Научно-исследовательский радиофизический институт
Министерства образования Российской Федерации

Препринт N 473

О ДИСКРЕТНОМ СПЕКТРЕ ПСЕВДОРЕЛЯТИВИСТСКИХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ СИСТЕМЫ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОЙ ПЕРЕСТАНОВОЧНОЙ СИММЕТРИИ

Г. М. Жислин

Нижний Новгород 2002

Жислин Г. М. О дискретном спектре псевдорелятивистских гамильтонианов системы тождественных частиц в пространствах функций заданной перестановочной симметрии//Препринт №473. — Нижний Новгород: НИРФИ, 2002. 15 с.

УДК 517.9

В работе устанавливается структура дискретного спектра оператора энергии псевдорелятивистских электронов молекул в поле неподвижных ядер в пространствах функций произвольной перестановочной симметрии. В полученных ранее результатах перестановочная симметрия не учитывалась и поэтому они не имели физического смысла.

§1. ВВЕДЕНИЕ*

п.1.1. Мы продолжаем начатое в [1] исследование дискретного спектра $\sigma_d(H_n)$ псевдорелятивистского (ПР) гамильтониана H_n системы n тождественных частиц во внешнем потенциальном поле нескольких центров. В [1] нами был получен целый ряд результатов о структуре $\sigma_d(H_n)$: условия конечности и бесконечности, спектральные асимптотики и т. д., однако эти результаты не учитывали принцип Паули и поэтому вопрос об их физической значимости оставался открытым. Более того, нерелятивистские (НР) модели рассматриваемых систем показывали, что для фермионных систем при $n > 3$ дискретный спектр, найденный без учета симметрии, не имеет физического смысла, ибо соответствующие собственные функции не удовлетворяют принципу Паули [2]. Чтобы результаты изучения спектра H_n имели физический смысл необходимо было так же, как в не релятивистском случае, предварительно сузить оператор H_n на пространство функций, перестановочная симметрия которых (для частиц с данным спином) разрешена принципом Паули. Именно это и делается в данной работе.

п.1.2. Мы исследуем структуру дискретного спектра ограничений $H_n^{(\alpha)}$ исходного оператора H_n на подпространства функций фиксированной перестановочной симметрии α. При этом мы рассматриваем не только те $\alpha = \alpha_k$, которые отвечают разрешенным типам симметрии для электронов (см. §2), но и любые другие α. Тем самым мы с одной стороны не ограничиваем величины возможных спинов тождественных частиц системы только значением 1/2 (спин электрона), и с другой — добываем дополнительную информацию о структуре спектра H_n, ибо спектр H_n есть объединение спектров $\sigma(H_n^{(\alpha)})$ операторов $H_n^{(\alpha)}$ по всем α.

В настоящей работе устанавливается структура дискретного спектра оператора $H_n^{(\alpha)}$ для любого α для систем типа ней-

* Поддержано грантом Е00-1.0-21 Минобразования РФ.

тральных или положительно заряженных молекул (или атомов и их (+)-ионов) с неподвижными ядрами и n псевдорелятивистскими электронами. Слово "типа" означает, что мы рассматриваем взаимодействия не только кулоновские, но и более общего характера.

п.1.3. Главный результат работы — получение двусторонних оценок счетной функции дискретного спектра гамильтониана $H_n^{(\alpha)}$ через счетные функции дискретного спектра некоторых эффективных одночастичных ПР операторов. В эти оценки явным образом входит зависимость от α (Теоремы 2.1, 2.1а). Отсюда и из [3] мы выводим бесконечность дискретного спектра симметрии α и получаем главный член спектральной асимптотики (Теоремы 2.2, 2.2а). Доказано, что условия Теорем 2.1, 2.1а, 2.2, 2.2а, выполняются для любых нейтральных и положительно заряженных систем рассматриваемого типа (Теоремы 2.3, 2.3а).

Для не кулоновских потенциалов кроме того получены близкие к необходимым (в рассматриваемом классе взаимодействий) условия конечности дискретного спектра (Теорема 2.2б).

