

**Научно-исследовательский радиофизический институт  
Министерство образования Российской Федерации**

**Препринт № 478 р**

**ТОМОГРАФИЯ  
ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ ПРОЕКЦИЙ. III.  
РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИЙ ПОДХОД И МЕТОД  
2-CLEAN DSA  
В ПРИЛОЖЕНИИ К ТРЕХМЕРНЫМ ЗАДАЧАМ**

**Агафонов М.И.,  
Шарова О.И.**

**Нижний Новгород - 2003**

Агафонов М.И., Шарова О.И.

## **ТОМОГРАФИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛЕ ПРОЕКЦИЙ. III. РАДИОАСТРОНОМИЧЕСКИЙ ПОДХОД И МЕТОД**

### **2-CLEAN DSA В ПРИЛОЖЕНИИ К ТРЕХМЕРНЫМ ЗАДАЧАМ**

Препринт № 478 р. – Нижний Новгород: НИРФИ, 2003, 23с.

УДК 52-77; 621.391:53.08; 520.86; 519.711:53; 519.713; 004.93'1; 615.47

Радиоастрономический подход и метод 2-CLEAN DSA рассмотрены в приложении к двум вариантам трехмерной реконструкции. Первый вариант предполагает использование одномерных проекций, полученных сканированием объекта плоскими ножевыми лучами, второй – восстановление на основе двумерных проекций. Рассмотрен принцип построения и визуализации синтезированного луча. Показана связь уровня его боковиков с необходимым для реконструкции количеством проекций в сравнении со случаем двумерной реконструкции. Возможности графического представления процесса иллюстрированы примером трехмерной модели оптически тонкого эмиссионного объекта. Рекомендуются приложения метода: дистанционные исследования объектов, в том числе задачи астротомографии. Возможна адаптация решения к трансмиссионной задаче.

Ключевые слова: радиоастрономия, малоракурсная томография, дистанционные исследования, обратная задача, реконструкция изображений и анализ, распознавание образов, синтезированный луч, метод 2-CLEAN DSA, цифровая обработка, итерационные алгоритмы, нелинейные ограничения, компьютерное моделирование, информационно-вычислительная технология, бесконтактный мониторинг, астротомография.

**Введение.** Задача реконструкции трехмерной внутренней структуры объектов стоит во многих областях современных научных исследований. Методы ее решения представляют интерес для широкого круга развивающихся технологий. К ним следует отнести исследования лабораторной плазмы, энергетику, медицину, астротомографию, неразрушающий контроль и бесконтактный мониторинг широкого круга объектов. По ряду причин во многих случаях количество проекций ограничено, наблюдения доступны лишь для малого числа направлений. Для целой серии задач сектор расположения углов может быть также ограничен. Наличие указанных обстоятельств стимулировало поиск путей решения проблемы, отличающихся от традиционного томографического подхода, количество проекций для которого, согласно Брейсуэллу и Риддлу [1], должно быть не менее  $N_{BR} \geq \pi D / \varphi$ , где  $\varphi$  – желаемое разрешение, а  $D$  – размер объекта, причем  $\varphi = 1/\omega_b$ , где  $\omega_b$  – граничная пространственная частота или частота среза. Число проекций  $N_{BR}$  было названо в [2] числом Брейсуэлла–Риддла. Решение задачи методом деконволюции положено в основу радиоастрономического подхода, применение которого позволяет существенно уменьшить количество необходимых проекций по сравнению с числом  $N_{BR}$ . Его основными признаками являются введение синтезированного луча (*Synthesized Beam, SB*), процедура чистки (*CLEAN*) для исключения откликов от боковых (*Sidelobes, SL*), а также метод определения области допустимых решений для сложных случаев (*2-CLEAN DSA*), реализуемый при помощи двух алгоритмов чистки. Алгоритмы чистки – это радиоастрономические реализации итерационного алгоритма с нелинейными ограничениями. Использование радиоастрономического подхода позволяет весьма привлекательным образом провести реконструкцию при наличии малого числа проекций, а также выполнить моделирование с целью создания более эффективных установок для томографических исследований.

В работе [2] представлено обобщенное изложение радиоастрономического подхода и метода определения области допустимых решений 2-CLEAN DSA для томографической задачи при ограниченном числе одномерных (1D) проекций. Рассматривалась реконструкция распределения яркости двумерного (2D) сечения.

