Научно-исследовательский радиофизический институт
Министерства образования Российской Федерации

Препринт N 456

МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ И ВЫТЕКАЮЩЕЙ ПСЕВДОРЭЛЕЕВСКОЙ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ НОРМАЛЬНЫМ К ГРАНИЦЕ ГАЗ-ТВЕРДОЕ ТЕЛО ГАРМОНИЧЕСКИМ СИЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

А. В. Разин

Нижний Новгород 1999

Разин А. В.
Мощности излучения акустической и вытекающей псевдорэлеевской волн, возбуждаемых нормальным к границе газ – твердое тело гармоническим силовым источником // Препринт N 456. — Нижний Новгород: НИРФИ, 1999. 18 с.

УДК 534.232 ÷ 550.834

Методом реакции излучения решена задача о возбуждении объемных, вытекающих и поверхностных волн точечным гармоническим силовым источником, действующим перпендикулярно границе однородных газообразного и упругого полупространств. Рассмотрен случай, когда скорость звука в газе меньше скорости рэлеевской волны на поверхности твердого тела. Получены интегральные выражения для средних за период волны мощностей излучения продольной и поперечной сферических волн в твердом теле и поверхностной волны Стонели. Детально проанализировано излучение сферической акустической волны в газе и вытекающей псевдорэлеевской волны. Для области пространства, соответствующей зенитным узлам, превышающим арксинус отношения скорости звука в газе к скорости поперечных волн в упругой среде, где происходит перекачка энергии вытекающей волны в акустическую волну, получено выражение для их суммарной мощности.

Возбуждение упругих волн в твердом полупространстве, граничащем с вакуумом, исследовано в настоящее время достаточно полно. Рассмотрены различные виды как поверхностных, так и заглубленных источников (см., например, [1]). Значительно менее подробно изучены вопросы генерации и распространения волн в случае, когда твердая среда граничит с газом или жидкостью. Между тем, именно такая ситуация наиболее часто встречается на практике. Наличие над упругим полупространством какой-либо среды приводит к появлению дополнительных типов волн. Так, вдоль границы газ – твердое тело распространяются две волны [2, 3], одна из которых является поверхностной, а другая — вытекающей. Обычно скорости упругих волн в твердых телах превышают скорости звука в газах и жидкостях, поэтому поверхностной является волна Стонели, а волна Рэлея, распространяясь вдоль поверхности твердого тела, постоянно излучает часть своей энергии в газ, в результате чего её амплитуда экспоненциально спадает в направлении вдоль границы. В [4] такая волна была названа псевдорэлеевской волной.

Возбуждение сейсмоакустических волн нормальным к плоской границе газ – твердое тело точечным гармоническим силовым источником исследовалось в работе [5]. Для случая, когда скорость звука в газе меньше скорости рэлеевской волны, которая существовала бы на границе твердое тело – вакуум, было получено выражение для мощности излучения поверхностной волны Стонели, а также выражение для суммарной мощности излучения продольной и поперечной волн в твердом полупространстве, акустической волны в газе и вытекающей псевдорэлеевской волны. Расчеты в [5] проводились методом реакции излучения, что позволило избежать каких-либо приближений.

Попытка исследования возбуждения акустических волн гармоническим силовым источником, действующим на границе газ – твердое тело, была предпринята в [6], где для получения асимптотик полей акустической и сейсмических сферических волн в дальней зоне был использован метод стационарной фазы. На основании этих асимптотик в [6] были записаны выражения для соответствующих мощностей излучения этих волн.

Хорошо известно [7], что при действии на поверхность граничащего с вакуумом однородного изотропного твердого полупространства перпендикулярной к ней гармонической точечной нагрузки более половины всей излучаемой мощности приходится на долю поверхностной волны Рэлея (конкретное значение определяется соотношением скоростей продольной и поперечной волн). Данное обстоятельство позволяет использовать рэлеевские волны в многочисленных приложениях [8–10]. В связи с этим представляет интерес более детальное исследование возбуждения вытекающей псевдорэлеевской волны и акустической волны в системе газ – твердое тело, что и составляет цель настоящей работы.