п.1.4. Мы не приводим здесь доказательств полученных утверждений. Отчасти это связано с тем, что эти доказательства громоздки, однако главная причина в том, что разработанные методы учета симметрии без существенных изменений могут быть применены и в случае, когда мы будем учитывать и точечную симметрию рассматриваемой системы, т.е. в более общем случае. Именно тогда будут опубликованы все наши доказательства.

§2 ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

п.2.1. Рассмотрим систему D_1 n электронов, находящихся в кулоновском поле n_0 неподвижных ядер. Пусть m и $e < 0$ — масса и заряд электрона, $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ — радиус-вектор i-го электрона, $r_{ij} = r_i - r_j$, e_s и $A_s = (A_{s1}, A_{s2}, A_{s3})$ — заряд и радиус-вектор s-го ядра. Псевдорелятивистский гамильтониан системы D_1 записывается в виде

$$H'_n = T' + V,$$

где

$$T' = \sum_{j=1}^{n} T'_j, \quad T'_j = \sqrt{-\Delta_j + m^2},$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{n_0} e_s e |A_s - r_i|^{-1} + e^2 \sum_{i,j;\, i<j}^{1,n} |r_{ij}|^{-1}.$$

Оператор T'_j в импульсном представлении имеет вид $\hat{T}'_j = \sqrt{p_j^2 + m^2}$, где p_j — импульс j-й частицы; в координатном представлении

$$T'_j f(r_j) = \int T_j^0(r_j - z)\, f(z)\, dz,$$

где ядро $T_j^0(r_j)$ есть Фурье-прообраз функции $\sqrt{p_j^2 + m^2}$, $f(z) \in L_2$, $z \in R^3$. Чтобы описать действие оператора T'_j на функции $\psi(r)$, $r = (r_1, \dots, r_n)$ положим $r_z(\bar{j}) = (r_1, \dots, r_{j-1}, z, r_{j+1}, \dots, r_n)$. Тогда

$$T'_j \psi(r) = \int T_j^0(r_j - z)\, \psi\big(r_z(\bar{j})\big)\, dz.$$

Технически удобнее вместо операторов T'_j, $\hat{T}'_j$ и H'_n рассматривать операторы

$$T_j = T'_j - m, \quad \hat{T}_j = \hat{T}'_j - m, \quad T = \sum_{j=1}^{n} T_j = T' - nm$$

и

$$H = H_n = T + V. \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что заряды ядер e_s удовлетворяют неравенству

$$e_s < -2/\pi e, \quad s = 1, 2, \dots, n_0, \tag{2.2}$$

которое обеспечивает полуограниченность оператора H снизу [4]. В выбранной системе единиц $e^2 = 137^{-1}$ — постоянная тонкой структуры. Поскольку заряд s-го ядра $e_s = -Z_s e$, где Z_s — номер в таблице Менделеева того элемента, ядро атома которого расположено в точке A_s, то условие (2.2) означает, что мы рассматриваем ядра атомов только тех элементов, для которых $Z_s < 87$, $s = 1, \dots, n_0$.

Пусть $R^{3n} = \{r\} = \{r_1, \dots, r_n\}$. Оператор H, определенный на $C_0^\infty(R^{3n})$, полуограничен снизу в $L_2(R^{3n})$. Расширим его по Фридрихсу до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение.

п.2.2. Пусть S_n — группа перестановок n элементов. Для $\forall g \in S_n$ определим в пространстве $L_2(R^{3n})$ унитарный оператор T_g: $T_g\psi(r) = \psi(g^{-1}r)$, $\psi(r) \in L_2(R^{3n})$. Очевидно, отображение $g \to T_g$ есть представление группы S_n в $L_2(R^{3n})$. Пусть α — произвольный тип неприводимого представления группы S_n, $|\alpha|$ — его размерность и $\chi_g^{(\alpha)}$ — характер элемента g в представлении типа α. Положим

$$P_n^{(\alpha)} = \frac{|\alpha|}{n!} \sum_{g \in S_n} \bar{\chi}_g^{(\alpha)} T_g.$$