В настоящей работе представлены два основных варианта трехмерной (3D) реконструкции структуры объекта: 1) по одномерным (1D) проекциям; 2) 3D-реконструкция объекта по его двумерным (2D) проекциям. Особое внимание уделялось визуализации, проблеме упорядочения и отображения трехмерных данных, так как трехмерные задачи требуют доступного исследователю наглядного графического представления материала. Рассмотрен принцип применения радиоастрономического подхода и метода определения области допустимых решений 2-CLEAN DSA к трехмерным задачам, показана аналогия с представленным ранее вариантом реконструкции двумерных сечений. Графическими примерами иллюстрирована процедура построения синтезированных лучей. Рассмотрен вопрос взаимосвязи уровней их боковых и количества проекций для различных вариантов задачи. Сделана оценка необходимого числа проекций для трехмерной реконструкции в сравнении с восстановлением 2D-сечений на основе 1D-проекций.

**Постановка задачи** – реконструкция трехмерного распределения яркости оптически тонкого эмиссионного объекта с ограниченной в пространстве областью светимости при параллельном лучевом распространении. Исследованиям вопросов, возникающих для оптически толстых объектов, при искажениях лучевого хода в окружающих их средах, в объектах с дифракцией посвящено много научных работ, и здесь они не обсуждаются. По сходной причине мы не касаемся в настоящей работе фазовой проблемы, вопросов когерентного излучения, а также перехода к трансмиссионной схеме.

**Три варианта трехмерной реконструкции.** На рис.1 показаны три основных варианта трехмерной реконструкции. Случай а) соответствует реконструкции 3D-структуры *на основе плоских двумерных сечений* с заданным шагом. Реконструкция плоских сечений была детально рассмотрена ранее [2]. В этой задаче принципиальна лишь реконструкция одного из двумерных сечений, реконструкция других полностью аналогична. Случаи б) и в) соответствуют двум вариантам трехмерной реконструкции: б) *по одномерным проекциям, полученным сканированием плоскостями*; в) *на основании двумерных изображений объекта*. Оба варианта описаны в первой главе монографии [3] и являются основополагающими для задач трехмерной томографии. Способ решения проблемы при наличии ограниченного числа проекций представляет для этих случаев несомненный интерес.

**Сканирование 3D-объекта плоскими ножевыми лучами** (см. рис.1б) с различных направлений приводит к регистрации соответствующих одномерных проекций. Каждая точка кривой соответствует интегральной интенсивности слоя. Поскольку в реальном случае ножевой луч имеет конечную толщину (на рисунке это соответствует направлению оси  $x$ ), в качестве приближения к реальной диаграмме выбрана функция Гаусса. Она определяет разрешение одномерных проекций. Трехмерное представление задачи и моделирование для случаев б) и в) выполнялось с минимальным числом направлений для упрощения проблемы визуализации. Построение проекций для всех графиков соответствует направлениям осей ( $x, y, z$ ).

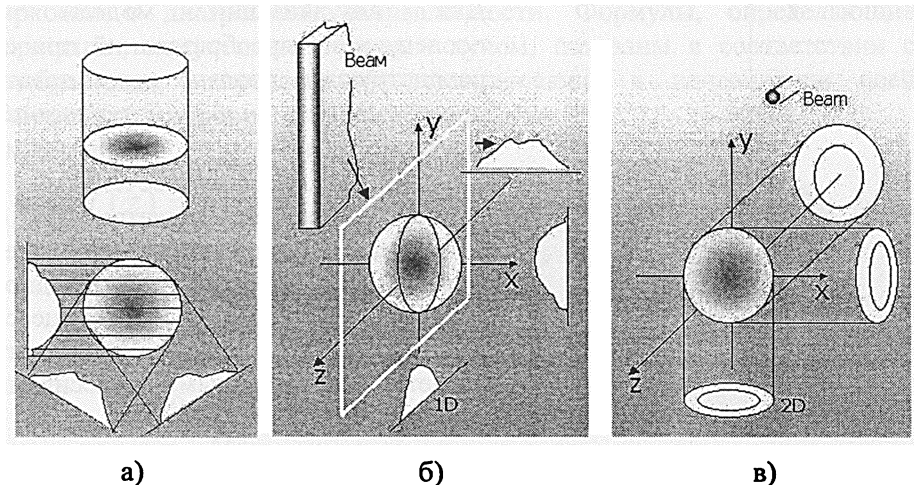


Рис.1. Три варианта трехмерной реконструкции: а) набором параллельных 2D-сечений, полученных реконструкцией по одномерным проекциям слоя; б) и в) методом прямой 3D-реконструкции: б) по одномерным проекциям, соответствующим сканированию объекта с разных направлений плоскими ножевыми лучами конечной толщины; в) на основе двумерных проекций – изображений объекта с различных направлений, разрешение которых определяется размерами луча карандашной формы