Итак, пусть плоскость $z = 0$ цилиндрической системы координат r, φ, z совпадает с границей раздела однородного газа, имеющего плотность ρ_1 и скорость звука c_1 и заполняющего полупространство $z < 0$, и однородного изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризуемого плотностью ρ_2 и скоростями продольной и поперечной волн соответственно c_l и c_t. На поверхность твердого тела по нормали к ней действует точечная гармоническая нагрузка, т. е. при $z = 0$ выполняются следующие граничные условия для вектора смещений $\vec{u}$ и тензора напряжений σ_{ik} (индекс 1 относится к газу, 2 — к твердому телу):

$$u_{z1} = u_{z2}, \quad \sigma_{zr2} = 0, \quad \sigma_{zz1} - \sigma_{zz2} = p = f_0 \frac{\delta(r)}{2\pi r} e^{-i\omega t}, \qquad (1)$$

выражающие соответственно равенство нормальных к границе смещений в обеих средах, отсутствие касательных напряжений на поверхности твердого тела и равенство разности вертикальных компонент напряжений в газе и в твердом теле при $z = 0$ давлению p, создаваемому источником. В (1) f_0 — амплитуда приложенной силы, ω — частота, δ — дельта-функция Дирака.

Смещения в твердом теле описываются уравнением Ламэ, а возмущения в газе — системой уравнений гидродинамики, которые для решения рассматриваемой задачи могут быть линеаризованы. В газе введем потенциал смещений ψ_1, а в твердом теле — скалярный ψ_2 и векторный $\vec{A} = A\,\vec{e}_\varphi$ ($\vec{e}_\varphi$ — орт оси φ) потенциалы. Смещения частиц $vecu_1$ и давление p_1 в акустической волне и смещения $vecu_2$ в упругих волнах связаны с потенциалами соотношениями:

$$\vec{u}_1 = \operatorname{grad}\psi_1, \quad p_1 = -\rho_1\,\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}, \qquad \vec{u}_2 = \operatorname{grad}\psi_2 + \operatorname{rot}\vec{A}, \quad \operatorname{div}\vec{A} = 0. \tag{2}$$

Для потенциалов получаются следующие волновые уравнения:

$$\Delta\psi_1 - \frac{1}{c_1^2}\,\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\psi_2 - \frac{1}{c_\ell^2}\,\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta A - \frac{1}{c_t^2}\,\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \tag{3}$$

Решая уравнения (3) с граничными условиями (1) методом преобразований Фурье и учитывая цилиндрическую симметрию задачи, представим потенциалы в виде:

$$\psi_1 = \int\limits_0^\infty R_\delta(k)\,e^{-i\,æ_1 z}\,J_0(kr)\,k\,dk, \tag{4}$$

$$\psi_2 = \int\limits_0^\infty T_\ell(k)\,e^{iæ_\ell z}\,J_0(kr)\,k\,dk, \tag{5}$$

$$A = \int\limits_0^\infty T_t(k)\,e^{iæ_t z}\,J_1(kr)\,k\,dk. \tag{6}$$

В (4)–(6) k — горизонтальное волновое число, J_0 и J_1 — функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядков,

$$R_S = -\frac{f_0\,æ_\ell\,k_t^2}{2\pi\mu\,æ_1\,S_0(k)},$$

$$T_\ell = \frac{f_0\,(k_t^2 - 2k^2)}{2\pi\mu\, S_0(k)}\,, \quad T_t = \frac{i f_0\, æ_\ell\, k}{\pi\mu\, S_0(k)}\,,$$

$$S_0(k) = R_0(k) + \varepsilon k_t^4 æ_\ell / æ_1, \quad \varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,,$$

$$R_0(k) = (k_t^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 æ_\ell æ_t, \quad æ_{1,\ell,t} = (k_{1,\ell,t}^2 - k^2)^{1/2},$$

$k_{1,\ell,t} = \omega / c_{1,\ell,t}$ — волновые числа акустической волны в газе и продольной и поперечной волн в твердом теле.

Для сходимости интегралов (4)–(6) при $|z| \to \infty$ необходимо считать, что

$$(k_{1,\ell,t}^2 - k^2)^{1/2} = i\left|(k^2 - k_{1,\ell,t}^2)^{1/2}\right| \quad \text{при} \quad k > k_{1,\ell,t}.$$

Расчет мощности излучения упругих волн может быть проведен двумя способами (см., например, [11]). Первый способ связан с вычислением реакции излучения. Он позволяет избежать применения каких-либо приближений, поскольку для его использования достаточно знать выражения для смещений в виде интегралов Фурье. Второй способ связан с вычислением потока энергии через поверхность сферы большого по сравнению с длиной волны радиуса, содержащей источник внутри себя. Для этого необходимо предварительно получить приближенные выражения для смещений в волновой зоне, что требует довольно громоздких выкладок.