Как известно [5], P_n является проектором в $L_2(R^{(3n)}$,

$$L_2(R^{3n}) = \sum_\alpha P_n^{(\alpha)} L_2(R^{3n}) \tag{2.3}$$

и в каждом пространстве $B^{(\alpha)} := P_n^{(\alpha)} L_2(R^{3n})$ представление $g \to T_g$ группы S_n бесконечнократно представлению типа α. Т.к. $P_n^{(\alpha)} H_n = H_n P_n^{(\alpha)}$, то пространство $B^{(\alpha)}$ инвариантно для H_n. Пусть $H_n^{(\alpha)}$ есть ограничение оператора H_n на $B^{(\alpha)}$. В силу (2.3) спектр $\sigma(H_n)$ оператора H_n является объединением спектров $\sigma(H_n^{(\alpha)})$ операторов $H_n^{(\alpha)}$ по всем α, и, таким образом, изучение спектров операторов $H_n^{(\alpha)}$ для различных α позволяет получить дополнительную информацию о спектре $\sigma(H_n)$. Однако надо иметь в виду, что для реальных квантовых систем физический смысл имеют спектры не всех операторов $H_n^{(\alpha)}$, а только тех из них, у которых тип α разрешен принципом Паули. Разрешенные α определяются спином тождественных частиц системы. В частности, для частиц со спином 1/2 (электроны) разрешенными являются только типы α_k, $k = 0, 1, \ldots, [n/2]$, отвечающие разбиениям числа n на k двоек и $n-2k$ единиц [5]. Поэтому, если нас интересует физическая значимость результатов для гамильтониана H_n n псевдорелятивистских электронов в поле неподвижных ядер, то мы должны рассматривать только $\alpha = \alpha_k$. Мы, однако, будем рассматривать произвольные α, ибо по подходу и методу доказательства тип α_k не принципиально отличается от произвольного α.

п.2.3 Для описания спектра операторов $H_n^{(\alpha)}$ нам понадобится рассмотреть операторы энергии подсистем $D_1(\bar{j})$, получающихся из D_1 удалением частицы с номером j, в пространстве функций $3(n-1)$ переменных $r(\bar{j}) = (r_1, \ldots, r_{j-1}, r_{j+1}, \ldots, r_n)$, симметрия которых порождена симметрией α функций из $B^{(\alpha)}$ при фиксации r_j.

Обозначим через I_j оператор, отвечающий взаимодействию j-го электрона с остальными частицами системы, через $V(\bar{j})$, $T(\bar{j})$, $H(\bar{j})$ — соответственно операторы потенциальной, кинетической и полной энергии системы $D_1(\bar{j})$, получающейся из исходной после изъятия j-го электрона. Очевидно,

$$I_j = \sum_{s=1}^{n_0} e_s e |A_s - r_j|^{-1} + \sum_{m=1; m\neq j}^{n} e^2 |r_{mj}|^{-1}, \quad V(\bar{j}) = V - I_j,$$

$$T(\bar{j}) = T - T_j, \quad H(\bar{j}) = T(\bar{j}) + V(\bar{J}).$$

Т. к. все частицы системы D_1 тождественны, то спектры операторов $H(\bar{j})$ не зависят от j и мы для простоты возьмем $j = n$. Тогда $H(\bar{j}) = H_{n-1}$.