**Набор двумерных проекций** для минимального числа направлений в трехмерной задаче иллюстрирует рис.1в). Разрешение проекции определяется конечными размерами карандашного луча, диаграмма направленности которого аппроксимируется функцией Гаусса.

**Моделирование и визуализация при трехмерной реконструкции.** Поскольку отображение интенсивности функции в трехмерной задаче должно обеспечить наглядность в процессе проведения моделирования, вопросам упорядочения и отображения трехмерных данных, то есть визуализации, должно уделяться повышенное внимание. Это не раз отмечалось различными авторами, например, в [4, 5] и [6]. Для отображения синтезированной диаграммы в каждом случае целесообразно использовать представление серией поверхностей, ограничивающих фигуру на уровне с заданной интенсивностью от максимума, то есть выбрать представление *по контуру*. Для визуализации модели и последующих преобразований при ее реконструкции полезно использовать представление *набором сечений*. Эффективность отображения трехмерных массивов сечениями в данном случае определяется еще и тем, что 2D-представление дает возможность проводить наглядное сопоставление данных в процессе реконструкции, а также выполнять расчеты с числовыми массивами сечений.

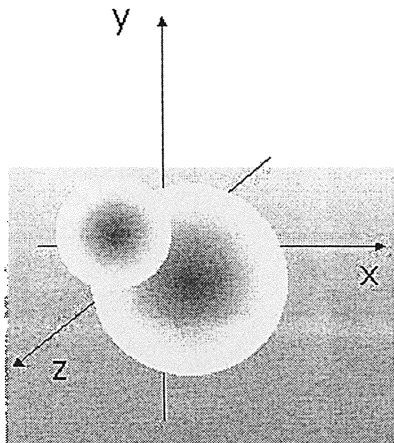


Рис.2. Модель

**Модель.** В качестве примера используем несложную модель, операции с которой могли бы иллюстрировать трехмерную задачу. Распределение яркости опишем выражением

$$f(x, y, z) = A \cdot \exp\left\{-\frac{[(x-x_a)^2 + (y-y_a)^2 + (z-z_a)^2] d}{S_a^2}\right\} + B \cdot \exp\left\{-\frac{[(x-x_b)^2 + (y-y_b)^2 + (z-z_b)^2] d}{S_b^2}\right\}, \quad (1)$$

где  $A = 10$ ;  $B = 20$ ;  $d = 4 \ln 2$ ;  $S_a = 0,7$ ;  $S_b = 0,5$ ;  
 $x_a = 0,3$ ;  $x_b = -0,8$ ;  $y_a = 0,2$ ;  $y_b = 0,7$ ;  $z_a = -0,5$ ;  $z_b = 0,1$ .

**Диаграммы направленности** для двух вариантов запишем в виде выражений

$$h_k(\alpha) = \exp\left(-\frac{\alpha^2 d}{S^2}\right) \quad (2)$$

для сканирования плоским *ножевым* лучом (*НЛ*),

$$h_p(\alpha, \beta) = \exp\left(-\frac{\alpha^2 d}{S^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\beta^2 d}{S^2}\right) \quad (3)$$

для *карандашного* луча (*КЛ*), где  $\alpha$  и  $\beta$  – оси координат ( $x$ ,  $y$  или  $z$ ).