Рассмотрим вначале метод реакции излучения. Для гармонического осесимметричного источника среднее за период волны значение полной излучаемой мощности дается выражением:

$$W = -\pi\,\mathrm{Re}\left[i\omega \int_0^\infty p^*\, u_z(r,0)\, r\, dr\right], \tag{7}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Подставим в (7) давление p^* и вертикальные смещения границы раздела $u_z(r,0)$ в виде интегралов Фурье–Бесселя. Это позволит провести интегрирование по r и записать излучаемую мощность в виде интеграла по волновому числу k:

$$W = \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi \rho_2 c_t^4} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{æ_\ell}{S_0(k)} k\,dk. \tag{8}$$

Вклад в реальную часть интеграла (8) дают те участки пути интегрирования, где функция $æ_\ell/S_0(k)$ действительна, а также полувычеты в лежащих на действительной оси полюсах подынтегрального выражения. Полюса определяются из решения уравнения $S_0(k) = 0$ и соответствует волнам Рэлея и Стонели. Для их вычисления следует задать соотношения между скоростью звука в газе и скоростями упругих волн в твердом теле. Будем считать, что $c_1 < c_R$, где c_R — скорость рэлеевской волны на границе твердое тело – вакуум. Соответствующее скорости c_R волновое число k_R определяется из уравнения Рэлея $R_0(k) = 0$.

При условии $c_1 < c_R$ уравнение $S_0(k) = 0$ имеет один действительный корень k_S, соответствующий поверхностной волне Стонели [2, 3]. Второй корень этого уравнения является комплексным и соответствует вытекающей псевдорэлеевской волне, амплитуда которой экспоненциально спадает в направлении вдоль границы. Таким образом, интегрирование в (8) в пределах от нуля до $k = k_1$ (при $k > k_1$ функция $æ_\ell/S_0(k)$ чисто мнимая) дает суммарную мощность излучения сферической акустической волны в газе, сферических продольной и поперечной упругих волн и вытекающей волны (обозначим эту сумму W_Σ:

$$W_\Sigma = \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi \rho_2 c_t^4} \operatorname{Re} \int_0^{k_1} \frac{æ_\ell}{S_0(k)} k\,dk. \tag{9}$$

Мощность излучения поверхностной волны Стонели W_S пропорциональна полувычету в полюсе $k = k_S$:

$$W_S = -\frac{\omega^3 f_0^2 k_S \sqrt{k_S^2 - k_\ell^2}}{4\rho_2 c_t^4 S_0'(k_S)}, \tag{10}$$

где

$$S_0'(k_S) = \left.\frac{dS_0(k)}{dk}\right|_{k=k_S} = 8k_S\left(2k_S^2 - k_t^2 - \sqrt{k_S^2 - k_\ell^2}\,\sqrt{k_S^2 - k_t^2}\right) + \\ + \frac{4k_S^3(k_\ell^2 + k_t^2 - 2k_S^2)}{\sqrt{k_S^2 - k_\ell^2}\,\sqrt{k_S^2 - k_t^2}} - \varepsilon\,\frac{4k_t^4 k_S\,(k_1^2 - k_\ell^2)}{\sqrt{k_S^2 - k_\ell^2}\,(k_S^2 - k_1^2)^{3/2}}\,.$$

Выражение (10) было детально исследовано в [5] при различных соотношениях между плотностями сред и скоростями упругих волн.

Проанализируем выражение (9). Поскольку в рассматриваемом случае $k_t < k_1$, то, очевидно, участок интегрирования от $k = k_t$ до $k = k_1$ не может описывать мощности излучения продольной и поперечной волн. Данный участок интегрирования дает вклад в мощности излучения акустической волны в газе и вытекающей псевдорэлеевской волны. Аналогично, участок интегрирования от $k = k_\ell$ до $k = k_t$ не может описывать мощность излучения продольной волны, поэтому вклад его соответствует поперечной и акустической волнам. Наконец, участок от $k = 0$ до $k = k_\ell$ дает вклад в мощности излучения всех трех объемных волн.

Выделяя в интеграле (9) реальную часть, для интервала $[k_t, k_1]$ имеем:

$$W_1(k_t, k_1) = \frac{\omega^3 f_0^2\,\varepsilon\,k_t^4}{4\pi\rho_2 c_t^4}\int\limits_{k_t}^{k_1}\frac{(k^2 - k_\ell^2)\,k\,dk}{\sqrt{k_1^2 - k^2}\,|S_0(k)|^2}\,. \qquad (11)$$

Аналогичный вид должны иметь выражения для мощности излучения акустической волны на участках интегрирования $k_\ell < k < k_t$ и $0 < k < k_\ell$.

