{R}(\bar{\lambda})\psi\delta^{(j)}_S =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\bar{\lambda}}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\bar{\lambda}^2 I_3)\hat{r}(\bar{\lambda})\psi_1\delta^{(j)}_S - ai \operatorname{rot} \hat{r}(\bar{\lambda})\psi_2\delta^{(j)}_S \\ \\ ai \operatorname{rot} \hat{r}(\bar{\lambda})\psi_1\delta^{(j)}_S + \frac{1}{\bar{\lambda}}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\bar{\lambda}^2 I_3)\hat{r}(\bar{\lambda})\psi_2\delta^{(j)}_S \end{pmatrix},$$

где обозначено

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{13} \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \\ \psi_{23} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$(\mathrm{grad\,div} + a^2\bar{\lambda}^2 I_3)\psi_i \delta_S^{(j)} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2\bar{\lambda}^2\psi_{i1} + \dfrac{\partial^2\psi_{i1}}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2\psi_{i2}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ a^2\bar{\lambda}^2\psi_{i2} + \dfrac{\partial^2\psi_{i2}}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2\psi_{i1}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ a^2\bar{\lambda}^2\psi_{i3} \end{pmatrix} \cdot \delta_S^{(j)} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_{i3}}{\partial x_1} - 2\dfrac{\partial\psi_{i1}}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \psi_{i1}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial\psi_{i2}}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \\ - \psi_{i2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} - \dfrac{\partial\psi_{i2}}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\psi_{i3}}{\partial x_2} - 2\dfrac{\partial\psi_{i2}}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \psi_{i2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial\psi_{i1}}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \\ - \psi_{i1}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} - \dfrac{\partial\psi_{i1}}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial\psi_{i1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial\psi_{i2}}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot \delta_S^{(j+1)} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -\psi_{i3}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \psi_{i1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \psi_{i2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ -\psi_{i3}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \psi_{i1}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \psi_{i2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \\ \psi_{i3} - \psi_{i1}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \psi_{i2}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \cdot \delta_S^{(j+2)}$$

и

$$\mathrm{rot}\ \psi_i\delta_S^{(j)} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_{i3}}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial\psi_{i3}}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial\psi_{i2}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\psi_{i1}}{\partial x_2} \end{pmatrix} \delta_S^{(j)} + \begin{pmatrix} -\psi_{i2} - \psi_{i3}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \psi_{i1} + \psi_{i3}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \psi_{i1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \psi_{i2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix} \delta_S^{(j+1)},$$

нетрудно получить следующие необходимые условия принадлежности вектора v_λ пространству $L_2^6(R^3)$

$$j = 0, \qquad \psi_{13} = \psi_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \psi_{12}\frac{\partial f}{\partial x_2}, \qquad \psi_{23} = \psi_{21}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \psi_{22}\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Таким образом, получаем, что произвольный вектор v_λ из дефектного пространства $\mathfrak{N}_\lambda^S$ имеет вид $v_\lambda = \hat{R}(\bar{\lambda})Q^*\varphi$.

Теперь покажем, что $v_\lambda \in L_2^6(R^3)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathcal{L}_0$.

Положим $\lambda = i\eta$, η — вещественное.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\|\hat{R}(-i\eta)Q^*\varphi\|^2_{L_2^6(R^3)} = (\hat{R}(-i\eta)Q^*\varphi, \hat{R}(-i\eta)Q^*\varphi)_{L_2^6(R^3)} =$$

$$= (Q\hat{R}(i\eta)\hat{R}(-i\eta)Q^*\varphi, \varphi)_{L_2^4(R^2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{\mathcal{D}}\varphi, \varphi)_{R^4}dx_1dx_2,$$

где

$$\hat{\mathcal{D}} = Q\hat{R}(i\eta)\hat{R}(-i\eta)Q^*.$$

Применяя тождество Гильберта для произведения двух резольвент, получим, что

$$\hat{\mathcal{D}} = \frac{1}{2i\eta}(Q\hat{R}(-i\eta)Q^* - Q\hat{R}(i\eta)Q^*).$$

Таким образом

$$\hat{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{D}}_1 & 0 \\ 0 & \hat{\mathcal{D}}_1 \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{\mathcal{D}}_1 = -\frac{1}{\eta^2}\cdot\hat{W}\cdot(a^2\eta^2(I_2+\nabla f\otimes\nabla f)-\nabla_{\|}\otimes\nabla_{\|}),$$

$$\hat{W} =< \delta(x_3 - f(x_1,x_2)), \hat{r}(i\eta)\delta(x_3 - f(x_1,x_2)) >\equiv$$

$$\equiv \hat{r}(i\eta)\delta_S|_S\,,$$

$$\nabla_{\|} = \{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2}\},$$

$$\hat{r}(\lambda) = (a^2\lambda^2+\triangle)^{-1}.$$

То есть

$$\|\hat{R}(-i\eta)Q^*\varphi\|^2_{L_2^6(R^3)} = \sum_{i=1}^{2}(\hat{\mathcal{D}}_1\varphi_i,\varphi_i)_{L_2^2(R^2)}.$$

Следовательно для выполнения неравенства $\|\hat{R}(-i\eta)Q^*\varphi\|_{L_2^6(R^3)} < < \infty$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$(\hat{\mathcal{D}}_1\varphi_i,\varphi_i)_{L_2^2(R^2)} < \infty,\quad i=1,2.$$

Вычислим $\hat{\mathcal{D}}_1$.

Обозначим через $\hat{U}_1$ оператор замены переменных, действующий на обобщенную функцию h по следующему правилу

$$\hat{U}_1 h(x) = h(\tilde{x}), \tag{34}$$

где

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = x_1, \\ \tilde{x}_2 = x_2, \\ \tilde{x}_3 = x_3 - f(x_1,x_2). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $(\hat{U}_1^{-1})^* = \hat{U}_1$.

Тогда

$$\hat{W} =< \hat{U}_1\delta(x_3 - f(x_1,x_2)), \hat{U}_1\hat{r}(i\eta)\hat{U}_1^{-1}\hat{U}_1\delta(x_3 - f(x_1,x_2)) > .$$

Или

$$\hat{W} =< \delta(x_3), \hat{\alpha}(i\eta)^{-1}\delta(x_3) >,$$

где

$$\hat{\alpha}(\lambda) = \hat{U}_1(a^2\lambda^2 + \Delta)\hat{U}_1^{-1} =$$

$$= a^2\lambda^2 + \frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}_2^2} + (1 + |\nabla f|^2)\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}_3^2} - \tag{35}$$

$$- \Delta f\frac{\partial}{\partial\tilde{x}_3} - 2\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}_1}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}_1\partial\tilde{x}_3} - 2\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}_2}\frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}_2\partial\tilde{x}_3}$$

Для того, чтобы построить приближение для оператора $\hat{\alpha}(i\eta)^{-1}$, мы применим конструкцию параметрикса. Обозначим через $\alpha(\lambda)$ символ оператора $\hat{\alpha}(\lambda)$, имеющего вид (35). Простые вычисления показывают, что

$$\alpha(\lambda) = a^2\lambda^2 - |l|^2,$$

где

$$l = \left\{ p_1 - \frac{\partial f}{\partial q_1}p_3, p_2 - \frac{\partial f}{\partial q_2}p_3, p_3 \right\}.$$

Вычислим произведение по Вейлю символов $\alpha(i\eta)$ и $\dfrac{1}{\alpha(i\eta)}$.