**Проецирование.** Проекция является сверткой распределения яркости с диаграммой направленности. Формулы, определяющие проекции, полученные *ножевым* лучом, показаны в соответствии с выбранными направлениями проецирования в направлении осей координат,

по оси  $z$ :

$$V(z) = \iiint f(x', y', z') dx' \cdot dy' h_k(z' - z) dz' \quad , \quad (4)$$

по оси  $x$ :

$$V(x) = \iiint f(x', y', z') dz' \cdot dy' h_k(x' - x) dx' \quad , \quad (5)$$

по оси  $y$ :

$$V(y) = \iiint f(x', y', z') dx' \cdot dz' h_k(y' - y) dy' \quad . \quad (6)$$

Далее приведены формулы, определяющие двумерные проекции, полученные *карандашным* лучом,

в плоскости  $x$ - $y$ :

$$W(x, y) = \iiint f(x', y', z') dz' \cdot h_p(x' - x, y' - y) dx' dy' \quad , \quad (7)$$

в плоскости  $x$ - $z$ :

$$W(x, z) = \iiint f(x', y', z') dy' \cdot h_p(x' - x, z' - z) dx' dz' \quad , \quad (8)$$

в плоскости  $y$ - $z$ :

$$W(y, z) = \iiint f(x', y', z') dx' \cdot h_p(y' - y, z' - z) dy' dz' \quad . \quad (9)$$

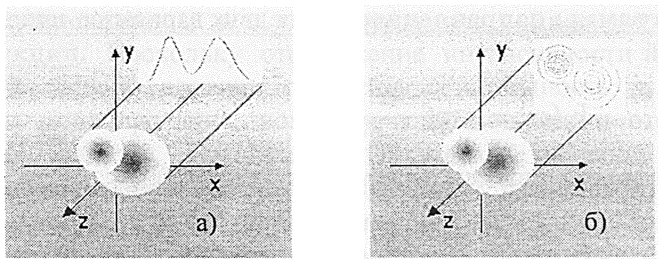


Рис.3. Иллюстрация к проецированию в пространстве:  
 а) для плоского ножевого луча, б) для карандашного луча

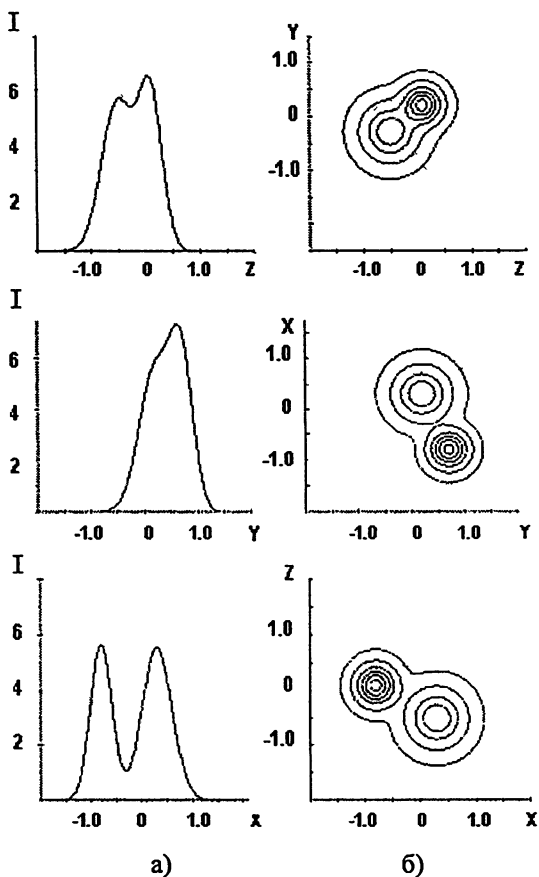


Рис.4. Расчетные проекции в трех направлениях для принятой модели:  
 а) одномерные при плоских ножевых лучах,  
 б) двумерные при карандашных лучах



Иллюстрация к проецированию для каждого из вариантов приводится на рис.3. На рис.4 показаны полученные результаты расчета проекций для принятой модели при ножевых и карандашных лучах.

Моделирование, а также последующее решение задачи для 3D-реконструкции возможно провести аналогично рассмотренному ранее [2,7] двумерному случаю. Схема процесса показана на рис.5. Предварительно необходимо выполнить построение синтезированных лучей (суммарных диаграмм) и суммарных изображений с помощью обратного проецирования для каждого из вариантов.

