Министерство образования Российской Федерации
Научно – исследовательский радиофизический институт

Препринт № 471

Контактное взаимодействие электрона Паули с плоскостью в присутствии наклонного магнитного поля

М.А.Антонец

Нижний Новгород - 2001

Антонец М.А.

Контактное взаимодействие электрона Паули
с плоскостью в присутствии наклонного магнитного поля // ***Препринт №471*** **-**
Нижний Новгород: НИРФИ, 2001. 22 с.

УДК 517.43

В работе построены самосопряженные расширения оператора Паули для электрона в однородном магнитном поле, отвечающие контактному взаимодействию электрона с плоскостью. Для больших значений константы взаимодействия получена асимптотика отрицательных собственных значений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 990100078)

В работах [1-3] при рассмотрении проводимости электронного газа в магнитном поле была использована модель, описываемая оператором Шредингера для электрона в магнитном поле, взаимодействующего контактно с граничной плоскостью.

Если магнитное поле перпендикулярно границе, то спектр этого оператора допускает точное описание.

Весьма существенным обстоятельством является наличие конечного числа эквидистантных собственных значений бесконечной кратности, расположенных ниже непрерывного спектра.

В работе [4] было показано, что при больших значениях константы связи структура отрицательного спектра близка к описанной выше при произвольной ориентации граничной плоскости относительно направления вектора магнитной индукции.

В предлагаемой работе рассматривается модель, учитывающая спин электрона и основанная на использовании оператора Паули, вместо оператора Шредингера. Для этой модели дается асимптотическое описание отрицательных собственных значений.

Оператор Паули для электрона в трехмерном пространстве в присутствии магнитного поля может быть представлен в виде

$$\hat{H}_P = \hat{H}_S I_2 - \frac{1}{2m}\vec{\sigma}\vec{B}\,, \tag{1}$$

где m – масса электрона,

$\vec{B} = rot\vec{A}$ – вектор магнитной индукции,

$\vec{A}(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x))$ – векторный потенциал магнитного поля,

$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, где

$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ – матрицы Паули ,

$I_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

и, наконец,

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2m}(-i\nabla - A)^2 \text{ -} \tag{2}$$

оператор Шредингера электрона в магнитном поле.
Мы рассматриваем случай однородного магнитного поля (т.е. $\vec{B} = const$), произвольным образом направленного по отношению к плоскости Π.
Можно считать, что плоскость Π задается уравнением $x_3 = 0$, а вектор – потенциал $\vec{A}$ имеет вид

$$\vec{A}(x) = (B_\parallel x_3, B_\perp x_1, 0)$$

и, следовательно,

$$\vec{B} = (0, B_\parallel, B_\perp),$$

где $B_\parallel, B_\perp$ –соответственно параллельная и ортогональная к плоскости Π составляющие вектора магнитной индукции $\vec{B}$.

Для того, чтобы определить исследуемый оператор, введем необходимые для этого функциональные пространства.
Обозначим $L_2^2(R^3)$ пространство вектор – функций $u = \{u_1, u_2\}$, где u_1, u_2 – функции из $L_2(R^3)$ и обозначим $S_2^2(R^3)$ пространство основных двумерных вектор - функций с компонентами из пространства основных функций Шварца $S(R^3)$.
Обозначим $S(R^3|\Pi)$, подпространство в $S(R^3)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль в окрестности плоскости Π, и обозначим $S^2(R^3|\Pi)$ соответствующее пространство двумерных вектор -функций.
Обозначим $L_2^2(R^3|\Pi)$ пространство обобщенных вектор - функций умеренного роста, непрерывных по норме $L_2^2(R^3)$ на пространстве $S^2(R^3|\Pi)$.
Обозначим π_Π естественную проекцию из $L_2^2(R^3|\Pi)$ в $L_2^2(R^3)$.
Обозначим $\sigma_\pm u$ односторонние пределы

$$\sigma_\pm u = \lim_{x_3 \to \pm 0} [\pi_\Pi u](x_1, x_2, x_3)$$

в том случае, когда они существуют.

Обозначим для вектор - функции u из $L_2^2(R^3|\Pi)$

$$j_{\pm}u = \{\sigma_{\pm}u, \sigma_{\pm}\frac{\partial u}{\partial x_3}\} \tag{3}$$

в том случае, когда правая часть равенства корректно определена.

Теперь мы можем дать определение изучаемого оператора $\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}$, где α –матрица 2x2, являющаяся параметром изучаемой физической модели.

Область определения оператора $\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}$ определим как множество обобщенных вектор - функций u из $L_2^2(R^3|\Pi)$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

1) обобщенная вектор- функция $\hat{H}_P u$ принадлежит пространству $L_2^2(R^3|\Pi)$,

2) граничные значения j_+u, j_-u существуют, принадлежат прямой сумме $L_2^2(\Pi) \oplus L_2^2(\Pi)$ и удовлетворяют соотношениям

$$j_+u = \Gamma j_-u, \quad \text{где } \Gamma = \begin{vmatrix} I_2 & 0 \\ \alpha & I_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Оператор $\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}$ определен на области $D(\hat{H}_P^{\Pi,\alpha})$ соотношением

$$\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}u = \pi_P \hat{H}_P u .$$