Рассмотрим интервал интегрирования $k_\ell < k < k_t$. Выделяя в (9) конструкцию вида (11) получаем:

$$W_1(k_\ell, k_t) = \frac{\omega^3 f_0^2\,\varepsilon\,k_\ell^4}{4\pi\rho_2 c_t^4}\int\limits_{k_\ell}^{k_t}\frac{(k^2 - k_\ell^2)\,k\,dk}{\sqrt{k_1^2 - k^2}\,|S_0(k)|^2}\,, \qquad (12)$$

$$W_t(k_\ell, k_t) = \frac{\omega^3 f_0^2}{\pi \rho_2 c_t^4} \int\limits_{k_\ell}^{k_t} \frac{(k^2 - k_\ell^2)\sqrt{k_t^2 - k^2}\, k^3\, dk}{|S_0(k)|^2}, \qquad (13)$$

где выражение (13) описывает часть мощности излучения поперечной волны.

Наконец, рассмотрим участок интегрирования $0 < k < k_\ell$. На этом участке для мощности излучения акустической волны необходимо выделить выражение, аналогичное (11), (12), а для мощности излучения поперечной волны — выражение типа (13). Оставшаяся часть мощности относится к продольной упругой волне. Выпишем соответствующие выражения:

$$W_\ell = \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi \rho_2 c_t^4} \int\limits_0^{k_\ell} \frac{(k_t^2 - 2k^2)^2 \sqrt{k_\ell^2 - k^2}\, k\, dk}{S_0^2(k)}, \qquad (14)$$

$$W_t(0, k_\ell) = \frac{\omega^3 f_0^2}{\pi \rho_2 c_t^4} \int\limits_0^{k_\ell} \frac{(k_\ell^2 - k^2)\sqrt{k_t^2 - k^2}\, k^3\, dk}{S_0^2(k)}, \qquad (15)$$

$$W_1(0, k_\ell) = \frac{\omega^3 f_0^2 \varepsilon\, k_t^4}{4\pi \rho_2 c_t^4} \int\limits_0^{k_\ell} \frac{(k_\ell^2 - k^2)\, k\, dk}{\sqrt{k_1^2 - k^2}\, S_0^2(k)}. \qquad (16)$$

Выражение (14) полностью описывает мощность излучения продольной волны. Мощность излучения поперечной волны, как следует из (13), (15) описывается формулой

$$W_t = \frac{\omega^3 f_0^2}{\pi \rho_2 c_t^4} \int\limits_0^{k_t} \frac{|k^2 - k_\ell^2|\sqrt{k_t^2 - k^2}\, k^3\, dk}{|S_0(k)|^2}. \qquad (17)$$

Выражения (11), (12) и (16) требуют дополнительного исследования.

Очевидно, что в предельном случае стремления плотности газа к нулю мощность излучения акустической волны также должна стремиться к нулю. Подынтегральные выражения в

(12) и (16) не имеют особенностей, поэтому $W_1(0, k_\ell) \to 0$, $W_1(k_\ell, k_t) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Выражение для мощности излучения на участке интегрирования $k_t < k < k_1$ при $\varepsilon \to 0$ приводится к виду:

$$W_1(k_t, k_1) = \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi \rho_2 c_t^4} \operatorname{Re}\left\{ i \int\limits_{k_t}^{k_1} \frac{\sqrt{k^2 - k_\ell^2}\, k\, dk}{R_0(k)} \right\}, \tag{18}$$

и вклад в его реальную часть дает только полувычет в полюсе $k = k_R$. Это выражение соответствует мощности излучения поверхностной волны Рэлея, возбуждаемой на границе твердое тело – вакуум [5]:

$$W_R = -\frac{\omega^3 f_0^2 k_R \sqrt{k_R^2 - k_\ell^2}}{4\rho_2 c_t^4 R_0'(k_R)}, \tag{19}$$

где

$$\begin{aligned} R_0'(k_R) \;\; &= \;\; \frac{dR_0(k)}{dk}\bigg|_{k=k_R} = \frac{2}{k_R\,(2k_R^2 - k_t^2)^2} \times \\ &\times \left[k_t^6\,(4k_R^2 - k_t^2) - 8k_R^6\,(k_t^2 - k_\ell^2)\right]. \end{aligned}$$

Таким образом, можно сделать вывод, что выражение (11) описывает как некоторую часть мощности излучения акустической волны, так и мощность излучения вытекающей псевдорэлеевской волны. Разделить эти мощности не представляется возможным, поскольку распространяющаяся вдоль границы волна постоянно передает энергию акустической волне. При этом их суммарная мощность остается постоянной. Более подробно смысл выражений (11), (12) и (16) будет обсуждаться ниже.