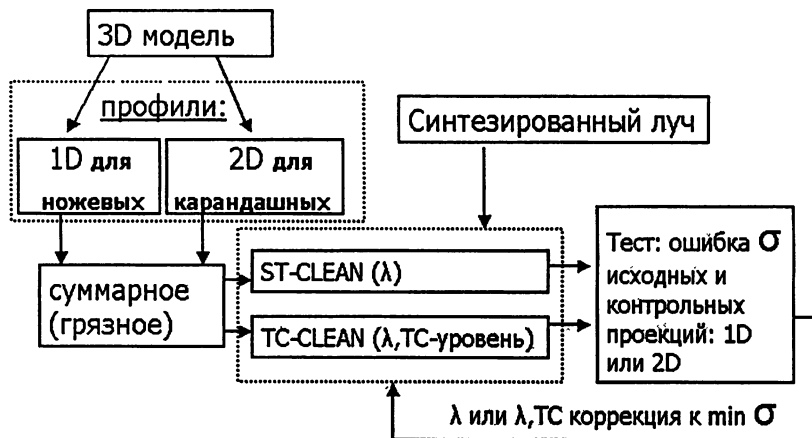


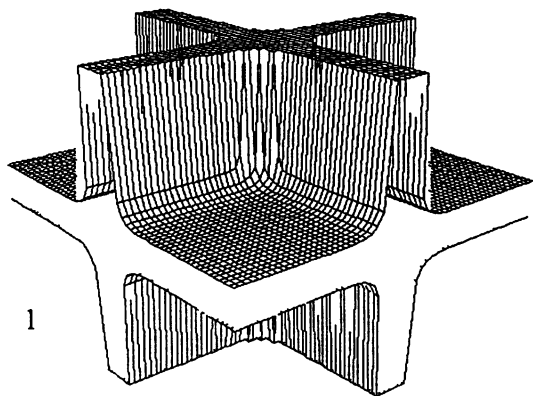
Рис.5. Блок-схема моделирования для двух вариантов 3D-реконструкции

**Синтезированный луч в двух вариантах трехмерной реконструкции.** Решение задачи требуется получить из уравнения трехмерной свертки:

$$g(x, y, z) = h(x, y, z) *** f(x, y, z) + n(x, y, z) , \quad (10)$$

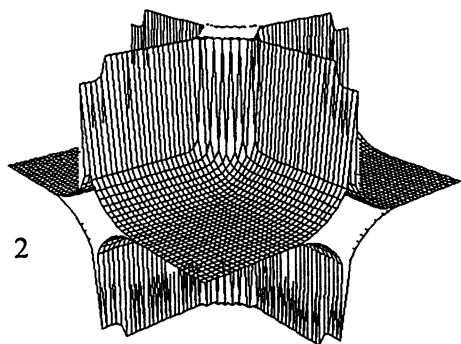
где  $h(x, y, z)$  – синтезированная диаграмма или синтезированный луч,  $g(x, y, z)$  – суммарное изображение или грязное изображение (*Dirty image*),  $n(x, y, z)$  – шум.

Следуя методу решения, описанному в случае реконструкции двумерного сечения в работах [2, 7-10], выполним построение трехмерного синтезированного луча.

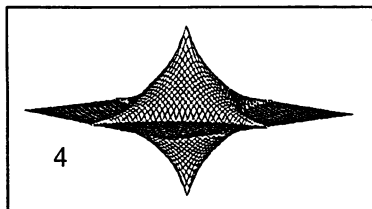


1

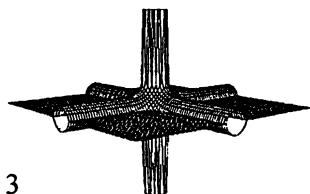
0.17
0.33
0.50
<b>0.66</b>
0.70
0.97



2



4



3

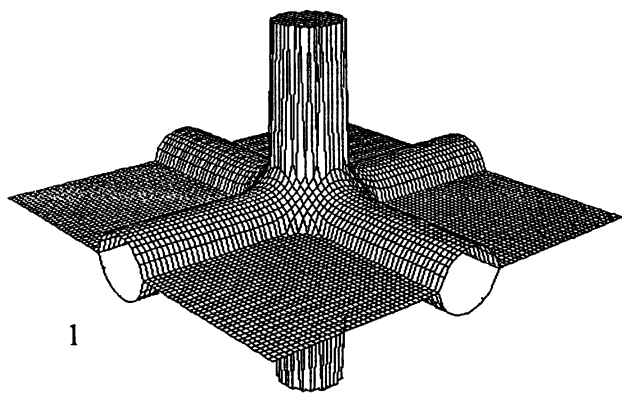


5



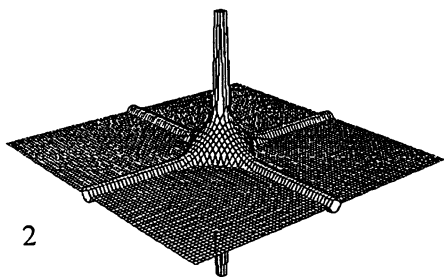
6

Рис.4а. Синтезированная диаграмма из трех ножевых лучей. Поверхности 1-6 соответствуют уровням интенсивности, указанным в рамке; горизонтальная плоскость служит лишь ориентиром, кроме случаев 1 и 2, для которых она является реальным элементом поверхности. Представление «матрешкой»