Пусть S_{n-1} — группа перестановок частиц с номерами $1, 2, \ldots, n-1$, $R^{3n-3} = \{r(\bar{n})\}$. В пространстве $L_2(R^{3n-3})$ определим унитарные операторы $T_{\tilde g}$:

$$T_{\tilde g}\varphi\Big(r(\bar n)\Big) = \varphi\Big(\tilde g^{-1} r(\bar n)\Big), \quad \tilde g \in S_{n-1}, \qquad \varphi\Big(r(\bar n)\Big) \in L_2(R^{3n-3}).$$

Обозначим через β типы неприводимых представлений группы S_{n-1}, через $|\beta|$ — размерности этих представлений, через $\chi_{\tilde g}^{(\beta)}$ — характер элемента $\tilde g \in S_{n-1}$ в представлении типа β. Положим

$$P_{n-1}^{(\beta)} = \frac{|\beta|}{(n-1)!} \sum_{\tilde g \in S_{n-1}} \bar\chi_{\tilde g}^{(\beta)} T_{\tilde g}, \quad H_{n-1}^{(\beta)} = P_{n-1}^{(\beta)} H_{n-1}.$$

Для произвольных α и β будем обозначать через M_β^α число, показывающее, сколько раз неприводимое представление типа β группы S_{n-1} содержится в неприводимом представлении типа α группы S_n после сужения его с S_n на S_{n-1}. Пусть $\tau(\alpha) = \{\beta \mid M_\beta^\alpha \geq 1\}$. Например, при $\alpha = \alpha_k$ [2]

$$\tau(\alpha_k) = \{\beta_{k-1}, \beta_k\}, \quad 0 < k < n/2,$$
$$\tau(\alpha_0) = (\beta_0), \quad \tau(\alpha_{n/2}) = (\beta_{n/2-1}),$$

где β_s — тип неприводимого представления группы S_{n-1}, отвечающий разбиению числа $n-1$ на s двоек и $n-1-2s$ единиц.

Пусть

$$H_{n-1}(\alpha) = \sum_{\beta \in \tau(\alpha)} H_{n-1}^{(\beta)}, \quad \mu^{(\alpha)} = \inf H_{n-1}(\alpha).$$

Оператор $H_{n-1}(\alpha)$ есть оператор энергии подсистемы $D_1(\bar n)$, когда состояния системы D_1 имеют симметрию α.

Согласно [6], существенный спектр $\sigma_{ess}(H_n^{(\alpha)})$ оператора $H_n^{(\alpha)}$ совпадает с полуосью $[\mu^{(\alpha)}, +\infty)$. Всюду далее предполагается, что $\mu^{(\alpha)}$ есть дискретное собственное значение оператора $H_{n-1}(\alpha)$ и через $U(\alpha)$ обозначается соответствующее $\mu^{(\alpha)}$ собственное подпространство.

Рассмотрим сначала случай, когда подпространство $U(\alpha)$ не вырождено по симметрии, т.е. когда представление $\tilde{g} \to T_{\tilde{g}}$ группы S_{n-1} в $U(\alpha)$ неприводимо. Его тип обозначим через β'. Наше предположение означает: $\exists!\beta' \in \tau(\alpha)$ такое, что

$$\mu^{(\alpha)} \in \sigma_d\left(H_{n-1}^{(\beta')}\right), \quad \mu^{(\alpha)} < \inf H_{n-1}^{(\beta)}, \quad \beta \neq \beta', \quad \forall\beta \in \tau(\alpha),$$

$$\dim U(\alpha) = |\beta'|.$$

Общий случай обсуждается в п.2.9.

п.2.4. Пусть $q_k = \sum\limits_{s=1}^{n_0} e_s + ke$, $Q_k = q_k e$. Очевидно, q_k — заряд системы из n_0 ядер и k электронов. Важную роль в данной работе будет играть условие

$$Q_{n-1} < 0. \tag{2.4}$$

Чтобы оно выполнялось, достаточно рассматривать только нейтральные ($q_n = 0$) или положительно заряженные ($q_n > 0$) системы, так как при любом m и $n \geq m \geq 1$ выполняется $q_{n-m} = q_n - me \geq -me > 0$, ибо $e < 0$.

Аналогично, условие $Q_{n-1} = 0$ означает, что $q_{n-1} \geq 0$, т.е. $q_n \geq e$.