Приведенные выше выражения для мощностей излучения различных типов волн, распространяющихся вблизи границы раздела газ – твердое тело, были получены без использования каких-либо приближений. Рассмотрим теперь вычисление мощностей излучения путем суммирования потока энергии через поверхность сферы большого по сравнению с длиной волны радиуса, содержащей источник внутри себя.

В интегралах (4)–(6) заменим Функции Бесселя на функции Ханкеля, причем для последних воспользуемся асимптотиками при больших значениях аргумента. Выражения для потенциалов при этом принимают вид:

$$\psi_1 = -\frac{f_0 k_t^2}{4\pi\rho_2\, c_t^2}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\, e^{-i\pi/4}\int\limits_{\infty\, e^{i\pi}}^{\infty} \frac{æ_\ell}{æ_1\, S_0(k)}\, e^{i\,(æ_1\,|z|+kr)}\,\sqrt{k}\,dk, \quad (20)$$

$$\psi_2 = \frac{f_0}{4\pi\rho_2\, c_t^2}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\, e^{-i\pi/4}\int\limits_{\infty\, e^{i\pi}}^{\infty} \frac{k_t^2 - 2k^2}{S_0(k)}\, e^{i\,(æ_\ell z+kr)}\,\sqrt{k}\,dk, \quad (21)$$

$$A = \frac{i f_0}{2\pi\rho_2\, c_t^2}\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\, e^{-i3\pi/4}\int\limits_{\infty\, e^{i\pi}}^{\infty} \frac{æ_\ell}{S_0(k)}\, e^{i\,(æ_t z+kr)}\, k\,\sqrt{k}\,dk. \quad (22)$$

В интегралах (20)–(22) контур интегрирования в области $\operatorname{Re} k < 0$ проходит выше действительной оси. По отрицательной части действительной оси проведен разрез, обеспечивающий однозначность определения аналитической функции $\sqrt{k}$ на комплексной плоскости k. Именно с этим связано задание нижнего предела интегрирования в (20)–(22) в виде $\infty\, e^{i\pi}$ [12].

Рассмотрим сначала мощность излучения в продольной и поперечной упругих волнах. Переходя к сферической системе координат $R = \left(r^2 + z^2\right)^{1/2}$, $\theta = \arccos\left(z/r\right)$, вычисляя интегралы (21), (22) методом перевала и пользуясь соотношениями (2) получаем, что в волновой зоне смещения в продольной волне имеют только радиальную R-компоненту, а вектор смещений в поперечной волне — лишь θ-компоненту:

$$u_R = \frac{f_0 k_\ell^2 \cos\theta\left(k_t^2 - 2k_\ell^2 \sin^2\theta\right)}{2\pi\rho_2\, c_t^2\, S_0(k_\ell \sin\theta)}\,\frac{e^{ik_\ell R}}{R}\,, \quad (23)$$

$$u_\theta = -\frac{f_0\, k_t^3 \sin\theta\cos\theta\,\sqrt{k_\ell^2 - k_t^2\sin^2\theta}}{\pi\rho_2\, c_t^2\, S_0(k_t\sin\theta)}\,\frac{e^{ik_t R}}{R}\,. \quad (24)$$

Поток мощности излучения имеет в сферической системе координат только радиальную составляющую, и выражения для нее в продольной и поперечной волнах имеют соответственно вид:

$$I_\ell = \frac{f_0^2 \omega^2 \cos^2\theta \left(1 - 2n^2 \sin^2\theta\right)^2}{8\pi^2 c_\ell^3\, S_\ell^2(\theta)\, R^2}\,, \tag{25}$$

$$I_t = \frac{f_0^2 \omega^2 \cos^2\theta \sin^2\theta \left|n^2 - \sin^2\theta\right|}{2\pi^2 \rho_2\, c_t^3 \left|S_t(\theta)\right|^2 R^2}\,, \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned}
n &= c_t/c_\ell, \\
S_\ell(\theta) &= \left(1 - 2n^2 \sin^2\theta\right)^2 + 4n^3 \sin^2\theta \cos\theta \sqrt{1 - n^2 \sin^2\theta} + \\
&\quad + \frac{\varepsilon\, n \cos\theta}{\sqrt{(c_t/c_1)^2 - n^2 \sin^2\theta}}\,, \\
S_t(\theta) &= \left(1 - 2\sin^2\theta\right)^2 + 4\sin^2\theta \cos\theta \sqrt{n^2 - \sin^2\theta} + \\
&\quad + \frac{\varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2\theta}}{\sqrt{(c_t/c_1)^2 - \sin^2\theta}}\,.
\end{aligned}$$