Используя разложение (32), получим

$$\alpha(i\eta)\#\frac{1}{\alpha(i\eta)} = I + T_0,$$

где $T_0 \in S^{1,0}_{-2}$.

Обозначим через $\hat{r}_0(i\eta)$ параметрикс оператора $\hat{\alpha}(i\eta)$, а через $\hat{T}_0$ — оператор с символом T_0.

Согласно (33), оператор $\hat{r}_0(i\eta)$ имеет символ $\dfrac{1}{\alpha(i\eta)}$.

Таким образом,

$$\hat{\alpha}(i\eta)\cdot\hat{r}_0(i\eta) = I + \hat{T}_0.$$

Отсюда

$$\hat{\alpha}(i\eta)^{-1} = \hat{r}_0(i\eta) + \hat{S}_0,$$

где

$$\hat{S}_0 = -\hat{\alpha}(i\eta)^{-1}\cdot\hat{T}_0.$$

Причем, учитывая, что символ оператора $\hat{\alpha}(i\eta)^{-1}$ принадлежит классу $S^{1,0}_{-2}$, и применяя теорему о произведении символов по Вейлю, получим, что $S_0 \in S^{1,0}_{-4}$, где S_0 — символ оператора $\hat{S}_0$.

Таким образом,

$$\hat{W} =< \delta(x_3), \hat{r}_0(i\eta)\delta(x_3) > + < \delta(x_3), \hat{S}_0\delta(x_3) > .$$

Покажем, что оператор $\hat{B} =< \delta(x_3), \hat{S}_0\delta(x_3) >$ непрерывен в $L_2(R^2)$. Для этого вычислим его билинейную форму на функциях $\varphi, \psi \in L_2(R^2)$.

Очевидно,

$$(\hat{B}\varphi, \psi) = \Big(< \delta(x_3), \hat{S}_0\delta(x_3) > \varphi, \psi\Big) =$$

$$= \bigg(\Big\langle(1 - \frac{\partial}{\partial x_3})^{-1}\delta(x_3),$$

$$(1 - \frac{\partial}{\partial x_3})\hat{S}_0(1 - \frac{\partial}{\partial x_3})\,(1 - \frac{\partial}{\partial x_3})^{-1}\delta(x_3)\Big\rangle\,\varphi, \psi\bigg) =$$

$$= \bigg((1 - \frac{\partial}{\partial x_3})\hat{S}_0(1 - \frac{\partial}{\partial x_3})\,\varphi \otimes (1 - \frac{\partial}{\partial x_3})^{-1}\delta(x_3),$$

$$\psi \otimes (1 - \frac{\partial}{\partial x_3})^{-1}\delta(x_3)\bigg).$$

Так как $S_0 \in S^{1,0}_{-4}$, то оператор $(1 - \frac{\partial}{\partial x_3})\hat{S}_0(1 - \frac{\partial}{\partial x_3})$ ограничен в $L_2(R^3)$.

Таким образом,

$$|(\hat{B}\varphi, \psi)| \le c_1\|(1 - \frac{\partial}{\partial x_3})^{-1}\delta(x_3)\|^2_{L_2(R^1)} \cdot \|\varphi\|_{L_2(R^2)} \cdot \|\psi\|_{L_2(R^2)}.$$

Очевидно, $(1 - \frac{\partial}{\partial x_3})^{-1}\delta(x_3) \in L_2(R^1)$, то есть

$$|(\hat{B}\varphi, \psi)| \le c_2 \cdot \|\varphi\|_{L_2(R^2)} \cdot \|\psi\|_{L_2(R^2)}.$$

Откуда следует непрерывность оператора $\hat{B}$ на $L_2(R^2)$.

Итак,

$$\hat{W} = \hat{B}_0 + \hat{B},$$

где

$$\hat{B}_0 = < \delta(x_3), \hat{r}_0(i\eta)\delta(x_3) >,$$

а $\hat{B}$ — непрерывный оператор.

Вычислим ядро $\mathcal{A}(q_1, q_2, x_3, p_1, p_2, y_3)$ параметрикса $\hat{r}_0(i\eta)$, имеющего символ $\dfrac{1}{\alpha(i\eta)}$, по переменным x_3, y_3, считая переменные p_1, p_2, q_1, q_2 фиксированными параметрами.

Для этого применим соотношение (29), интегрируя только по переменной p_3.

В результате получим

$$\mathcal{A}(q_1, q_2, x_3, p_1, p_2, y_3) = \\ = -\frac{1}{2S(i\eta)} e^{\dfrac{-|x_3 - y_3| \cdot S(i\eta) + i(x_3 - y_3) \cdot (\nabla f, p)}{1 + (\nabla f)^2}},$$

где

$$S(i\eta) = \sqrt{(p_{\|}^2 + a^2\eta^2)(1 + |\nabla f|^2) - (\nabla f, p)^2}, \quad \mathrm{Re} S(i\eta) > 0.$$

Следовательно символ Вейля B_0 оператора $\hat{B}_0$ равен

$$B_0 = -\frac{1}{2S(i\eta)}.$$

Таким образом,

$$\hat{\mathcal{D}}_1 = -\frac{1}{\eta^2}(\hat{B}_0 + \hat{B})(a^2\eta^2(I_2 + \nabla f \otimes \nabla f) - \nabla_{\|} \otimes \nabla_{\|}).$$

Очевидно,

$$\hat{\mathcal{D}}_1 = -\frac{1}{\eta^2}\hat{B}_1(1 - \Delta_{\|})^{-1/2}(a^2\eta^2(I_2 + \nabla f \otimes \nabla f) - \nabla_{\|} \otimes \nabla_{\|}),$$

где
$$\hat{B}_1 = \hat{B}_0(1-\Delta_{\|})^{1/2} + \hat{B}(1-\Delta_{\|})^{1/2}.$$
Оператор $\hat{B}_0(1-\Delta_{\|})^{1/2}$ — ограничен, так как его символ принадлежит классу $S_0^{1,0}$.

Далее
$$\hat{B}(1-\Delta_{\|})^{1/2} = (\delta(x_3), \hat{S}_0\delta(x_3))(1-\Delta_{\|})^{1/2} =$$
$$= (\delta(x_3), \hat{S}_0(1-\Delta_{\|})^{1/2}\delta(x_3)),$$
и ограниченность оператора $\hat{B}(1-\Delta_{\|})^{1/2}$ можно показать так же, как мы показывали ограниченность оператора $\hat{B}$.

Отсюда видно, что если все производные функции f достаточно малы, то
$$c_1\|\varphi\|_{\mathcal{L}_0} \leq \sum_{i=1}^{2}(\mathcal{D}_1\varphi_i, \varphi_i)_{L_2^2(R^2)} \leq c_2\|\varphi\|_{\mathcal{L}_0},$$
где
$$c_1, c_2 = \text{const}.$$
Пусть теперь $\lambda = \xi + i\eta$.

Очевидно,
$$v_\lambda = \hat{R}(\bar{\lambda})Q^*\varphi = \hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta I - \hat{A})\hat{R}(-i\eta)Q^*\varphi. \tag{36}$$
Тогда
$$\|v_\lambda\| \leq \|\hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta I - \hat{A})\| \cdot \|\hat{R}(-i\eta)Q^*\varphi\|,$$
где $\|\hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta I - \hat{A})\| = \dfrac{|\xi| + \sqrt{\xi^2 + 4\eta^2}}{2\eta} \leq \dfrac{3|\lambda|}{2\operatorname{Im}\lambda}$.