Для произвольных чисел $\varepsilon > 0$, $R > 0$ введем в пространстве $R_n^3 = \{r_n\}$ одночастичные ПР операторы

$$h_n^{\pm}(\varepsilon, R) = T_n + (Q_{n-1} \pm \varepsilon)\,|r_n|^{-1}, \tag{2.5}$$

которые будем рассматривать на гладких функциях $f(r_n)$ с носителями в области $|r_n| \geq R$ с граничным условием $f(r_n) = 0$ при $|r_n| = R$. Наконец, для произвольного оператора A обозначим через D_A, $\sigma_d(A)$ и $N(\delta, A)$ соответственно область определения A, его дискретный спектр и размерность линейной оболочки собственных векторов оператора A, отвечающих его собственным значениям, не превосходящим δ.

п.2.5. Основным результатом данной работы является

Теорема 2.1. *Пусть* $\mu^{(\alpha)} \in \sigma_d\Big(H_{n-1}(\alpha)\Big)$. *Тогда по* $\forall\varepsilon > 0$, $\lambda_0 > 0$ *можно указать такие числа* $R > 0$, $C = C(\varepsilon, R) > 0$, *что при* $\forall\lambda$, $0 < \lambda \le \lambda_0$

$$\begin{aligned} |\alpha|\, M^{\alpha}_{\beta'} N\Big(-\lambda;\, h_n^{+}(\varepsilon, R)\Big) \; &\le \; N\left(\mu^{(\alpha)} - \lambda;\, H^{(\alpha)}\right) \le \\ &\le \; C + |\alpha|\, M^{\alpha}_{\beta'} N\Big(-\lambda;\, h_n^{-}(\varepsilon, R)\Big). \end{aligned}$$

Используя известные спектральные свойства операторов (2.5) [3], мы можем получить из Теоремы 2.1 следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть* $Q_{n-1} < 0$ *и* $\mu^{(\alpha)} \in \sigma_d\Big(H_{n-1}(\alpha)\Big)$. *Тогда дискретный спектр оператора* $H_n^{(\alpha)}$ *бесконечен и*

$$\lim_{\lambda \to 0+0} \frac{N\left(\mu^{(\alpha)} - \lambda;\, H_n^{(\alpha)}\right)}{G(\lambda)} = 1,$$

где $G(\lambda) = 6^{-1}\, 2^{-\frac{1}{2}}\, m^{\frac{3}{2}}\, |Q|^{\frac{3}{2}}\, \lambda^{-\frac{3}{2}}\, M^{\alpha}_{\beta'}\, |\alpha|$.

Условием применимости Теорем 2.1, 2.2 является включение $\mu^{(\alpha)} \in \sigma_d\Big(H_{n-1}(\alpha)\Big)$. Его выполнение при $Q_{n-1} \le 0$ обеспечивается следующим простым утверждением.

Теорема 2.3. *Пусть* $n \ge 2$, $Q_{n-1} \le 0$ *и* δ_p *— произвольный тип неприводимого представления группы* S_p, $1 \le p \le n-1$. *Тогда*

$$\inf H_p^{(\delta_p)} \in \sigma_d\left(H_p^{(\delta_p)}\right), \quad p = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где оператор $H_p^{(\delta_p)}$ *определен аналогично* $H_n^{(\alpha)}$.

Теорема 2.3 доказывается индукцией по p.

В силу Теоремы 2.3, Теоремы 2.1 и 2.2. применимы к любым нейтральным молекулам и положительным молекулярным ионам, а Теорема 2.1 — и к однократным отрицательным молекулярным ионам (ядра атомов всегда фиксированы).

п.2.6. **Замечания.**

1. Вывод Теоремы 2.2 из Теоремы 2.1 проводится так же, как в [1].

2. Условие $Q_{n-1} \leq 0$ не требуется для доказательства Теоремы 2.1. В силу Теоремы 2.3 оно является лишь достаточным для выполнения единственного условия Теоремы 2.1 — включения $\mu^{(\alpha)} \in \sigma_d(H_n)$.