Заметим, что для вектор- функций из области определения оператора $\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}$ определены их ограничения на плоскость Π, и поэтому на них корректно определена квадратичная форма

$$F_P^{\Pi,\alpha}(u) = \frac{1}{2m}\|(-i\nabla - A)u\|^2 + \frac{1}{2m}(\overset{\rho}{\delta}\overset{\rho}{B}u, u) + \iint\limits_{\Pi}(\alpha u, u)_{C^2}\, dx_1 dx_2 . \tag{5}$$

Прямые вычисления показывают, что эта квадратичная форма совпадает с квадратичной формой оператора $\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}$, то есть

$$F_P^{\Pi,\alpha}(u) = (\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}u, u).$$

Для построения резольвенты оператора $\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}$ нам потребуются вводимые ниже вспомогательные операторы $j, j^*, \hat{c}_P(\lambda), \hat{d}_P(\lambda)$.
Для произвольной вектор- функции u из $L_2^2(R^3)$ положим

$$ju = s - \lim_{x_3 \to 0} u(x),$$

если предел в правой части существует и принадлежит $L_2^2(\Pi)$.
Оператор j из $L_2^2(R^3)$ в $L_2^2(\Pi)$ имеет плотную в $L_2^2(R^3)$ область определения.
Обозначим

$$j^* : L_2^2(\Pi) \to S'^2(R^3) \ -$$

оператор,заданный соотношением

$j^*\varphi = \delta_\Pi \otimes \varphi$, δ_Π – мера Дирака на плоскости Π,
$S'^2(R^3)$–пространство обобщенных вектор-функций умеренного роста.
Обозначим $\hat{R}_P(\lambda)$-резольвенту оператора Паули $\hat{H}_P$ для электрона в свободном пространстве.
Определим операторы $\hat{d}_P(\lambda), \hat{c}_P(\lambda)$ в $L_2^2(\Pi)$, полагая для φ из пространства $L_2^2(\Pi)$

$$\hat{d}_P(\lambda)\varphi = \lim_{x_3 \to 0} \hat{R}_P(\lambda)[\delta_\Pi \otimes \varphi], \qquad (6)$$

$$\hat{c}_P(\lambda)\varphi = \lim_{x_3 \to 0} \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{R}(\lambda)[\delta_\Pi \otimes \varphi] \qquad (7)$$

в тех случаях, когда пределы в правых частях существуют и принадлежат $L_2^2(\Pi)$ и обозначим

$$\hat{g}_P(\lambda) = 2\alpha^{-1}\hat{c}_P(\lambda) - \hat{d}_P(\lambda).$$

Теорема 1. *Для произвольной невырожденной матрицы* α *оператор* $\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}$ *самосопряжен на своей области определения* $\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}$. *Для отрицательных, достаточно больших по модулю значений* λ *операторы*

$$j\hat{R}_P(\lambda) : L_2^2(R^3) \to L_2^2(\Pi),$$

$$\hat{R}_P(\lambda)j^* : L_2^2(\Pi) \to L_2^2(R^3)$$

непрерывны, а операторы $\hat{d}_P(\lambda), \hat{c}_P(\lambda)$ *непрерывны в* $L_2^2(\Pi)$, *причем оператор* $\hat{g}_P(\lambda)$ *непрерывно обратим в* $L_2^2(\Pi)$ *и для резольвенты* $\hat{R}_P^{\Pi,\alpha}(\lambda)$ *оператора* $\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}$ *имеет место представление*

$$\hat{R}_P^{\Pi,\alpha}(\lambda) = \hat{R}_P(\lambda) + \hat{R}_P(\lambda)[\delta_\Pi \otimes (2\alpha^{-1}\hat{c}_P(\lambda) - \hat{d}_P(\lambda))^{-1}]\langle \delta_\Pi, \hat{R}_P(\lambda) \rangle . \qquad (8)$$

Теорема 2. *Пусть матрица* α *имеет вид*

$$\alpha = -A\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix},$$

где A*–положительно и*

$$a^2 < 1.$$

Тогда для произвольного натурального k *и достаточно больших значений величины* A *существуют собственные значения бесконечной кратности* $\lambda_k^\pm(\alpha)$ *оператора* $\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}$, *для которых имеют место оценки*

$$\lambda_k^\pm = -\frac{A^2}{8m} z_\pm\left(\frac{8m}{A^2(1-a^2)}\right) + \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{|B_\perp|}{m} + o(\alpha^{-1}),$$

где $z_\pm(t)$ два положительных корня уравнения

$$[(z-t)^{-\frac{1}{2}} - 1][(z+t)^{-\frac{1}{2}} - 1] = a^2,$$

заведомо существующие и непрерывные по t *при малых значениях* t *и удовлетворяющие условиям*

$$z_\pm(0) = (1 \pm a)^2.$$

Доказательства обеих теорем основывается на приводимом ниже предложении и нескольких леммах.

Предложение1. *Для произвольного постоянного вектора* $\vec{B}$ *резольвента* $\hat{R}_P(\lambda)$ *оператора Паули* $\hat{H}_P$ *дается выражением*

$$\hat{R}_P(\lambda) = \hat{R}_S(\lambda - |\vec{B}|)P_- + \hat{R}_S(\lambda + |\vec{B}|)P_+, \qquad (10)$$

где $\hat{R}_S(\lambda)$*– резольвента оператора Шредингера* $\hat{H}_S$, *а матрицы* $P_\pm$ *заданы соотношениями*

$$P_\pm = \frac{1}{2}\left[I_2 \pm \begin{vmatrix} -\sin\theta & -i\cos\theta \\ i\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}\right], \qquad (11)$$

где θ – угол между плоскостью Π и вектором магнитной индукции $\vec{B}$. (Заметим, что матрицы P_+, P_- являются взаимно ортогональными ортопроекторами).