Отсюда
$$\|v_\lambda\| \leq \frac{3}{2}c_1\frac{|\lambda|}{\operatorname{Im}\lambda}, \tag{37}$$
где $c_1 = \text{const}$.

Следовательно, если $\varphi \in \mathcal{L}_0$, то $v_\lambda \in L_2^6(R^3)$.

Обратно, пусть $v_\lambda \in L_2^6(R^3)$.

Из формулы (36) получаем, что

$$\hat{R}(-i\eta)Q^*\varphi = (\hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta - \hat{A}))^{-1}v_\lambda.$$

Откуда

$$\|\hat{R}(-i\eta)Q^*\varphi\| \leq \frac{1}{\|\hat{R}(\bar{\lambda})(-i\eta - \hat{A})\|} \cdot \|v_\lambda\| = \frac{2\eta}{|\xi| + \sqrt{\xi^2 + 4\eta^2}} \cdot \|v_\lambda\|.$$

Следовательно, $\|\hat{R}(-i\eta)Q^*\varphi\|_{L_2^6(R^3)} < \infty$. А отсюда следует, что $\varphi \in \mathcal{L}_0$.

Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2).

Поскольку

$$\mathcal{E}_\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\bar{\lambda}^2 I_3)(a^2\bar{\lambda}^2 + \Delta)^{-1}Q^*\varphi_1 - ai\operatorname{rot}(a^2\bar{\lambda}^2 + \Delta)^{-1}Q^*\varphi_2$$

и

$$\mathcal{H}_\lambda = ai\operatorname{rot}(a^2\bar{\lambda}^2 + \Delta)^{-1}Q^*\varphi_1 + \frac{1}{\bar{\lambda}}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\bar{\lambda}^2 I_3)(a^2\bar{\lambda}^2 + \Delta)^{-1}Q^*\varphi_2,$$

то учитывая,что $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$ и $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\lambda^2 I_3)(a^2\lambda^2 + \Delta)^{-1} = \operatorname{div}$, получим соотношения

$$\operatorname{div}\mathcal{E}_\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}}\operatorname{div}Q^*\varphi_1,$$

$$\operatorname{div}\mathcal{H}_\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}}\operatorname{div}Q^*\varphi_2.$$

Прямые вычисления показывают, что $\operatorname{div}Q^*\varphi_i = \delta_S \cdot \operatorname{div}\varphi_i$, то есть

$$\operatorname{div}\mathcal{E}_\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}}\delta_S \cdot \operatorname{div}\varphi_1,$$

$$\operatorname{div}\mathcal{H}_\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}}\delta_S \cdot \operatorname{div}\varphi_2.$$

Отсюда следует утверждение 2).

Теорема доказана.

Определение. *Определим оператор $\hat{R}''(\lambda)$ как оператор, имеющий символ Вейля*

$$R''(\lambda) = r''(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}G(\lambda) & -aiB \\ aiB & \frac{1}{\lambda}G(\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$G(\lambda) = a^2\lambda^2 I_3 - p \otimes p,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -ip_3 & ip_2 \\ ip_3 & 0 & -ip_1 \\ -ip_2 & ip_1 & 0 \end{pmatrix},$$

и $r''(\lambda)$ — символ Вейля оператора $\hat{U}_1^{-1}\hat{r}_0(\lambda)\hat{U}_1$, где $\hat{r}_0(\lambda)$ — параметрикс оператора $\hat{U}_1(a^2\lambda^2 + \Delta)\hat{U}_1^{-1}$.

Определение. *Определим операторы $\hat{m}''_\pm(\lambda)$ с помощью следующих соотношений*

$$\hat{m}''_\pm(\lambda) = Q_\pm \hat{R}''(\lambda) Q^*.$$

Предложение 3.1. *Операторы $\hat{m}''_\pm(\lambda)$ имеют вид*

$$\hat{m}''_\pm(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{m}''_1(\lambda) & \hat{m}''_{2\pm}(\lambda) \\ -\hat{m}''_{2\pm}(\lambda) & \hat{m}''_1(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{38}$$

причем символы Вейля операторов $\hat{m}''_1(\lambda), \hat{m}''_{2\pm}(\lambda)$ имеют вид

$$m''_1(\lambda) = \frac{1}{2\lambda S(\lambda)} \cdot \begin{pmatrix} -a^2\lambda^2 + p_1^2 & p_1p_2 \\ p_1p_2 & -a^2\lambda^2 + p_2^2 \end{pmatrix} + O_1(\nabla f),$$

$$m''_{2\pm}(\lambda) = \pm\frac{ai}{2}\cdot J + O_2(\nabla f),$$

где

$$O_1(\nabla f) = -\frac{a^2\lambda}{2S(\lambda)}\nabla f\otimes\nabla f,$$

$$O_2(\nabla f) = \frac{ai}{2S(\lambda)}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial q_1} & \dfrac{\partial f}{\partial q_2}\\ -\dfrac{\partial f}{\partial q_1} & -\dfrac{\partial f}{\partial q_2}\end{pmatrix} + \frac{a}{2S(\lambda)}(-\frac{i}{2}\Delta f + 2(\nabla f, p))\cdot J,$$

$$J = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$S(\lambda) = \sqrt{(p_{\|}^2 - a^2\lambda^2)(1 + |\nabla f|^2) - (\nabla f, p)^2},$$

$$p_{\|} = \{p_1, p_2\}.$$

Доказательство. Непосредственно из определения операторов $\hat{m}''_{\pm}(\lambda)$ следует, что они имеют следующую блочную структуру

$$\hat{m}''_{\pm}(\lambda) = \begin{pmatrix}\hat{m}''_{1\pm}(\lambda) & \hat{m}''_{2\pm}(\lambda)\\ -\hat{m}''_{2\pm}(\lambda) & \hat{m}''_{1\pm}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

Вычислим оператор $\hat{m}''_{1\pm}(\lambda)$.

$$(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\lambda^2 I_3)Q^*\varphi_i =$$

$$= \begin{pmatrix}a^2\lambda^2\varphi_{i1} + \dfrac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div}\varphi_i\\ a^2\lambda^2\varphi_{i2} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\operatorname{div}\varphi_i\\ a^2\lambda^2(\varphi_i, \nabla f)\end{pmatrix}\delta_S + \begin{pmatrix}-\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\operatorname{div}\varphi_i\\ -\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\operatorname{div}\varphi_i\\ \operatorname{div}\varphi_i\end{pmatrix}\delta'_S.$$

$$Q_{\pm}\hat{r}(\lambda)(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\lambda^2 I_3)Q^*\varphi_i = (\hat{r}(\lambda)\,\cdot$$

$$\cdot\left.\left(\begin{pmatrix} a^2\lambda^2\varphi_{i1} + \dfrac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div}\varphi_i + a^2\lambda^2\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi_i,\nabla f) \\ \\ a^2\lambda^2\varphi_{i2} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\operatorname{div}\varphi_i + a^2\lambda^2\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi_i,\nabla f)\end{pmatrix}\delta_S\right)\right|_{x_3=f(x_1,x_2)\pm 0}$$

Таким образом,

$$\hat{m}_{1\pm}(\lambda) = Q_{\pm}\hat{r}(\lambda)(\operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\lambda^2 I_3)Q^* =$$

$$= <\delta_{S\pm 0}, \hat{r}(\lambda)\delta_S> (a^2\lambda^2 I_2 + a^2\lambda^2\nabla f\otimes\nabla f + \nabla_{\|}\otimes\nabla_{\|}).$$