Проинтегрировав выражения (25), (26) по полусфере радиуса R получим формулы для мощностей излучения, соответствующих данному типу волны:

$$W_\ell = \frac{\omega^2 f_0^2}{4\pi \rho_2\, c_\ell^3} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\left(1 - 2n^2 \sin^2\theta\right)^2 \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta}{S_\ell^2(\theta)}\,, \tag{27}$$

$$W_t = \frac{\omega^2 f_0^2}{\pi \rho_2\, c_t^3} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\left|\sin^2\theta - n^2\right| \cos^2\theta \sin^3\theta\, d\theta}{\left|S_t(\theta)\right|^2}\,. \tag{28}$$

Выражения (27), (28) при $\varepsilon \to 0$ переходят в известные [7] формулы, описывающие мощности излучения продольных и поперечных сферических волн, возбуждаемых при действии точечного гармонического силового источника на границу твердое тело – вакуум.

Выполняя в интеграле (14) замену переменной интегрирования $k = k_\ell \sin\theta$ нетрудно видеть, что (14) переходит в выражение (27). Аналогично, заменой $k = k_t \sin\theta$ формула (17) переходит в (28). Таким образом, для мощностей излучения продольной и поперечной волн двумя способами получены одинаковые выражения.

Перейдем к вычислению мощности излучения акустической волны в газе. Вводя в (20) сферическую систему координат и применяя формально метод перевала получим выражение для потенциала смещений в газе в волновой зоне:

$$\psi_1 = \frac{i\, f_0 k_t^2 \sqrt{k_\ell^2 - k_1^2 \sin^2\theta}}{2\pi\rho_2\, c_t^2\, S_0(k_1 \sin\theta)} \, \frac{e^{ik_1 R}}{R} \,. \tag{29}$$

Соответствующее потенциалу (28) выражение для мощности излучения имеет вид:

$$W_1 = \frac{\omega^2 f_0^2\, \varepsilon\, c_1^5}{4\pi\rho_2\, c_t^8} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\left|(c_1/c_\ell)^2 - \sin^2\theta\right| \sin\theta\, d\theta}{|S_1(\theta)|^2} \,, \tag{30}$$

где

$$S_1(\theta) = \left(\frac{c_1^2}{c_t^2} - 2\sin^2\theta\right)^2 + 4\sin^2\theta \sqrt{\frac{c_1^2}{c_\ell^2} - \sin^2\theta} \sqrt{\frac{c_1^2}{c_t^2} - \sin^2\theta} + $$
$$+ \varepsilon \left(\frac{c_1}{c_t}\right)^4 \sqrt{\frac{c_1^2}{c_\ell^2} - \sin^2\theta}\, \frac{1}{\cos\theta} \,.$$

Выражение (30) было ранее получено в [6]. Отметим, что если объединить выражения (11), (12) и (16) и записать их сумму в виде

$$W_1 = \frac{\omega^3\, f_0^2\, \varepsilon\, k_t^4}{4\pi\rho_2\, c_t^4} \int\limits_0^{k_1} \frac{|k^2 - k_\ell^2|\, k\, dk}{\sqrt{k_1^2 - k^2}\, |S_0(k)|^2} \,, \tag{31}$$

то заменой переменной интегрирования $k = k_1 \sin\theta$ формула (31) переводится в (30).