Доказательство. Из определений оператора Паули $\hat{H}_P$ и матриц Паули σ_l следует равенство

$$\hat{H}_P = \begin{vmatrix} \hat{H}_S - \frac{1}{2m}B_\perp & \frac{i}{2m}B_\parallel \\ -\frac{i}{2m}B_\parallel & \hat{H}_S + \frac{B_\perp}{2m} \end{vmatrix}.$$

Перестановочность матричных элементов матрицы в правой части этого соотношения позволяет получить соотношение

$$\hat{R}_P(\lambda) = \hat{R}_S(\lambda + \frac{1}{2m}|\vec{B}|)\hat{R}_S(\lambda - \frac{1}{2m}|\vec{B}|) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \lambda + \frac{1}{2m}B_\perp - \hat{H}_S & \frac{i}{2m}B_\parallel \\ -\frac{i}{2m}B_\parallel & \lambda - \frac{1}{2m}B_\perp - \hat{H}_S \end{vmatrix}.$$

Применяя тождество Гильберта для резольвенты $\hat{R}_S(\lambda)$ и приводя подобные члены, получим цепочку равенств:

$$\hat{R}_P(\lambda) = \frac{m}{|B|}\hat{R}_S(\lambda - \frac{|\vec{B}|}{2m})\begin{vmatrix} \frac{1}{2m}(|\vec{B}| + B_\perp) & \frac{i}{2m}B_\parallel \\ -\frac{i}{2m}B_\parallel & \lambda + \frac{1}{2m}(|\vec{B}| - B_\perp) \end{vmatrix} -$$

$$- \frac{m}{|\vec{B}|_P}\hat{R}_S(\lambda - \frac{|\vec{B}|}{2m})\begin{vmatrix} \frac{1}{2m}(-|\vec{B}| + B_\perp) & \frac{i}{2m}B_\parallel \\ -\frac{i}{2m}B_\parallel & \lambda + \frac{1}{2m}(-|\vec{B}| - B_\perp) \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{2}\hat{R}_S(\lambda-\frac{|\vec{B}|}{2m})\begin{vmatrix}\frac{|\vec{B}|+B_\perp}{|\vec{B}|} & i\frac{B_\|}{|\vec{B}|}\\ -i\frac{B_\|}{|\vec{B}|} & \frac{|\vec{B}|-B_\perp}{|\vec{B}|}\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\hat{R}_S(\lambda+\frac{|\vec{B}|}{2m})\begin{vmatrix}\frac{|\vec{B}|-B_\perp}{|\vec{B}|} & -i\frac{B_\|}{|\vec{B}|}\\ i\frac{B_\|}{|\vec{B}|} & \frac{|\vec{B}|+B_\perp}{|\vec{B}|}\end{vmatrix}.$$

Из последнего равенства очевидным образом следует соотношение (10). **Предложение доказано.**

При изучении оператора Паули мы будем использовать теорию символов Вейля по Л.Хермандеру [5] и относящиеся к ней результаты работы автора [6]. Здесь мы приведем необходимые определения и утверждения этой теории.

Обозначим H_S – символ Вейля оператора Шредингера $\hat{H}_S$. Прямые вычисления показывают, что

$$H_S(p,q)=\frac{1}{2m}[(p_1-B_\| q_3)^2+(p_2-B_\perp q_1)^2+p_3^2]\cdot \tag{12}$$

Обозначим $S^n(1+H_S)$-множество бесконечно дифференцируемых функций A на R^6 таких, что для любых целочисленных неотрицательных векторов k,l выполняются неравенства

$$\sup_{p,q}\left|(1+H_S(p,q))^{-\frac{n-|k|}{2}}\frac{\partial^{k+l}}{\partial p^k\partial q^l}A(p,q)\right|\equiv\|A\|_{kl}\neq\infty\cdot \tag{13}$$

Как показано в работе [6], из очевидных неравенств

$$\left|\nabla(1+H_S)^{\frac{1}{2}}\right|\leq const\,,$$

$$H_S\geq 0$$

следует, что классы символов $S^n(1+H_S)$ удовлетворяют требованиям теории Л.Хермандера и поэтому для них верны следующие утверждения этой теории, являющиеся в ней основными:

1) если символы Вейля A_1, A_2 принадлежат классам $S^{n_1}(1+H_S), S^{n_2}(1+H_S)$ соответственно, то их произведение по Вейлю $A_1\# A_2$ (то есть символ произведения соответствующих им операторов) принадлежит классу $S^{n_1+n_2}(1+H_S)$ и его *полунормы* $\|A_1 \# A_2\|_{kl}$ *в* $S^{n_1+n_2}(1+H_S)$ *непрерывно зависят от полунорм символов сомножителей;*

2) если некоторый символ Вейля A *принадлежит классу* $S^0(1+H_S)$, *то отвечающий ему оператор* $\hat{A}$ *ограничен в* $L_2(R^3)$ *и его норма в* $L_2(R^3)$ *непрерывно зависит от полунорм* $\|A\|_{kl}$ *в* $S^0(1+H_S)$.