Таким образом,

$$m''_{1\pm}(\lambda) = \frac{1}{2\lambda S(\lambda)}(p_{\|}\otimes p_{\|} - a^2\lambda^2(I_2 + \nabla f\otimes\nabla f)).$$

Теперь вычислим оператор $\hat{m}''_{2\pm}(\lambda)$.

$$\operatorname{rot} Q^*\varphi_i = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_2}(\varphi_i,\nabla f) \\ \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_1}(\varphi_i,\nabla f) \\ \\ \dfrac{\partial\varphi_{i2}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial\varphi_{i1}}{\partial x_2}\end{pmatrix}\cdot\delta_S +$$

$$+\begin{pmatrix} -\varphi_{i2} - \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\nabla f,\varphi_i) \\ \\ \varphi_{i1} + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\nabla f,\varphi_i) \\ \\ \varphi_{i1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \varphi_{i2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\end{pmatrix}\cdot\delta'_S.$$

$$\hat{m}_{2\pm}(\lambda)\varphi_i = Q_{\pm}\hat{r}(\lambda)\operatorname{rot} Q^*\varphi_i =$$

$$= \hat{r}(\lambda) \begin{pmatrix} (\nabla f, \nabla \varphi_{i2}) + (\nabla \frac{\partial f}{\partial x_2}, \varphi_i) \\ \\ -(\nabla f, \nabla \varphi_{i1}) - (\nabla \frac{\partial f}{\partial x_1}, \varphi_i) \end{pmatrix} \cdot \delta_S \Bigg|_{x_3 = f(x_1, x_2) \pm 0} +$$

$$+ \hat{r}(\lambda) \begin{pmatrix} -(1 + |\nabla f|^2)\varphi_{i2} \\ \\ (1 + |\nabla f|^2)\varphi_{i1} \end{pmatrix} \cdot \delta'_S \Bigg|_{x_3 = f(x_1, x_2) \pm 0}$$

Или

$$\hat{m}_{2\pm}(\lambda) = < \delta_{S\pm 0}, \hat{r}(\lambda)\delta_S > (F - (\nabla f, \nabla)J) +$$
$$+ < \delta_{S\pm 0}, \hat{r}(\lambda)\delta'_S > (1 + |\nabla f|^2)J,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \\ -\frac{\partial f}{\partial x_1} & -\frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Представим оператор $< \delta_{S\pm 0}, \hat{r}(\lambda)\delta'_S >$ в виде

$$< \delta_{S\pm 0}, \hat{r}(\lambda)\delta'_S > = < \delta_{\pm 0}, \hat{r}_0(\lambda)\delta'_0 > + < \delta_{\pm 0}, \hat{S}_0\delta'_0 >,$$

где $\hat{r}_0(\lambda)$ — параметрикс оператора $\hat{U}_1\hat{r}(\lambda)\hat{U}_1^{-1}$, а символ остатка $\hat{S}_0$ принадлежит классу $S^{1,0}_{-4}$.

Таким образом оператор

$$< \delta_{\pm 0}, \hat{S}_0\delta'_0 > =$$

$$= < (1 - \frac{\partial}{\partial x_3})^{-1}\delta(x_3 \pm 0), (1 - \frac{\partial}{\partial x_3})\hat{S}_0(1 - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})(1 - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})^{-1}\delta'(x_3) >$$

является ограниченным.

Так как оператор $< \delta_{\pm 0}, \hat{r}_0(\lambda)\delta_0 >$ имеет символ $-\dfrac{1}{2S(\lambda)}$, а оператор $< \delta_{\pm 0}, \hat{r}_0(\lambda)\delta_0' >$ имеет символ $\dfrac{\pm S(\lambda) - i(\nabla f, p)}{1 + |\nabla f|^2} \cdot \dfrac{1}{2S(\lambda)}$, то

$$\bar{m}_{2\pm}''(\lambda) = \pm\frac{ai}{2}J + \frac{ai}{2S(\lambda)}F + \frac{a}{2S(\lambda)}\left(-\frac{i}{2}\bigtriangleup f + 2(\nabla f, p)\right)J.$$

Предложение доказано.

Определение: *Определим операторы $\hat{C}''(\lambda)$ следующим образом*

$$\hat{C}''(\lambda) = \begin{pmatrix} \hat{C}_{11}''(\lambda) & \hat{C}_{12}''(\lambda) \\ \hat{C}_{21}''(\lambda) & \hat{C}_{22}''(\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{C}_{11}'' = (\hat{m}_1'' + Z\hat{m}_{2+}'')^{-1} + (\hat{m}_1'' + Z\hat{m}_{2+}'')^{-1}(I - \hat{O}_2 \cdot (Z\hat{m}_1'' - \hat{m}_2)^{-1})\times$$

$$\times(I - Z\hat{N}_1 + Z\hat{N}_1\hat{O}_2 \cdot (Z\hat{m}_1'' - \hat{m}_2)^{-1})^{-1}Z\hat{N}_1,$$

$$\hat{C}_{12}'' = -(\hat{m}_1'' + Z\hat{m}_2)^{-1}(I + \hat{N}_2 + \hat{N}_2 Z\hat{O}_2 \cdot (\hat{m}_1'' + Z\hat{m}_2)^{-1})^{-1}\hat{N}_2 Z,$$

$$\hat{C}_{21}'' = -(\hat{m}_1'' - Z^{-1}\hat{m}_2)^{-1}Z^{-1}\times$$

$$\times(I - Z\hat{N}_1 + Z\hat{N}_1\hat{O}_2 \cdot (\hat{m}_1'' - Z^{-1}\hat{m}_2)^{-1}Z^{-1})^{-1}Z\hat{N}_1,$$

$$\hat{C}_{22}'' = (\hat{m}_1'' - Z^{-1}\hat{m}_{2+}'')^{-1} -$$

$$-(\hat{m}_1'' - Z^{-1}\hat{m}_{2+}'')^{-1}Z^{-1}(I + \hat{O}_2 \cdot (\hat{m}_1'' + Z\hat{m}_2)^{-1})\times$$

$$\times(I + \hat{N}_2 + \hat{N}_2 Z\hat{O}_2(\hat{m}_1'' + Z\hat{m}_2)^{-1})^{-1}\hat{N}_2 Z,$$

$$\hat{m}_2 = \frac{ai}{2}J,$$

$$\hat{N}_1 = \hat{O}_2 \cdot (\hat{m}_1'' + Z\hat{m}_{2+}'')^{-1},$$

$$\hat{N}_2 = \hat{O}_2 \cdot (\hat{m}_1'' - Z^{-1}\hat{m}_{2+}'')^{-1}Z^{-1}.$$

Предложение 3.2. *В случае граничных условий Леонтовича, которым соответствует импедансная матрица (19) и для значений параметра λ с достаточно большой положительной мнимой частью операторы $\hat{C}''(\lambda)$ существуют и равномерно ограничены, если все производные функции f достаточно малы по абсолютной величине, и для $b = b(\lambda)$ выполнены условия теоремы 2.2.*

Доказательство. Рассмотрим сначала оператор $\hat{m}_1''(\lambda)+$ $+\mathcal{Z}\hat{m}_{2+}''(\lambda)$.