Проанализируем формулу (30). Интегрирование по зенитному углу θ от $\theta = 0$ до $\theta = \arcsin(c_1/c_\ell)$ соответствует выражению (16) и описывает ту часть мощности акустической волны в газе, которая излучается в указанном интервале углов. Аналогично интегрирование от $\theta = \arcsin(c_1/c_\ell)$ до $\theta = \arcsin(c_1/c_t)$ соответствует выражению (12) и дает мощность, излученную в диапазоне углов $\arcsin(c_1/c_\ell) < \theta < \arcsin(c_1/c_t)$. Интегрирование от $\theta = \arcsin(c_1/c_t)$ до $\theta = \pi/2$ соответствует выражению (11), которое, как показано выше, описывает как некоторую часть мощности излучения акустической волны, так и мощность излучения вытекающей псевдорэлеевской волны. В этой области углов происходит перекачка энергии вытекающей волны в акустическую волну, поэтому нельзя провести количественное разделение мощностей излучения акустической и вытекающей волн. Поле вытекающей волны экспоненциально спадает при движении вдоль границы за счет передачи части энергии звуковой волне. Их суммарная мощность при этом остается постоянной.

Отметим, что в работе [6] ошибочно утверждалось, что в случае $c_1 < c_R$ формула (30) описывает только поле акустической волны в газе. Приведенная в [6] численная оценка интеграла (30) для указанного случая также является неверной.

Перейдем к количественным оценкам. При проведении численных расчетов удобно представить выражения для мощностей излучения волн различных типов в виде

$$W_i = \frac{f_0^2 \omega^2}{4\pi \rho_2\, c_\ell^3}\, \tilde{W}_i,$$

где $\tilde{W}_i$ — безразмерные численные коэффициенты (индекс i принимает значения 1, ℓ, t и т. д. и обозначает тип волны).

Рассмотрим сначала случай, когда твердое тело граничит с вакуумом ($\rho_1 = 0$). Численные коэффициенты $\tilde{W}_\ell^{(0)}$, $\tilde{W}_t^{(0)}$ и

$\tilde{W}_R$, относящиеся соответственно к продольной, поперечной и рэлеевской волнам на свободной поверхности упругого полупространства, имеют следующие значения (рассматривается случай равенства параметров Ламэ λ и μ, когда $c_\ell = \sqrt{3}\,c_t$):

$$\tilde{W}_\ell^{(0)} = 0{,}3334; \quad \tilde{W}_t^{(0)} = 1{,}2466; \quad \tilde{W}_R = 3{,}2578.$$

При этом полная излучаемая мощность

$$\tilde{W}_{\text{tot}}^{(0)} = \tilde{W}_\ell^{(0)} + \tilde{W}_t^{(0)} + \tilde{W}_R$$

характеризуется величиной $\tilde{W}_{\text{tot}}^{(0)} = 4{,}8378$. Полученные численные значения совпадают с известными классическими результатами [7].

Отметим, что полученная здесь формула (19) для мощности рэлеевской волны значительно компактнее и проще, чем соответствующее выражение, приведенное в [7]. В работе [7] смещения в волне Рэлея были получены из интегральных выражений для смещений путем вычисления вычета в полюсе $k = k_R$, являющемся решением уравнения $R_0(k) = 0$. Аналогичная [7] методика вычисления мощности излучения рэлеевской волны была использована в [13] при рассмотрении источника в виде диска конечной площади.

Перейдем к рассмотрению случая, когда твердое тело граничит с газом. Пусть плотность упругого полупространства составляет $\rho_2 = 2000\,\text{кг/м}^3$, а скорости поперечных и продольных упругих волн равны соответственно $c_t = 1000\,\text{м/с}$ и $c_\ell = \sqrt{3}c_t \approx 1732\,\text{м/с}$. Тогда при плотности воздуха $\rho_1 = 1{,}29\,\text{кг/м}^3$ ($\varepsilon = 6{,}45 \cdot 10^{-4}$) и скорости звука $c_1 = 340\,\text{м/с}$ для мощностей излучения продольной и поперечной волн получаем численные значения $\tilde{W}_\ell = 0{,}3333$, $\tilde{W}_t = 1{,}2462$. Эти значения почти не отличаются от величин $\tilde{W}_\ell^{(0)}$ и $\tilde{W}_t^{(0)}$. Мощность поверхностной волны Стонели, вычисленная по формуле (10), оказывается весьма малой: $\tilde{W}_S = 1{,}5 \cdot 10^{-7}$.

Численные значения $\tilde{W}_1(0, k_\ell)$ и $\tilde{W}_1(k_\ell, k_t)$ мощностей акустической волны, излучаемых соответственно а области пространства $0 \leq \theta < \arcsin(c_1/c_\ell)$ и $\arcsin(c_1/c_\ell) \leq \theta < \arcsin(c_1/c_\ell)$, равны: $\tilde{W}_1(0, k_\ell) = 6{,}22 \cdot 10^{-5}$, $\tilde{W}_1(k_\ell, k_t) = 1{,}94 \cdot 10^{-4}$. Как и следовало ожидать, эти мощности на несколько порядков меньше мощностей излучения объемных волн в твердом теле.