Оба этих утверждения останутся верными, если в них заменить R^3 на R^2 и классы символов $S^n(1+H_S)$ на классы $S^n(1+H_S^{\perp})$, где

$$H_S^{\perp}(p,q) = \frac{1}{2m}[p_1^2 + (p_2 - B_{\perp}q_1)^2] \cdot \qquad (14)$$

Нашей ближайшей целью является установление близости оператора резольвенты $\hat{R}_S(\lambda)$ для оператора Шредингера $\hat{H}_S$ к параметриксу $\hat{P}_S(\lambda)$, то есть оператору с символом Вейля $P_S(\lambda) = (\lambda I - H_S)^{-1}$, при больших значениях $|\lambda|, \lambda \le 0$.

Для этого мы воспользуемся соотношениями

$$\hat{R}_S(\lambda) - \hat{P}_S(\lambda) = \hat{D}_l(\lambda)\hat{R}_S(\lambda) = \hat{R}_S(\lambda)\hat{D}_r(\lambda), \qquad (15)$$

где

$$\hat{D}_r(\lambda) = I - (\lambda I - \hat{H}_S)\hat{P}_S(\lambda), \qquad (16)$$

$$\hat{D}_l(\lambda) = I - \hat{P}_S(\lambda)(\lambda I - \hat{H}_S) \cdot \qquad (17)$$

Лемма 1. *При достаточно больших значениях* $|\lambda|, \lambda \le 0$ *операторы* $\hat{D}_r(\lambda), \hat{D}_l(\lambda)$ *ограничены в* $L_2(R^3)$, *причем*

$$\|\hat{D}_r(\lambda)\| = o(|\lambda|^{-2}), \qquad (18)$$

$$\|\hat{D}_l(\lambda)\| = o(|\lambda|^{-2}) \cdot \qquad (19)$$

Операторы

$$\hat{D}_r(\lambda)(\lambda I + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}) \text{ и } (\lambda I + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})\hat{D}_l(\lambda)$$ *также ограничены в* $L_2(R^3)$, *причем для их норм в* $L_2(R^3)$ *имеют место оценки*

$$\left\|\hat{D}_r(\lambda)(\lambda I + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})\right\| = o(|\lambda|^{-1}), \qquad (20)$$

$$\left\|(\lambda I+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})\hat{D}_l(\lambda)\right\|=o(|\lambda|^{-1})\,. \qquad (21)$$

Доказательство. В силу соотношений для произведения символов Вейля (см.[5]) для символа $D_r(\lambda)$ оператора $\hat{D}_r(\lambda)$ имеет место равенство

$$D_r(\lambda)=-\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q'}-\frac{\partial}{\partial p'}\frac{\partial}{\partial q}\Big)\Big|_{\substack{p'=p\\ q'=q}}\frac{\lambda-H_S(p',q')}{\lambda-H_S(p,q)}\ . \qquad (22)$$

Но

$$H_S(p,q)=\frac{1}{2m}|p-bq|^2,$$

где b–матрица 3×3 и поэтому из соотношения (22) следует, что

$$D_r(\lambda,p,q)=\frac{M_r(p-bq)}{(\lambda-H_S(p,q))^3}, \qquad (23)$$

где $M_r(p,q)$– многочлен второй степени от трехмерной переменной $p-bq$.

Из этого соотношения следует, что символ $D_r(\lambda)$ принадлежит классу $S^{-4}(1+H_S)$ и для всех полунорм $\|\ \|_{kl}$ на классе символов $S^0(1+H_S)$ выполняется неравенство

$$\overline{\lim_{\lambda\to-\infty}}\lambda^2\left\|\hat{D}_r(\lambda)\right\|_{kl}\neq\infty\ . \qquad (24)$$

Отсюда по теореме Л.Хермандера об ограниченности оператора с символом Вейля из класса $S^0(1+H_S)$ получим соотношение (18). Далее применяя теорему о произведении символов Вейля получим соотношение (20). Соотношения (20), (21) получаются аналогично.
Лемма доказана.

Определим теперь операторы $\hat{c}_S^0(\lambda),\hat{d}_S^0(\lambda)$, полагая для произвольной функции ψ из $L_2(\Pi)$

$$d_S^0(\lambda)=\lim_{x_3\to 0}\hat{P}_S(\lambda)[\delta_\Pi\otimes\psi]\ , \qquad (25)$$

$$\dot{c}_S^0(\lambda)=\lim_{x_3\to+0}\frac{\partial}{\partial x_3}\hat{P}_S(\lambda)[\delta_\Pi\otimes\psi]\ . \qquad (26)$$

Прямые вычисления показывают, что символы Вейля $d_S^0(\lambda), c_S^0(\lambda)$ этих операторов даются выражениями

$$d_S^0(\lambda) = -\frac{m}{W(\lambda)}\ , \tag{27}$$

$$c_S^0(\lambda) = m\ , \tag{28}$$

где $W(\lambda,p,q) = \sqrt{2m(-\lambda + H_S^{\perp}(p,q))}$.

Заметим, что оператор $\hat{U}(\lambda)$, отвечающий символу $\dfrac{1}{W(\lambda)}$, ограничен в $L_2(\Pi)$ ввиду принадлежности этого символа классу $S^0(1+H_S^{\perp})$.