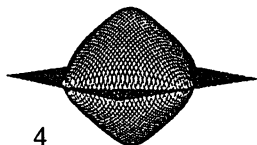


1

0.10
0.30
<b>0.33</b>
0.40
0.60
0.97



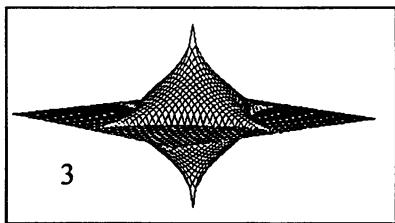
2



4



5



3



6

Рис.46. Синтезированная диаграмма из трех карандашных лучей.  
 Поверхности 1-6 соответствуют уровням интенсивности, указанным в рамке;  
 горизонтальная плоскость является лишь ориентиром, опорным элементом.  
 Представление «матрешкой»

Синтезированная диаграмма вычисляется в каждом из вариантов суммированием трех лучей, направленных по осям ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), либо ножевых, либо карандашных, форма которых описана ранее выражениями (2) и (3). Пространство вычисления функций ограничено кубом. Визуализацию трехмерных массивов рассчитанных функций проведем в каждом случае с помощью серии изображений поверхностей по принципу матришки. Каждый контур соответствует определенному уровню интенсивности. Максимумы интенсивности синтезированных лучей расположены в центре осей координат и нормированы на единицу. В таблице приведены уровни интенсивности для соответствующих поверхностей, а также размеры ребер кубов, ограничивающие область представления каждой фигуры.

Таблица к рис.4(а,б).

N поверхности (контур) на рис.4(а,б)	Уровень контура (интенсивность) для случаев		Размер ребра куба, ограничивающего область представления поверхности	
	а)	б)	а)	б)
1	0.17	0.10	8.0 S	
2	0.33	0.30	8.0 S	
3	0.50	<b>0.33</b>	8.0 S	<b>3.6 S</b>
4	<b>0.66</b>	0.40	<b>3.6 S</b>	2.0 S
5	0.70	0.60	2.0 S	1.6 S
6	0.97	0.97	0.6 S	0.6 S
S - ширина диаграммы направленности одиночного луча по уровню 0.5				

Максимальный уровень боковиков синтезированных диаграмм равен 0.33 в случае карандашных лучей и 0.66 в случае ножевых лучей. При дальнейшем повышении уровня боковики исчезают, а синтезированные лучи принимают вид замкнутых поверхностей. Их контуры становятся близкими по форме. Это хорошо видно на рис.4а и 4б. Максимальные уровни боковиков для рассматриваемых случаев отличаются в два раза. Крупным планом поверхности высокого уровня показаны на рис.5.

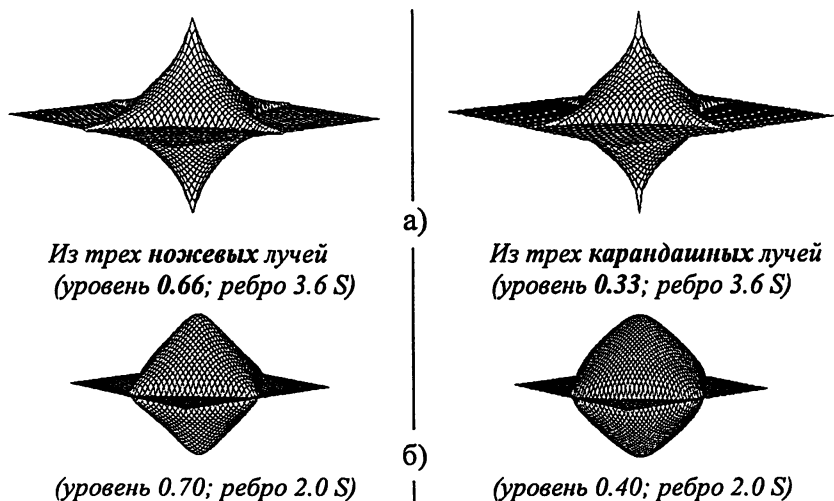


Рис.5. а) центральные области синтезированной диаграммы для двух вариантов 3D-реконструкции с уровнем отсечки боковиков; б) формирование центральной области при дальнейшем повышении уровня. Горизонтальная плоскость служит ориентиром и не является истинным элементом поверхности