Его символ Вейля равен

$$m_1''(\lambda) + \mathcal{Z}m_{2+}''(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda S(\lambda)}(a^2\lambda^2(I_2 + \nabla f \otimes \nabla f) - p_{||} \otimes p_{||})+$$

$$+\frac{ai}{2}\mathcal{Z} \cdot J + \frac{a}{2S(\lambda)}\mathcal{Z}(-\frac{i}{2}\Delta f + 2(\nabla f, p))J + \frac{ai}{2S(\lambda)}\mathcal{Z}F,$$

где

$$F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что оператор $(\hat{m}_1(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$ является параметриксом для оператора $\hat{m}_1''(\lambda) + \mathcal{Z}\hat{m}_{2+}''(\lambda)$.

Нетрудно вычислить символ Вейля M оператора $(\hat{m}_1(\lambda)+$ $+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$.

$$M = (m_1(\lambda) + \mathcal{Z}m_2(\lambda))^{-1} = \frac{2\sqrt{|p_{||}|^2 - a^2\lambda^2}}{abi\sqrt{|p_{||}|^2 - a^2\lambda^2} - a^2\lambda}I_2-$$

$$-\frac{2\sqrt{|p_{||}|^2 - a^2\lambda^2}}{(abi\sqrt{|p_{||}|^2 - a^2\lambda^2} - a^2\lambda)(abi\lambda - \sqrt{|p_{||}|^2 - a^2\lambda^2})}p_{||} \otimes p_{||}.$$

Рассмотрим символ оператора $(\hat{m}_1(\lambda) + \mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}\times$
$\times(\hat{m}_1''(\lambda) + \mathcal{Z}\hat{m}_{2+}''(\lambda))$.

Очевидно он равен

$$M\#(m_1''(\lambda) + \mathcal{Z}m_{2+}''(\lambda)) = M\cdot(m_1''(\lambda) + \mathcal{Z}m_{2+}''(\lambda)) + \theta_0,$$

где

$$\theta_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{2i}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial u}, J\frac{\partial}{\partial u'}\right)^k\bigg|_{u'=u} M(u')(m_1''(\lambda) + \mathcal{Z}m_{2+}''(\lambda)).$$

Так как $M = (m_1(\lambda)+\mathcal{Z}m_2(\lambda))^{-1} \in S_0^{1,0}$ и $(m_1''(\lambda)+\mathcal{Z}m_{2+}''(\lambda)) \in S_1^{1,0}$, то $\theta_0 \in S_0^{1,0}$. То есть θ_0 является символом ограниченного оператора.

Кроме того символу θ_0 соответствует оператор, норма которого мала, если нормы всех производных функции f достаточно малы.

Вычислим обычное произведение символов M и $m_1''(\lambda) + \mathcal{Z}m_{2+}''(\lambda)$. Очевидно

$$M\cdot(m_1''(\lambda) + \mathcal{Z}m_{2+}''(\lambda)) = I_2 + A_1,$$

где

$$A_1 =$$

$$= \frac{a^2\lambda(S - \sqrt{|p_{||}|^2 - a^2\lambda^2}) + ab\sqrt{|p_{||}|^2 - a^2\lambda^2}(-\frac{i}{2}\Delta f + 2(\nabla f, p))}{S(abi\sqrt{|p_{||}|^2 - a^2\lambda^2} - a^2\lambda)} I_2 -$$

$$-a^2\lambda\nabla f\otimes\nabla f + abiF -$$

$$-\frac{abi(S - \sqrt{|p_{||}|^2 - a^2\lambda^2}) + ab(-\frac{i}{2}\Delta f + 2(\nabla f, p))}{abi\lambda\sqrt{|p_{||}|^2 - a^2\lambda^2} - a^2\lambda^2 + |p_{||}|^2} p_{||}\otimes p_{||} +$$

$$+\frac{1}{abi\lambda\sqrt{|p_{||}|^2 - a^2\lambda^2} - a^2\lambda^2 + |p_{||}|^2}(a^2\lambda(p, \nabla f) - abi(p_1 + p_2))p\otimes\nabla f.$$

Очевидно, A_1 равномерно ограничен по p и $\|\hat{A}_1\| \longrightarrow 0$ при малых производных функции f.

Итак,

$$(\hat{m}_1(\lambda) + \mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}(\hat{m}_1''(\lambda) + \mathcal{Z}\hat{m}_{2+}''(\lambda)) = I_2 + \hat{A}_2,$$

где $\hat{A}_2$ — ограниченный оператор, норма которого сколь угодно мала при достаточно малых абсолютных значениях всех производных функции f.

Отсюда

$$(\hat{m}_1''(\lambda) + \mathcal{Z}\hat{m}_{2+}''(\lambda))^{-1} = (I_2 + A_2)^{-1}(\hat{m}_1(\lambda) + \mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}.$$

Это означает близость операторов $(\hat{m}_1''(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_{2+}''(\lambda))^{-1}$ и $(\hat{m}_1(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$.

Также показывается близость операторов $(\hat{m}_1''(\lambda)+Z\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$ и $(\hat{m}_1(\lambda) + Z\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$.

Проделав аналогичные вычисления для операторов $(\hat{m}_1''(\lambda) - \mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_{2+}''(\lambda))^{-1}$ и $(\hat{m}_1''(\lambda)-\mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$, можно убедиться, что они близки к оператору $(\hat{m}_1(\lambda) - \mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$, если все производные функции f достаточно малы по модулю.

Таким образом, согласно теоремы 2.2 операторы $(\hat{m}_1''(\lambda) + \mathcal{Z}\hat{m}_{2+}''(\lambda))^{-1}$, $(\hat{m}_1''(\lambda)+\mathcal{Z}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$, $(\hat{m}_1''(\lambda)-\mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_{2+}''(\lambda))^{-1}$ и $(\hat{m}_1''(\lambda)-\mathcal{Z}^{-1}\hat{m}_2(\lambda))^{-1}$ существуют и равномерно ограничены, если выполнены условия предложения.

Очевидно, если все производные функции f достаточно малы по модулю, то норма оператора $\hat{O}_2$ сколь угодно мала.

Отсюда в силу доказанного выше, операторы $\hat{C}_{12}''(\lambda)$ и $\hat{C}_{21}''(\lambda)$ являются сколь угодно малыми по норме, а операторы $\hat{C}_{11}''(\lambda)$ и $\hat{C}_{22}''(\lambda)$ равномерно ограничены.

Таким образом операторы $\hat{C}''(\lambda)$ равномерно ограничены.

Предложение 3.2 доказано.

Теорема 3.2. *Пусть $\hat{A}_Z$ — оператор, определенный соотношением (6), где $\mathcal{Z} = -bJ$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и для значений пара-*

метра λ с достаточно большой положительной мнимой частью функция $b = b(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $|b| < c$, *где* $c = \mathrm{const}$;

б) $\mathrm{Re}\, b < b_0 < 0, \quad b_0 = \mathrm{const}$;

в) $|\mathrm{Re}\, b| \geq \theta |\mathrm{Im}\, b|$, *где* $\theta = \max\{1, \dfrac{|\mathrm{Re}\,\lambda|}{\mathrm{Im}\,\lambda}\}$.

Кроме того пусть все производные функции f достаточно малы по абсолютной величине.