Лемма 2. *Существует конечное число λ_0 такое, что для всех $\lambda \le \lambda_0$ и любой вектор - функции φ из $S^2(\Pi)$ существуют пределы*

$$\lim_{x_3 \to 0} \hat{R}_P(\lambda)[\delta_\Pi \otimes \varphi] \equiv \hat{d}_P(\lambda)\varphi\ , \tag{29}$$

$$\lim_{x_3 \to +0} \frac{\partial}{\partial x_3} \hat{R}_P(\lambda)[\delta_\Pi \otimes \varphi] \equiv \hat{c}_P(\lambda)\varphi. \tag{30}$$

При этом линейные операторы $\hat{d}_P(\lambda), \hat{c}_P(\lambda)$, определяемые соотношениями (29), (30), ограничены в $L_2^2(\Pi)$ и удовлетворяют соотношениям

$$\hat{c}_P(\lambda) = mI + \hat{r}_{P2}(\lambda)\ , \tag{31}$$

$$\hat{d}_P(\lambda) = \hat{d}_P^0(\lambda) + \hat{r}_{P1}(\lambda)\ , \tag{32}$$

где

$$\hat{d}_P^0(\lambda) = -m[\hat{U}(\lambda - |\overset{\smile}{B}|)P_- + \hat{U}(\lambda + |\overset{\smile}{B}|)P_+]\ , \tag{33}$$

а операторы $\hat{r}_{P1}(\lambda), \hat{r}_{P2}(\lambda)$ ограничены в $L_2^2(\Pi)$ и удовлетворяют оценкам

$$\|\hat{r}_{p1}(\lambda)\| = o(|\lambda|^{-\frac{5}{2}})\ , \tag{34}$$

$$\|\hat{r}_{p2}(\lambda)\| = o(|\lambda|^{2})\ . \tag{35}$$

Доказательство. Из соотношений (27), (28) и ограниченности оператора $\hat{U}(\lambda)$ следует, что достаточно доказать существование пределов

$$s-\lim_{x_3\to 0}\left[\hat{R}_S(\lambda)-\hat{P}_S(\lambda)\right]\delta_\Pi\otimes\psi\equiv\hat{r}_{S1}(\lambda)\psi \quad , \tag{36}$$

$$s-\lim_{x_3\to +0}\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\hat{R}_S(\lambda)-\hat{P}_S(\lambda)\right]\delta_\Pi\otimes\psi\equiv\hat{r}_{S2}(\lambda)\psi \tag{37}$$

для произвольной основной функции ψ из $S(\Pi)$ и ограниченность операторов $\hat{r}_{S1}(\lambda), \hat{r}_{S2}(\lambda)$ в $L_2(\Pi)$, а также получить оценки их норм.

Заметим сначала, что из принадлежности символов $P_S(\lambda), D_l(\lambda)$ классу $S^{-2}(1+H_S)$ и принадлежности символа $\lambda-p_3^2$ классу $S^2(1+H_S)$ и из соотношения

$$\hat{R}_S(\lambda)=\hat{P}_S(\lambda)+\hat{D}_l(\lambda)\hat{R}_S(\lambda) \tag{38}$$

следует выполнение неравенств

$$\left\|(\lambda I+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})\hat{R}_S(\lambda)\right\|\le c \quad , \tag{39}$$

означающих равномерную ограниченность операторов $(\lambda I+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})\hat{R}_S(\lambda)$ в $L_2(R^3)$ при $\lambda\le\lambda_0$.

Учитывая неравенство (20) и обозначая

$$\hat{F}(\lambda)=(\lambda I+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})\hat{R}_S(\lambda)\hat{D}_r(\lambda)(\lambda I+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}) ,$$

получаем отсюда неравенство

$$\left\|\hat{F}(\lambda)\right\|\le c|\lambda|^{-1} . \tag{40}$$

Воспользуемся теперь соотношением

$$[(\lambda I+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})^{-1}f](x_3)=-\frac{\pi}{\sqrt{|\lambda|}}\int e^{-\sqrt{|\lambda|}|x_3-y|}f(y)dy ,$$

справедливым для любой суммируемой функции f.

Из него следует, что для любой функции v из $L_2(R^3)$ имеют место соотношения

$$[(\lambda I+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})^{-1}v](x_1,x_2,0)=-\frac{\pi}{\sqrt{|\lambda|}}\int e^{-\sqrt{|\lambda|}|y|}v(x_1,x_2,y)dy , \tag{41}$$

$$[\frac{\partial}{\partial x_3}(\lambda I + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})^{-1} v](x_1, x_{2,} 0) = \pi \int Sgny e^{-\sqrt{|\lambda|}|y|} v(x_1, x_2, y) dy \ .$$

Положим теперь

$$u(x_1, x_2, x_3) = (\lambda I + \frac{\partial^2}{\partial x^2})^{-1} \delta_{\Pi} \otimes \psi = -\frac{\pi}{\sqrt{|\lambda|}} e^{-\sqrt{|\lambda|}|x_3|} \psi(x_1, x_2) \ .$$

Прямые вычисления дают соотношение

$$\|u\|_{L_2(R^3)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} |\lambda|^{-\frac{3}{4}} \|\psi\|_{L_2(\Pi)} \ . \tag{42}$$

Полагая

$$v = \hat{F}(\lambda) u,$$

получим в силу соотношения (36), что

$$\|\hat{r}_{S1}(\lambda)\psi\|_{L_2(\Pi)} = \frac{\pi}{\sqrt{-\lambda}} \left\| \int e^{-\sqrt{|\lambda|}|y|} v(x_1, x_2, y) dy \right\|_{L_2(\Pi)} \ .$$