3. Случай $Q_{n-1} = 0$, т.е. случай однократных отрицательных псевдорелятивистских ионов ($q_n = e$), мы здесь не рассматриваем, хотя в этом случае, в принципе, можно было бы доказать конечность спектра $\sigma_d\left(H_n^{(\alpha)}\right)$. Дело в том, что такое доказательство носило бы условный характер, ибо опиралось бы на не доказанную суммируемость в L_2 функций $\varphi \in U(\alpha)$ с весом $\left(\sum\limits_{s=1}^{n-1} |r_s|^2\right)^{1/2}$ (последнее известно только при $n = 2$ [7]).

4. Если сравнить полученную в Теореме 2.2 асимптотику дискретного спектра ПР системы с аналогичным результатом для НР системы ([8, Теорема 1]), то мы увидим следующее главное отличие: в [8] получена близкая к неулучшаемой оценка членов спектральной асимптотики, следующих за главным, а здесь вообще нет оценки этих членов. Это отличие порождается двумя обстоятельствами, каждое из которых является “роковым”. Во-первых, мы не можем получить точные оценки следующих членов эффективных потенциалов в (2.5), ибо для этого надо знать характер убывания на бесконечности или суммируемость с весом собственных функций дискретного спектра многочастичных ПР систем, а такие результаты, как мы уже говорили, известны лишь для одночастичных систем [7]. Во вторых, отсутствуют оценки следующих за главным членов спектральной асимптотики эффективных ПР операторов (2.5).

п.2.7. Полученные в статье результаты можно распространить на системы тождественных частиц в потенциальном поле нескольких источников с потенциалами взаимодействия более общими, чем кулоновские. Пусть $W_0(r_1) < 0$, $W_1(r_1) > 0$ — такие функции, что $W_0(r_1), W_1(r_1) \in L_{2,loc}$ и $\exists N > 0$, такое, что при $|r_1| \geq N$

$$W_0(r_1) = \sum_{s=1}^{n_0} e_s e |A_s - r_1|^{-\gamma}, \quad W_1(r_1) = e^2 |r_1|^{-\gamma},$$

где $\gamma > 0$ — некоторая константа; A_s, e_s, e — те же, что в п.2.1. Пусть

$$W = \sum_{j=1}^{n} W_0(r_j) + \sum_{i,j=1; i<j}^{n} W_1(|r_{ij}|),$$

$$\hat{H} = \hat{H}_n = T + W, \quad \hat{H}^{(\alpha)} = P_n^{(\alpha)} \hat{H},$$

$$J_n = W_0(r_n) + \sum_{m=1}^{n-1} W_1(|r_{mn}|),$$

$$W(\bar{n}) = W - J_n, \quad \hat{H}_{n-1} = T(\bar{n}) + W(\bar{n}),$$

$$\hat{H}_{n-1}^{(\beta)} = P_{n-1}^{(\beta)} \hat{H}_{n-1}, \quad \hat{H}_{n-1}(\alpha) = \sum_{\beta \in \tau(\alpha)} \hat{H}_{n-1}^{(\beta)}, \quad \vartheta^{(\alpha)} = \inf \hat{H}_{n-1}(\alpha),$$

$$\hat{h}_n^{\pm}(\varepsilon, R) = T_n + (Q_{n-1} \pm \varepsilon)\, |r_n|^{-\gamma}$$

и области определения операторов $\hat{H}$, $\hat{H}_{n-1}$, $\hat{h}_n^{\pm}(\varepsilon, R)$ введены так же, как и для операторов H, H_{n-1}, $h_n^{\pm}(\varepsilon, R)$.