При вычислении величины $\tilde{W}_1(k_t, k_1)$ необходимо учитывать, что подынтегральная функция в (11) имеет резкий максимум при $k \approx k_R$. Именно область этого максимума дает определяющий вклад в результат интегрирования, $\tilde{W}_1(k_t, k_1) = 3{,}2591$. Полученное значение очень близко к значению $\tilde{W}_R$, соответствующему поверхностной волне Рэлея на свободной границе упругого полупространства. Следовательно, основной вклад в величину $\tilde{W}_1(k_\ell, k_t)$ дает вытекающая волна.

Перейдем к рассмотрению генерации волн источником, действующим на границе раздела твердое тело – жидкость. Пусть плотность твердого тела $\rho_2 = 2860\,\text{кг/м}^3$, а скорости поперечных и продольных волн равны соответственно $c_t = 3000\,\text{м/с}$ и $c_\ell = 5196\,\text{м/с}$, что соответствует скальной породе. Тогда при плотности жидкости $\rho_1 = 1000\,\text{кг/м}^3$ ($\varepsilon = 0{,}35$) и при скорости звука в ней $c_1 = 1500\,\text{м/с}$ получаем $\tilde{W}_\ell = 0{,}2745$, $\tilde{W}_t = 0{,}9913$, $\tilde{W}_S = 0{,}2013$, $\tilde{W}_1(0, k_\ell) = 4{,}1295 \cdot 10^{-2}$, $\tilde{W}_1(k_\ell, k_t) = 0{,}1298$, $\tilde{W}_1(k_t, k_1) = 3{,}8588$, $\tilde{W}_{\text{tot}} = 5{,}4987$. Полная излучаемая мощность заметно превышает величину $\tilde{W}^{(0)}_{\text{tot}} = 4{,}8378$, соответствующую случаю возбуждения упругих волн в твердом теле, граничащем с вакуумом или газом. Это связано, по-видимому, с более эффективной генерацией акустических волн в жидкости, чем в газе, поскольку различие импедансов твердого тела и жидкости не столь велико, как твердого тела и газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант РФФИ N 97-05-65938)

Литература

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1 / Пер. с англ. Левшина А. Л. — М.: Мир, 1983. 520 с.

2. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. 343 с.

3. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989. 416 с.

4. Roever W. L., Vining T. F., Strick E. Propagation of elastic wave motion from an impulsive source along a fluid/solid interface // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1959. V. 251. N 1000. P. 455–523.

5. Разин А. В. Об излучении волн Стонели нормальным к границе газ – твердое тело гармоническим силовым источником // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. N 12. С. 100–104.

6. Заславский Ю. М. К оценке мощности инфразвука, побочно излучаемого в атмосферу при вибрационном просвечивании Земли // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. N 9. С. 86–89.

7. Miller G. F., Pursey H. On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1955. V. 233. N 1192. P. 55–69.

8. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. — М.: Наука, 1981. 288 с.

9. Поверхностные акустические волны / Под ред. Олинера А. Пер. с англ. Кессених Г. Г., Якушкина Е. Д. под ред. Реза И. С. — М.: Мир, 1981. 390 с.

10. Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. — М.: Наука, 1991. 416 с.

11. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. — Киев: Наукова Думка, 1981. 284 с.

12. Фелсен С., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. I. / Пер. с англ. под ред. Левина М. Л. — М.: Мир, 1978. 551 с.

13. Гущин В. В., Докучаев В. П., Заславский Ю. М., Конюхова И. Д. О распределении мощности между различными типами излучаемых волн в полубезграничной упругой среде. В кн.: Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками / Под ред. Николаева А. В. — М.: Наука, 1981. С. 113–118.

РАЗИН Андрей Владимирович

МОЩНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ И ВЫТЕКАЮЩЕЙ ПСЕВДОРЭЛЕЕВСКОЙ ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ НОРМАЛЬНЫМ К ГРАНИЦЕ ГАЗ-ТВЕРДОЕ ТЕЛО ГАРМОНИЧЕСКИМ СИЛОВЫМ ИСТОЧНИКОМ

Подписано в печать 14.12.99 г. Формат 60 × 84/16.
Бумага писчая. Объем 1,2 усл. п. л.
Тираж 50. Заказ 5492.

Отпечатано в НИРФИ
Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25