Отсюда, в силу неравенства Буняковского и неравенства Минковского получим, что

$$\|\hat{r}_{S1}\psi\|_{L_2(\Pi)} \le \pi |\lambda|^{-\frac{3}{4}} \|v\|_{L_2(R^3)} .$$

Применяя теперь неравенство (40)и соотношение (42),получим неравенство

$$\|\hat{r}_{S1}(\lambda)\| \le c_1 |\lambda|^{-\frac{5}{2}} \quad \text{при} \ \lambda \to -\infty \ . \tag{43}$$

Аналогично из соотношения

$$\|\hat{r}_{S2}(\lambda)\psi\|_{L_2(\Pi)} = \pi \left\| \int Sgny e^{-\sqrt{|\lambda|}|y|} v(x_1, x_2, y) dy \right\|_{L_2(\Pi)}$$

выводится неравенство

$$\|\hat{r}_{S2}(\lambda)\| \le c_1 |\lambda|^{-2} \ . \tag{44}$$

Но из соотношения (13) следует, что

$$\hat{c}_P(\lambda) = \hat{c}_S(\lambda - |\vec{B}|) P_- + \hat{c}_S(\lambda + |\vec{B}|) P_+ \ ,$$

$$\hat{d}_P(\lambda) = \hat{d}_S(\lambda - |\vec{B}|) P_- + \hat{d}_S(\lambda + |\vec{B}|) P_+ \ .$$

Из этих соотношений и неравенств (43),(44) следует существование и ограниченность операторов $\hat{c}_P(\lambda), \hat{d}_P(\lambda)$, а также справедливость соотношений (29), (30).Лемма доказана.

Обозначим

$$\hat{R}_S^{\perp}(\lambda) = (\lambda I - \hat{H}_S^{\perp})^{-1} \quad ,$$

$$P_S^{\perp}(\lambda) = (\lambda I - H_S^{\perp})^{-1} \quad .$$

Лемма 3. *Для любого положительного ε существует c_ε такое, что для всех $\lambda \le \lambda_0 \ne -\infty$ выполняется неравенство*

$$\left\| \hat{U}(\lambda) - \frac{1}{\sqrt{2m}} (\lambda I - \hat{H}_S^{\perp})^{-\frac{1}{2}} \right\| \le c_\varepsilon |\lambda|^{-\frac{5}{2}+\varepsilon} \quad . \tag{45}$$

Доказательство. Для отрицательных λ имеет место равенство (см. [7. гл. IX])

$$(\lambda I - \hat{H}_S^{\perp})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mu^{-\frac{1}{2}} \hat{R}_S^{\perp}(\lambda - \mu) d\mu \quad .$$

Скалярный аналог этого равенства имеет вид

$$(\lambda I - H_S^{\perp})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mu^{-\frac{1}{2}} P_S^{\perp}(\lambda - \mu) d\mu \quad .$$

Следовательно

$$(\lambda I - \hat{H}_S^{\perp})^{-\frac{1}{2}} - \hat{U}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mu^{-\frac{1}{2}} [\hat{R}_S^{\perp}(\lambda - \mu) - \hat{P}_S^{\perp}(\lambda - \mu)] d\mu \quad . \tag{46}$$

Заменяя H_S на $H_S^{\perp}$, получаем аналоги соотношений (15), (16), (17):

$$\hat{R}_S^{\perp}(\lambda) - \hat{P}_S^{\perp}(\lambda) = \hat{D}_l^{\perp}(\lambda) \hat{R}_S^{\perp}(\lambda) = \hat{R}_S^{\perp}(\lambda) \hat{D}_r(\lambda) \quad , \tag{47}$$

где

$$\hat{D}_r^{\perp}(\lambda) = I - (\lambda I - \hat{H}_S^{\perp}) \hat{P}_S^{\perp}(\lambda) \quad ,$$

$$\hat{D}_l^{\perp}(\lambda) = I - \hat{P}_S^{\perp}(\lambda)(\lambda I - \hat{H}_S^{\perp})$$

и, наконец,

$$D_r^{\perp}(\lambda) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q'} - \frac{\partial}{\partial p'} \frac{\partial}{\partial q} \right) \Big|_{\substack{p'=p \\ q'=q}} \frac{\lambda - H_S^{\perp}(p', q')}{\lambda - H_S^{\perp}(p, q)} \quad .$$

Из этих соотношений следует аналог соотношений (24)

$$\overline{\lim_{\lambda \to -\infty}} \lambda^2 \left\| \hat{D}_r^{\perp}(\lambda) \right\|_{kl} \ne \infty \quad ,$$

где $\| ^{*} \|_{kl}$ – полунормы в классе символов $S^0(1 + H_S^{\perp})$.

Следовательно,оператор $\hat{D}_r^{\perp}(\lambda)$ ограничен в $L_2(\Pi)$ и для отрицательных λ имеют место неравенства

$$\left\|\hat{D}_r^{\perp}(\lambda)\right\| \le |\lambda|^{-2}. \qquad (48)$$

Отсюда следует оценка

$$\left\|\hat{U}(\lambda)-\frac{1}{\sqrt{2m}}(\lambda I-\hat{H}_S^{\perp})^{-\frac{1}{2}}\right\| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mu^{-\frac{1}{2}}c(|\lambda|+\mu)^{-3}d\mu \le$$

$$\le c|\lambda|^{-\frac{5}{2}+\varepsilon}\int_0^{\infty}\mu^{-\frac{1}{2}}c(|\lambda|+\mu)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}d\mu \le c_\varepsilon|\lambda|^{-\frac{5}{2}+\varepsilon}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для достаточно больших по модулю отрицательных* λ *операторы*