Согласно [6], $\sigma_{ess}\left(\hat{H}^{(\alpha)}\right) = [\vartheta^{(\alpha)}, +\infty)$. Мы предполагаем, что $\vartheta^{(\alpha)} \in \sigma_d\left(\hat{H}_{n-1}^{(\alpha)}\right)$ и обозначим через $\hat{U}(\alpha)$ отвечающее числу $\vartheta^{(\alpha)}$ собственное подпространство оператора $\hat{H}_{n-1}(\alpha)$. Аналогично п.2.3 предполагаем, что $\exists! \beta'' \in \tau(\alpha)$ такое, что

$$\vartheta^{(\alpha)} \in \sigma_d\left(\hat{H}_{n-1}^{(\beta'')}\right), \quad \vartheta^{(\alpha)} < \inf \hat{H}_{n-1}^{\beta}, \quad \beta \neq \beta'', \quad \beta \in \tau(\alpha),$$

$$\dim \hat{U}(\alpha) = |\beta''|.$$

п.2.8. **Теорема 2.1a.** *Пусть* $\vartheta^{\alpha)} \in \sigma_d\Big(\hat{H}_{n-1}(\alpha)\Big)$. *Тогда по* $\forall\varepsilon > 0$, $\lambda_0 > 0$ *можно указать такие числа* $R > 0$, $C = C(\varepsilon, R) > 0$, *что при* $\forall\lambda$, $0 < \lambda < \lambda_0$

$$\begin{aligned}|\alpha|\, M^{\alpha}_{\beta''}\, N\Big(-\lambda;\, \hat{h}^{+}_{n}(\varepsilon, R)\Big) \ &\le\ N\left(\vartheta^{(\alpha)} - \lambda,\, \hat{H}^{(\alpha)}\right) \le \\ &\le\ C + |\alpha|\, M^{\alpha}_{\beta''}\, N\Big(-\lambda;\, \hat{h}^{-}_{n}(\varepsilon, R)\Big).\end{aligned}$$

Из Теоремы 2.1a и результатов [3] (см. [1, п.1.5]) мы получаем в зависимости от Q_{n-1} и γ Теоремы о конечности и бесконечности дискретного спектра оператора $\hat{H}^{(\alpha)}_n$ и спектральные асимптотики, если спектр $\sigma_d(\hat{H}^{(\alpha)}_n)$ бесконечен.

Теорема 2.2a. *Пусть* $\vartheta^{(\alpha)} \in \sigma_d\Big(\hat{H}_{n-1}(\alpha)\Big)$ *и либо* $\gamma < 2$, $Q_{n-1} < 0$, *либо* $\gamma = 2$, $Q_{n-1} < \dfrac{1}{8m}$. *Тогда дискретный спектр* $\sigma_d(\hat{H}^{(\alpha)}_n)$ *бесконечен и*

$$\lim_{\lambda\to 0+0} \frac{N\left(\vartheta^{(\alpha)} - \lambda;\, \hat{H}^{(\alpha)}_n\right)}{g_\gamma(\lambda)} = 1, \tag{2.6}$$

где

$$g_\gamma(\lambda) = \frac{2^{5/2}}{3\pi}\, m^{3/2}\, |Q_{n-1}|^{3/\gamma}\, |\lambda|^{3/2-3/\gamma}\, B\left(\frac{3}{\gamma} - \frac{3}{2};\, \frac{5}{2}\right) \gamma^{-1}\, |\alpha|\, M^{\alpha}_{\beta''}$$

при $\gamma < 2$,

$$g_2(\lambda) = |\ln 2\lambda|\, \frac{1}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{\ell_0} (2\ell + 1) \sqrt{|2Q|\, m - \left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2},$$

$$\ell_0 = \left[\sqrt{2\,|Q|\, m} - \frac{1}{2}\right],$$

$B(\tau_1, \tau_2)$ — *бета-функция.*

Теорема 2.2b. *Пусть* $\vartheta^{(\alpha)} \in \sigma_d\Big(\hat{H}_{n-1}(\alpha)\Big)$ *и либо* $\gamma > 2$, *либо* $\gamma = 2$, $Q_{n-1} > -\dfrac{1}{8m}$, *либо* $0 < \gamma < 2$, $Q_{n-1} > 0$. *Тогда спектр* $\sigma_d(\hat{H}^{(\alpha)}_n)$ *конечен.*

Выполнение условия $\vartheta^{(\alpha)} \in \sigma_d\Big(\hat{H}_{n-1}(\alpha)\Big)$ в некоторых случаях обеспечивается следующим утверждением.