Тогда для значений параметра λ с достаточно большой положительной мнимой частью резольвента $\hat{R}_Z(\lambda)$ оператора $\hat{A}_Z$ существует и удовлетворяет неравенству

$$\|\hat{R}_Z(\lambda)\| \leq c|\lambda|^2, \qquad \text{где } c = \mathrm{const}.$$

Доказательство. Покажем, что для оператора

$$\hat{R}''_Z(\lambda) = \hat{R}''(\lambda) - \hat{R}''(\lambda) Q^* \hat{C}''(\lambda) Q \hat{R}''(\lambda) \tag{39}$$

выполняется равенство

$$(\lambda I - \hat{A}_Z)\hat{R}''_Z(\lambda) = I + \hat{\beta}(\lambda),$$

где $\hat{\beta}(\lambda)$ — оператор с малой нормой.

Для этого оценим норму оператора

$$(\lambda I_6 - \hat{A}_Z)\hat{R}''_Z(\lambda) = \pi_S(\lambda I_6 - \hat{A})\hat{R}''_Z(\lambda).$$

Итак,

$$\pi_S(\lambda I_6 - \hat{A})\hat{R}''_Z(\lambda) = \pi_S(\lambda I_6 - \hat{A})\hat{R}''(\lambda)(I_6 - Q^*\hat{C}''(\lambda)Q\hat{R}''(\lambda)).$$

Очевидно,

$$(\lambda I_6 - \hat{A})\hat{R}''(\lambda) = I_6 + (\lambda I_6 - \hat{A})(\hat{R}''(\lambda) - \hat{R}(\lambda)).$$

Обозначим

$$\hat{T}(\lambda) = (\lambda I_6 - \hat{A})(\hat{R}''(\lambda) - \hat{R}(\lambda)),$$

тогда

$$\pi_S(\lambda I_6 - \hat{A})\hat{R}''_Z(\lambda) = \pi_S(I_6 + \hat{T}(\lambda))(I_6 - Q^*\hat{C}''(\lambda)Q\hat{R}''(\lambda)).$$

Или

$$\pi_S(\lambda I_6 - \hat{A})\hat{R}''_Z(\lambda) = I_6 + \pi_S\hat{T}(\lambda) - \pi_S\hat{T}(\lambda)Q^*\hat{C}''(\lambda)Q\hat{R}''(\lambda). \quad (40)$$

1) Оценим сначала норму оператора $\pi_S\hat{T}(\lambda)$.

Лемма 3.1. *Символ Вейля оператора* $(\hat{R}''(\lambda) - \hat{R}(\lambda))$ *принадлежит классу* $S^{1,0}_{-2}$, *и*

$$\|\hat{R}''(\lambda) - \hat{R}(\lambda)\| \le c|\lambda|^{-4},$$

$$\text{где} \qquad c = \text{const}.$$

Доказательство. Если обозначить через $G(\lambda)$ символ Вейля оператора $\hat{G}(\lambda) = \operatorname{grad}\operatorname{div} + a^2\lambda^2 I_3$, через B — символ Вейля оператора $\hat{B} = \operatorname{rot}$, а через $r''(\lambda)$ — символ оператора $\hat{U}_1^{-1}\hat{r}_0(\lambda)\hat{U}_1$, через $r(\lambda)$ — символ оператора $\hat{r}(\lambda) = (a^2\lambda^2 + \Delta)^{-1}$, то

$$R''(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}G(\lambda)\cdot r''(\lambda) & -aiB\cdot r''(\lambda) \\ aiB\cdot r''(\lambda) & \frac{1}{\lambda}G(\lambda)\cdot r''(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$R'(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}G(\lambda)\# r''(\lambda) & -aiB\# r''(\lambda) \\ aiB\# r''(\lambda) & \frac{1}{\lambda}G(\lambda)\# r''(\lambda) \end{pmatrix},$$

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}G(\lambda)\cdot r(\lambda) & -aiB\cdot r(\lambda) \\ aiB\cdot r(\lambda) & \frac{1}{\lambda}G(\lambda)\cdot r(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Здесь символ # означает, как и раньше, произведение символов по Вейлю.

Таким образом $R(\lambda)$ — символ Вейля резольвенты $\hat{R}(\lambda)$, а $R'(\lambda), R''(\lambda)$ — символы Вейля ее приближений $\hat{R}'(\lambda), \hat{R}''(\lambda)$.

Очевидно,

$$\hat{R}''(\lambda) - \hat{R}(\lambda) = (\hat{R}''(\lambda) - \hat{R}'(\lambda)) + (\hat{R}'(\lambda) - \hat{R}(\lambda)).$$

Очевидно,

$$G(\lambda) = a^2\lambda^2 I_3 - p \otimes p,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -ip_3 & ip_2 \\ ip_3 & 0 & -ip_1 \\ -ip_2 & ip_1 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$r(\lambda) = a^2\lambda^2 - |p|^2.$$

Исследуем сначала оператор $\hat{R}''(\lambda) - \hat{R}'(\lambda)$.

Вычислим символ Вейля оператора $\hat{R}'(\lambda)$, применив формулу (32) для вычисления произведения символов по Вейлю.

Так как слагаемое, соответствующее значению индекса $r = 0$, совпадает с обычным произведением символов, то

$$R'(\lambda) = R''(\lambda) + \theta_0,$$

где

$$\theta_0 =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!}\left(\frac{1}{2i}\right)^r \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i'} - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i'}\right)^r \Bigg|_{p=p',q=q'} K(\lambda, u')\frac{1}{\alpha(\lambda, u)},$$

и

$$K(\lambda, u') = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}G(\lambda) & -aiB \\ aiB & \frac{1}{\lambda}G(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Очевидно

$$\hat{R}'(\lambda) = \hat{U}_1^{-1}\hat{r}_0(\lambda)\hat{U}_1\hat{K}(\lambda) =$$
$$= \hat{U}_1^{-1}\hat{r}_0(\lambda)\hat{\tilde{K}}(\lambda)\hat{U}_1,$$

где

$$\hat{\tilde{K}}(\lambda) = \hat{U}_1\hat{K}(\lambda)\hat{U}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}\hat{U}_1G(\lambda)\hat{U}_1^{-1} & -ai\hat{U}_1B\hat{U}_1^{-1} \\ ai\hat{U}_1B\hat{U}_1^{-1} & \frac{1}{\lambda}\hat{U}_1G(\lambda)\hat{U}_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, θ_0 имеет теже свойства, что и остаток нулевого порядка $\tilde{\theta}_0$ для разложения произведения символов операторов $\hat{r}_0(\lambda)$ и $\hat{\tilde{K}}(\lambda)$.

Обозначим

$$l = \{l_1, l_2, l_3\},$$

где

$$l_1 = -ip_1 + i\frac{\partial f}{\partial q_1}p_3, \quad l_2 = -ip_2 + i\frac{\partial f}{\partial q_2}p_3, \quad l_3 = -ip_3,$$

тогда

$$\tilde{G}(\lambda) = a^2\lambda^2 I_3 + l \otimes l + \rho_1(\nabla f),$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{pmatrix} + \rho_2(\nabla f),$$

и

$$r_0(\lambda) = \frac{1}{a^2\lambda^2 + |l|^2},$$

где $\rho_1(\nabla f), \rho_2(\nabla f)$ — символы операторов, имеющих бесконечно малые нормы, если все производные функции f малы.