$$j\hat{R}_S(\lambda): L_2(R^3)\to L_2(\Pi),$$

$$\hat{R}_S(\lambda)j^*: L_2(\Pi)\to L_2(R^3)$$

непрерывны, а оператор

$$\hat{g}_S(\lambda)=2\alpha^{-1}\hat{c}_S(\lambda)-\hat{d}_S(\lambda)$$

непрерывен и непрерывно обратим в $L_2(\Pi)$, *если матрица* α *невырождена.*

Доказательство. Для произвольной функции ψ из $L_2(\Pi)$ по определению оператора j^* имеет место равенство

$$\hat{R}_S(\lambda)j^*\psi=\hat{R}_S(\lambda)\delta_\Pi\otimes\psi.$$

Отсюда , используя неравенство (39),получим, что

$$\left\|\hat{R}_S(\lambda)j^*\psi\right\|=\left\|\hat{R}_S(\lambda)(\lambda I-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})((\lambda I-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})^{-1}\delta_\Pi)\otimes\psi\right\| \le$$

$$\le\left\|\hat{R}_S(\lambda)(\lambda I-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})\right\|\left\|(\lambda I-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2})^{-1}\delta_\Pi)\right\|\|\psi\|\le c\|\psi\|,$$

а значит оператор $\hat{R}_S(\lambda)j^*$ непрерывен. Но тогда и оператор $j\hat{R}(\lambda)$ непрерывен, поскольку он сопряжен к $\hat{R}_S(\lambda)j^*$.

Непрерывность оператора $\hat{g}_S(\lambda)$ следует из соотношений

$$\hat{c}_S(\lambda) = mI + \hat{r}_{S2}(\lambda) \;,$$
$$\hat{d}_S(\lambda) = -m\hat{U}(\lambda) + \hat{r}_{S1}(\lambda)$$
и неравенств (43), (44), поскольку оператор $\hat{U}(\lambda)$ непрерывен в $L_2(\Pi)$ в силу теоремы Л. Хермандера.

Заметим теперь, что обратимость оператора $\hat{g}_S(\lambda)$ следует из соотношения
$$\|\hat{U}(\lambda)\| = 0(|\lambda|^{-\frac{1}{2}}) \;,$$
имеющего место при $\lambda \to -\infty$. **Лемма доказана.**

Выведем теперь утверждение **Теоремы 1** из доказанных выше лемм.Обозначим
$$\hat{g}_P(\lambda) = 2\alpha^{-1}\hat{c}_P(\lambda) - \hat{d}_P(\lambda) \;.$$
Из соотношения (10) следует, что
$$\hat{g}_P(\lambda) = \hat{g}_S(\lambda - |\overset{\vee}{B}|)P_- + \hat{g}_S(\lambda + |\overset{\vee}{B}|)P_+ \;,$$
а значит, в силу **леммы 4**,оператор $\hat{g}_P(\lambda)$ непрерывно обратим в $L_2(\Pi)$ при достаточно больших по модулю отрицательных λ.

Из того же соотношения (10) и **леммы 4** следует непрерывность операторов $j\hat{R}_S(\lambda), \hat{R}_S(\lambda)j^*$. Следовательно,оператор в правой части равенства (10) непрерывен в $L_2^2(R^3)$. Мы обозначим этот оператор $\hat{R}$. Прямая проверка показывает, что для любой вектор - функции u из $L_2^2(R^3)$ вектор - функция $\hat{R}u$ удовлетворяет краевым условиям (6), а значит $\hat{R}u$ принадлежит $D(\hat{H}_P^{\Pi,\alpha})$.
Равенство
$$(\lambda I - \hat{H}_P^{\Pi,\alpha})\hat{R} = I$$
выполняется в силу определений операторов $\hat{H}_P^{\Pi,\alpha}, \hat{R}$.
В силу вещественности λ отсюда следует соотношение
$$\hat{R}(\lambda I - \hat{H}_P^{\Pi,\alpha}) = I \;,$$
а значит и соотношение (10). **Теорема 1 доказана.**

Доказательство Теоремы 2.

При достаточно больших по модулю отрицательных λ операторы $j\hat{R}_S(\lambda), \hat{R}_S(\lambda)j^*$ голоморфно зависят от λ. Поэтому полюса резольвенты $\hat{R}_P^{\Pi,\alpha}(\lambda)$ в этой части вещественной оси–суть отрицательные нули оператор - функции $\hat{g}_P(\lambda)$. Но в силу теории возмущений из **леммы 3** следует , что эти нули близки к нулям оператор - функции

$$\hat{g}_P^0(\lambda) = 2m\alpha^{-1} +$$

$$+\sqrt{\frac{m}{2}}(-\lambda I + |\vec{B}| + \hat{H}_S^{\perp})^{-\frac{1}{2}} P_- + \sqrt{\frac{m}{2}}(-\lambda I - |\vec{B}| + \hat{H}_S^{\perp})^{-\frac{1}{2}} P_+ \tag{49}$$

при $\lambda \to -\infty$.