Теорема 2.3а. *Пусть $n \geq 2$ фиксировано и либо $\gamma < 2$, $Q_{n-1} < 0$, либо $\gamma = 2$ и $Q_{n-1} < -\dfrac{1}{8m}$. Тогда $\vartheta^{(\alpha)} \in \sigma_d\Big(\hat{H}_{n-1}(\alpha)\Big)$.*

Из Теорем 2.3, 2.3а следует, что при $\gamma < 2$, $Q_{n-1} < 0$ и при $\gamma = 2$, $Q_{n-1} < -\dfrac{1}{8m}$ выполняется оценка (2.6).

п.2.9. В заключение опишем те изменения, которые надо внести в формулировки наших результатов в том случае, когда собственное подпространство $U(\alpha)$ $\{\hat{U}(\alpha)\}$ оператора $H_n^{(\alpha)}$ $\{\hat{H}_n^{(\alpha)}\}$, отвечающее его собственному значению $\mu^{(\alpha)}$ $\{\vartheta^{(\alpha)}\}$, "вырождено по симметрии". Пусть

$$\tau' = \tau'(\alpha) = \{\beta' \mid P_{n-1}^{(\beta')} U(\alpha) \neq 0\},$$

$$\tau'' = \tau''(\alpha) = \{\beta'' \mid P_{n-1}^{(\beta'')} \hat{U}(\alpha) \neq 0\},$$

$n_{\beta'}$ $\{n_{\beta''}\}$ — кратность представления типа β' $\{\beta''\}$ группы S_{n-1} операторами $T_{\tilde{g}}$ в $U(\alpha)$ $\{\hat{U}(\alpha)\}$. Тогда в Теоремах 2.1, 2.2 вместо $M_{\beta'}^{\alpha}$ надо писать $\sum\limits_{\beta' \in \tau'} n_{\beta'} M_{\beta'}^{\alpha}$, а в Теоремах 2.1а, 2.2а вместо $M_{\beta''}^{\alpha}$ — $\sum\limits_{\beta'' \in \tau''} n_{\beta''} M_{\beta''}^{\alpha}$.

Литература

1. Жислин Г. М., Вугальтер С. А. О дискретном спектре псевдорелятивистских электронов // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. №1.

2. Жислин Г. М., Сигалов А. Г. О спектре оператора Шредингера для атомов с неподвижными ядрами на подпространствах, отвечающих неприводимым представлениям группы перестановок // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. №4. С. 835–860.

3. Жислин Г.М., Вугальтер С.А. Спектральные свойства псевдорелятивистской системы двух частиц с конечными массами // ТМФ. 1999. Т.121. №2. С.297–306.

4. Lieb E , Yau H.-T. Stability and Instability of Relativistic Matter // CMP. 1988. V.118. P.177–213.

5. Вигнер Е. Теория групп. — М.: И.Л., 1961.

6. Lewis R. T., Siedentop H., Vugalter S. The essential spectrum of relativistic multiparticle operators // Ann. Inst. Poincare. Ph. Th. 1997. V.67. №1. P.1–28.

7. Carmona R., Masters W. C., Simon B. Relativistic Schrodinger operators: asymptotic behavior of eigenfunctions // J. Func. Anal. 1990. V.91. №1. P.117–142.

8. Вугальтер С.А., Жислин Г.М. Об асимптотике дискретного спектра заданной симметрии многочастичных гамильтонианов // Тр. ММО. 1991. Т.54. С.187–213.

Жислин Григорий Моисеевич

О дискретном спектре псевдорелятивистских гамильтонианов системы тождественных частиц в пространствах функций заданной перестановочной симметрии

Подписано в печать 26.04.2002 г. Формат 60 × 84/16.
Бумага писчая. Объем 0,88 усл. п. л.
Тираж 50. Заказ 5520.

Отпечатано в НИРФИ
Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25