Так как p входит в выражение для $\rho_1(\nabla f)$ и $\rho_2(\nabla f)$ только в первой степени, то $\rho_1(\nabla f)$ и $\rho_2(\nabla f)$ принадлежат классу $S_1^{1,0}$. С другой стороны, символ $\frac{1}{\alpha(\lambda)}$ принадлежит классу $S^{1,0}_{-2}$. Значит операторы, соответствующие символам $\rho_i(\nabla f)\#\frac{1}{\alpha(\lambda)}, (i = 1,2)$ ограничены. Учитывая, что произведение символов по Вейлю непрерывно, символы $\rho_1(\nabla f)$ и $\rho_2(\nabla f)$ имеют малую норму, если все производные функции f малы, и норма $\frac{1}{\alpha(\lambda)}$ ограничена, заключаем, что нормы символов $\rho_i(\nabla f)\#\frac{1}{\alpha(\lambda)}, (i = 1,2)$ малы, если все производные функции f малы.

Значит мы можем пренебречь соответствующими этим символам слагаемыми, входящими в выражение для $\tilde{\theta}_0$.

Непосредственные вычисления показывают, что слагаемое, отвечающее значению индекса $r = 1$, равно нулю.

Слагаемое для $r = 2$ содержит производные вида

$$\frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} l \otimes l \cdot \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} \frac{1}{a^2\lambda^2 + |l|^2}$$

и

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} l \otimes l \cdot \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \frac{1}{a^2\lambda^2 + |l|^2},$$

а также производные более высоких порядков.

Легко проверить, что все они будут принадлежать классу $S^{1,0}_{-2}$, и их нормы с увеличением $|\lambda|$ убывают не медленнее, чем $|\lambda|^{-4}$.

Все эти утверждения верны и для произведения $\tilde{B}\#\frac{1}{\alpha(\lambda)}$.

То есть, слагаемое при $r = 1$ равно нулю, а остальные слагаемые принадлежат классу $S^{1,0}_{-2}$, и их нормы убывают не медленнее, чем $|\lambda|^{-4}$.

Теперь ясно, что символ оператора $\hat{R}''(\lambda) - \hat{R}'(\lambda)$ принадлежит классу $S^{1,0}_{-2}$, и

$$\|\hat{R}''(\lambda) - \hat{R}'(\lambda)\| \leq c_1|\lambda|^{-4}, \qquad \text{где } c_1 = \text{const}.$$

Рассмотрим оператор $\hat{R}'(\lambda) - \hat{R}(\lambda)$.

Очевидно,

$$\hat{R}'(\lambda) - \hat{R}(\lambda) = \hat{R}(\lambda)(\hat{r}''(\lambda) \cdot \hat{r}(\lambda)^{-1} - I) =$$

$$= \hat{R}(\lambda)(\hat{r}''(\lambda) \cdot (a^2\lambda^2 + \Delta) - I) =$$

$$= \hat{R}(\lambda)\hat{U}_1^{-1}(\hat{r}_0(\lambda)\hat{\alpha}(\lambda) - I)\hat{U}_1.$$

Очевидно, символ оператора $\hat{r}''(\lambda) \cdot (a^2\lambda^2 + \Delta) - I$ имеет такие же свойства, как и символ оператора $\hat{r}_0(\lambda)\hat{\alpha}(\lambda) - I$, равный $\dfrac{1}{\alpha(\lambda)} \# \alpha(\lambda) - I$.

Нетрудно проверить, что $(\alpha(\lambda) \# \dfrac{1}{\alpha(\lambda)} - I)$ принадлежит классу $S^{1,0}_{-2}$, и $\|(\alpha(\lambda) \# \dfrac{1}{\alpha(\lambda)} - I)\|$ убывает не медленнее, чем $|\lambda|^{-4}$.

Так как оператор $\hat{R}(\lambda)$ равномерно ограничен, то

$$R'(\lambda) - R(\lambda) \in S^{1,0}_{-2},$$

и

$$\|\hat{R}'(\lambda) - \hat{R}(\lambda)\| \leq c_2|\lambda|^{-4}, \qquad \text{где } c_2 = \mathrm{const}.$$

А значит

$$R''(\lambda) - R(\lambda) \in S^{1,0}_{-2},$$

и

$$\|\hat{R}''(\lambda) - \hat{R}(\lambda)\| \leq c_3|\lambda|^{-4}, \qquad \text{где } c_3 = \mathrm{const}.$$

Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что символ оператора $\hat{T}(\lambda)$ принадлежит классу $S^{1,0}_{-1}$, и его норма убывает не медленнее, чем $|\lambda|^{-3}$.

2) Рассмотрим третье слагаемое, входящее в выражение (40), то есть следующий оператор

$$\pi_S \hat{T}(\lambda) Q^* \hat{C}''(\lambda) Q \hat{R}''(\lambda) =$$

$$= \pi_S \hat{T}(\lambda)(\lambda I_6 - \hat{A})\hat{R}(\lambda) Q^* \hat{C}''(\lambda) Q \hat{R}(\lambda)(\lambda I_6 - \hat{A})\hat{R}''(\lambda) =$$

$$= \pi_S \hat{T}(\lambda)(\lambda I_6 - \hat{A})\hat{R}(\lambda)Q^*\hat{C}''(\lambda)Q\hat{R}(\lambda)(I_6 + \hat{T}(\lambda)).$$

Так как $\hat{T}(\lambda) \in S_{-1}^{1,0}$ и $(\lambda I - \hat{A}) \in S_1^{1,0}$, то $\hat{T}(\lambda)(\lambda I - \hat{A})$ — ограниченный оператор. Причем его норма убывает не медленнее, чем $|\lambda|^{-2}$.

Мы знаем, что операторы $\hat{C}''(\lambda)$ — равномерно ограниченные операторы.

Для нормы оператора $\hat{R}(\lambda)Q^*$ уже была получена оценка (37), согласно которой

$$\|\hat{R}(\lambda)Q^*\| \le c\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}.$$

Осталось исследовать норму оператора $Q\hat{R}(\lambda)$.

Так как нормы сопряженных операторов совпадают,

$$\|Q\hat{R}(\lambda)\| = \|\hat{R}(\bar{\lambda})Q^*\|.$$

Следовательно имеет место следующее неравенство

$$\|Q\hat{R}(\lambda)\| \le c_1\frac{|\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|}.$$

Теперь мы можем утверждать, что оператор

$$\pi_S\hat{T}(\lambda)Q^*\hat{C}''(\lambda)Q\hat{R}''(\lambda)$$

ограничен, и

$$\|\pi_S\hat{T}(\lambda)Q^*\hat{C}''(\lambda)Q\hat{R}''(\lambda)\| \le \frac{c}{(\mathrm{Im}\lambda)^2}, \qquad \text{где } c = \mathrm{const}.$$

Таким образом,

$$\|\pi_S(\lambda I - \hat{A})\hat{R}''_Z(\lambda) - I\| \le \frac{d}{(\mathrm{Im}\lambda)^2}, \qquad \text{где } d = \mathrm{const}.$$

Значит

$$(\lambda I - \hat{A}_Z)\hat{R}''_Z(\lambda) = I + \hat{\beta}(\lambda),$$

где

$$\|\hat{\beta}(\lambda)\| \leq \frac{d}{(\mathrm{Im}\lambda)^2}.$$

То есть у оператора $(\lambda I - \hat{A}_Z)$ существует правый обратный, который приближенно равен $\hat{R}''_Z(\lambda)$, если $\mathrm{Im}\lambda$ положительна и достаточно велика.

Покажем, что для векторов вида $v = \hat{R}''_Z(\lambda)u$ выполняются импедансные граничные условия.