Обозначим

$$\hat{b}_{\pm}(\lambda) = (-\lambda I \, \mu \, |\vec{B}| + \hat{H}_S^{\perp})^{-\frac{1}{2}} \quad , \tag{50}$$

$$\beta = -r\begin{Vmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{Vmatrix}, \quad r = \frac{2\sqrt{2m}}{A(1-a^2)} \quad . \tag{51}$$

Тогда

$$\hat{g}_P^0(\lambda) = \sqrt{\frac{m}{2}}(\beta + \hat{b}_-(\lambda)P_- + \hat{b}_+(\lambda)P_+) \quad . \tag{52}$$

Известно, что для $k = 0,1,\ldots$ существуют собственные функции ψ_k оператора $\hat{H}_S^{\perp}$,отвечающие собственным значениям

$$\mu_k = (k + \frac{1}{2})\frac{|\vec{B}|}{m}.$$

Следовательно

$$\hat{b}_{\pm}(\lambda)\psi_k = b_{\pm}^k(\lambda)\psi_k,$$

где

$$b_{\pm}^k(\lambda) = (-\lambda \, \mu \, |\vec{B}| + \mu_k)^{-\frac{1}{2}} \quad ,$$

и если для некоторого отрицательного λ_k выполняется равенство

$$\det[\beta + b_-^k(\lambda_k)P_- + b_+^k(\lambda_k)P_+] = 0 \quad , \tag{53}$$

то существует ненулевой вектор φ_k из $L_2^2(\Pi)$ такой, что

$$\hat{g}_P^0(\lambda_k)\varphi_k = 0.$$

Теперь учитывая, что

$$P_{\pm 12} + P_{\pm 21} = 0\,,$$

получим равенство

$$\det(\beta + b_-^k(\lambda)P_- + b_+^k(\lambda)P) =$$
$$= (1-a^2)r^2 + \det(b_-^k(\lambda)P_- + b_+^k(\lambda)P_+) - rSp(b_-^k(\lambda)P_- + b_+^k(\lambda)P_+) =$$
$$= (1-a^2)r^2 - r(b_-^k(\lambda) + b_+^k(\lambda)) + b_-^k(\lambda)b_+^k(\lambda)\,.$$

Таким образом, для неизвестной величины λ_k получим уравнение

$$[(-\lambda_k - |\vec{B}| + \mu_k)^{-\frac{1}{2}} - r][(-\lambda_k + |\vec{B}| + \mu_k)^{-\frac{1}{2}} - r] = a^2r^2\,. \tag{54}$$

Вводя новые переменные

$$z = r^2(\mu_k - \lambda_k),$$
$$t = r^2|\vec{B}|$$

и полагая

$$G(z,t) = [(z-t)^{-\frac{1}{2}} - 1][(z+t)^{-\frac{1}{2}} - 1] - a^2\,,$$

получим уравнение (54) в виде

$$G(z,t) = 0\,. \tag{55}$$

При $t = 0$ это уравнение имеет два вещественных решения :

$$z_\pm = \frac{1}{(1\pm a)^2}.$$

В то же время

$\left.\dfrac{\partial}{\partial z}G(z,t)\right|_{\substack{z=\frac{1}{(1\pm a)^2}\\ t=0}} \neq 0$, а значит в силу теоремы о неявной функции уравнение (55) при малых t имеет два вещественных решения $z_\pm(t)$.

А поскольку

$$\mu_k = (k+\frac{1}{2})\frac{|B_\perp|}{m}\,,$$

то нули оператор- функции $\hat{g}_P^0(\lambda)$ имеют вид

$$\lambda_k^{\pm} = -\frac{A^2}{8m} z_{\pm}(r^2|\vec{B}|) + (k + \frac{1}{2})\frac{|B_{\perp}|}{m} \quad .$$

Отсюда и следует утверждение доказываемой **теоремы 2.**

Литература.

1. Konig, J.J.,Haug, R.-J.,von Klitzing, K. And Weimann, G., Tilted-magnetic- field measurement of activation energies and cyclotron resonance for $Al_xGa_{1-x}As$-GaAs. Phys.Rev.B. vol.52(1990), 2951-2958.
2. Dremin, A.A., Alyavkin, A.B., Optically detected cyclotron resonance in tilted magnetic field in GaAs-GaAlAs. Письма в ЖЭТФ,т.56(1992), 113-117.
3. Merlin, R. Subband - Landau-level coupling in tielted magnetic fields:exact results for parabolic levels. Solid state communications. Vol.64(1987), 99-101.
4. Antonets M.A.,Geyler V.A. Quasitwo-dimensional charged particle in a tilted magnetic field : asymptotical properties of the spectrum. Russian J.of Math.Phys.1995. v.3, n.4, 1-11.
5. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальныхоператоров с частными производными. Т.3. Псевдодифференциальные операторы.М.,Мир, 1987.
6. Antonets M.A. Задача с начальными данными для псевдодифференциальных операторов. Проблемы математического анализа. Выпуск 18 . Нелинейные уравнения с частными производными и теория функций. 3-42. Издательство СПб.Университета. С.-Петербург,1998. (= Journal of Mathematical Science,Vol. 98, No. 6,March 2000, p 629-653).

7.Иосида К.Функциональный анализ. М., Мир, 1967.

Antonets M.A.
Contact interaction of the Pauli electron with a plane in the presence of a tilted magnetic field. // Preprint № 471 - Nizhny Novgorod: NIRFI, 2001. pp 21.

UDK 517.43

Selfadjoint extensions of the Pauli operator, corresponding to the contact interaction of an electron with a plane in the presence of a homogeneous magnetic field, are constructed. For large values of the interaction constant an asimtotic expression for negative eigenvalues are constructed