Применим операторы $Q_\pm$ к вектору v.

$$Q_\pm v = \begin{pmatrix} Q_\pm \mathcal{E} \\ Q_\pm \mathcal{H} \end{pmatrix} = Q\hat{R}''(\lambda)u-$$

$$-Q_\pm \hat{R}''(\lambda)Q^*\hat{C}''(\lambda)Q\hat{R}''(\lambda)u.$$

Или

$$\begin{pmatrix} Q_\pm \mathcal{E} \\ Q_\pm \mathcal{H} \end{pmatrix} = w - \hat{m}''_\pm(\lambda)\hat{C}''(\lambda)w,$$

где

$$w = Q\hat{R}''(\lambda)u.$$

Отсюда

$$Q_\pm \mathcal{E} = (I - \hat{m}''_1\hat{C}''_{11} - \hat{m}''_{2\pm}\hat{C}''_{21})w_1 + (-\hat{m}''_1\hat{C}''_{12} - \hat{m}''_{2\pm}\hat{C}''_{22})w_2,$$

$$Q_\pm \mathcal{H} = (\hat{m}''_{2\pm}\hat{C}''_{11} - \hat{m}''_1\hat{C}''_{21})w_1 + (I + \hat{m}''_{2\pm}\hat{C}''_{12} - \hat{m}''_1\hat{C}''_{22})w_2.$$

Подставив значения операторов $\hat{C}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, получим, что

$$Q_+\mathcal{E} = ZQ_+\mathcal{H},$$

$$Q_-\mathcal{E} = -ZQ_-\mathcal{H},$$

то есть выполнены импедансные условия на границе.

Покажем единственность решения рассматриваемой задачи. Для этого достаточно показать, что существует ограниченный левый обратный оператор для оператора $(\lambda I_6 - \hat{A}^*_{\mathcal{Z}})$, где $\hat{A}^*_{\mathcal{Z}}$ — сопряженный к $\hat{A}_{\mathcal{Z}}$ оператор.

Легко видеть, что оператор, сопряженный к $\hat{A}_{\mathcal{Z}}$ имеет следующий вид

$$\hat{A}^*_{\mathcal{Z}}u = \pi_S \hat{A}u,$$

где оператор $\hat{A}$ задан выражением (3).

$$\mathcal{D}(\hat{A}^*_{\mathcal{Z}}) = \{u \in L^6_2(R^3) : \hat{A}u \in L^6_2(R^3|S), \text{существуют } Q_\pm\mathcal{E}, Q_\pm\mathcal{H},$$

$$\text{и } Q_+\mathcal{E} = \mathcal{Z}'Q_+\mathcal{H}, Q_-\mathcal{E} = -\mathcal{Z}'Q_-\mathcal{H}\},$$

$$\text{где } \mathcal{Z}' = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{Z}}_{22} & -\bar{\mathcal{Z}}_{12} \\ -\bar{\mathcal{Z}}_{21} & \bar{\mathcal{Z}}_{11} \end{pmatrix} = -J\mathcal{Z}^*J.$$

Для условий Леонтовича (19) импедансная матрица $\mathcal{Z}'$ сопряженного оператора имеет вид

$$\mathcal{Z}' = \begin{pmatrix} 0 & \bar{b} \\ -\bar{b} & 0 \end{pmatrix} = \bar{b}J.$$

Для такой импедансной матрицы операторы $\hat{C}''(\lambda)$ ограничены, если мнимая часть параметра λ отрицательна и достаточно велика по модулю. Значит для всех λ из указанной полуплоскости существует ограниченный оператор

$$\hat{R}_{\mathcal{Z}'}(\lambda) = (\lambda I_6 - \hat{A}_{\mathcal{Z}'})^{-1},$$

то есть

$$(\lambda I_6 - \hat{A}_{\mathcal{Z}'})\hat{R}_{\mathcal{Z}'}(\lambda) = I_6.$$

Отсюда следует, что верно следующее равенство для сопряженных операторов

$$\hat{R}^*_{\mathcal{Z}'}(\bar{\lambda})(\bar{\lambda} I_6 - \hat{A}^*_{\mathcal{Z}'}) = I_6,$$

что равносильно равенству

$$\hat{R}^*_{\mathcal{Z}'}(\bar{\lambda})(\bar{\lambda} I_6 - \hat{A}_{\mathcal{Z}}) = I_6.$$

Таким образом, существует левый обратный для оператора $(\lambda I_6 - \hat{A}_Z)$ для всех значений λ, имеющих достаточно большую положительную мнимую часть. Значит он совпадает с правым обратным, и решение задачи единственно.

Таким образом, существует резольвента оператора $\hat{A}_Z$ и ее параметрикс имеет вид (39).

Оценим норму полученного параметрикса. Очевидно,

$$\|\hat{R}''_Z(\lambda)\| \leq \|\hat{R}''(\lambda)\| + \|\hat{R}''(\lambda)Q^*\| \cdot \|\hat{C}''(\lambda)\| \cdot \|Q_+\hat{R}''(\lambda)\|.$$

Или, учитывая полученные ранее оценки, имеем

$$\|\hat{R}''_Z(\lambda)\| \leq d|\lambda|^2, \qquad \text{где} \qquad d = \text{const}.$$

Поскольку

$$\hat{R}_Z(\lambda) = (I + \hat{\beta}(\lambda))^{-1}\hat{R}''_Z(\lambda),$$

то

$$\|\hat{R}_Z(\lambda)\| \leq c_1|\lambda|^2.$$

Таким образом, теорема доказана.

Замечание : *Можно оценить разницу между точной резольвентой $\hat{R}_Z(\lambda)$ оператора $\hat{A}_Z(\lambda)$ и ее приближением $\hat{R}''_Z(\lambda)$.*

Очевидно,

$$\|\hat{R}_Z(\lambda) - \hat{R}''_Z(\lambda)\| = \|\hat{R}_Z(\lambda)\| \cdot \|I - (\lambda I - \hat{A}_Z)\hat{R}''_Z(\lambda)\|.$$

А значит

$$\|\hat{R}_Z(\lambda) - \hat{R}''_Z(\lambda)\| \leq c\frac{|\lambda|^2}{|\operatorname{Im}\lambda|^2}.$$

References

[1] Леонтович М.А. Избранные труды. Теоретическая физика. М.: Наука, 1985.

[2] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.

[3] Антонец М.А. Начально-краевые задачи для эволюционных уравнений с условием трансмиссии на неограниченной поверхности. Доклады академии наук. 1993. Т.332 N 3, 277–279.

[4] Antonets M.A., Geyler V.A. Quasitwo-dimensional charged particle in a tilted magnetic field : asymptotical properties of the spectrum. Russian J.of Math. Phys. 1995. v.3, n.4, 1–11.

[5] Бирман М.Ш. Оператор Максвелла для резонатора с входящими ребрами. Вестн. Ленинградского университета. Сер. 1. 1986. N 3, 3–9.

[6] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях. Успехи математических наук. 1987. Т.42, выпуск 6(258), 61–76.

[7] Колтон Д., Р. Кресс. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.

[8] Bendali A., B.Fares, J. Gay. A boundary-element solution of the Leontovich problem. IEEE Trans. on antenna and prop., 1999, v.47, n.10, 1597-1605.

[9] Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.3. Псевдодифференциальные операторы. М. Мир. 1987.

[10] Антонец М.А. Задача с начальными данными для псевдодифференциальных операторов. Проблемы математического

анализа. Вып. 18. Нелинейные уравнения с частными производными и теория функций, 3–42. Изд. С.Петербургского университета. 1998.

[11] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.
М.: Наука, 1967.

[12] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.

[13] Семенов А.А. Теория электромагнитных волн. М.: Издательство МГУ, 1968.