В отсутствие боковиков, или при большом числе проекций, когда боковиками можно пренебречь, сканирование 3D-объекта эквивалентно свертке с функцией, расположенной здесь лишь в центральной области синтезированного луча. Этот виртуальный синтезированный луч в этом случае представляет шар. Результатом свертки 3D-объекта с шаром будет изображение, обладающее минимальными искажениями. Диаметр шара отвечает за угловое разрешение.

В двумерном случае при числе одномерных проекций  $N$  максимальный уровень боковиков равен  $1/N$  [2]. Сопоставление двумерной задачи [2] и трехмерной реконструкции при карандашных лучах указывает на равенство необходимого числа проекций для обеспечения одинакового уровня боковиков в этих задачах. Вместе с тем, число одномерных проекций для 3D-реконструкции должно быть удвоено по сравнению с числом двумерных для решения той же задачи. Можно утверждать, что максимальный уровень боковиков определяется формулой

$$I_{max(SL)} = (M - m) / N \quad , \quad (11)$$

где  $M$  и  $m$  – размерности объекта и проекций,  $N$  – число проекций.

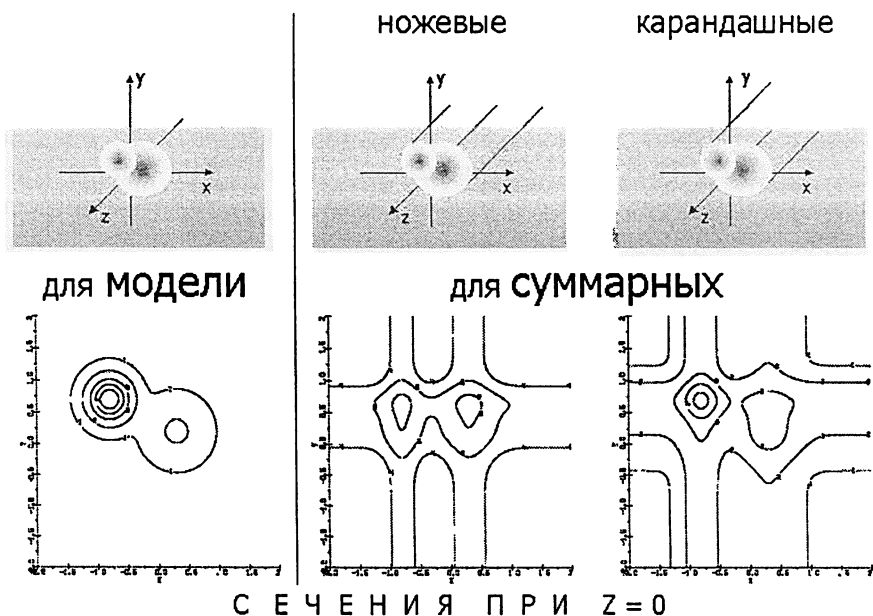


Рис.6. Сечения в плоскости  $Z=0$ , рассчитанные для модели и суммарных изображений в случаях ножевых и карандашных лучей

**Построение суммарных изображений, визуализация по сечениям.** Построение трехмерных массивов данных для суммарных изображений, или грязных карт в астрономической терминологии, выполнялось по схеме обратного проецирования, аналогичной двумерному варианту. Визуализацию трехмерной структуры принятой модели и ее суммарных изображений для двух рассматриваемых вариантов было целесообразно провести на основе двумерных сечений. Рис.6 иллюстрирует полученные сечения в плоскости  $Z=0$ , соответствующие рассчитанным трехмерным массивам. Три серии полученных сечений для указанных случаев изображены на рис.7 для различных значений по оси  $Z$ . Последовательное чередование сечений на экране монитора с установленным смещением по оси  $z$  может обеспечить для исследователя удобную пространственную визуализацию структуры трехмерного объекта. Цифрами 1,2,3,4,5,6 на рис.7 обозначены номера изофот, интенсивность которых соответствует значениям 1, 10, 30, 50, 70, 90 % от максимума трехмерной функции.

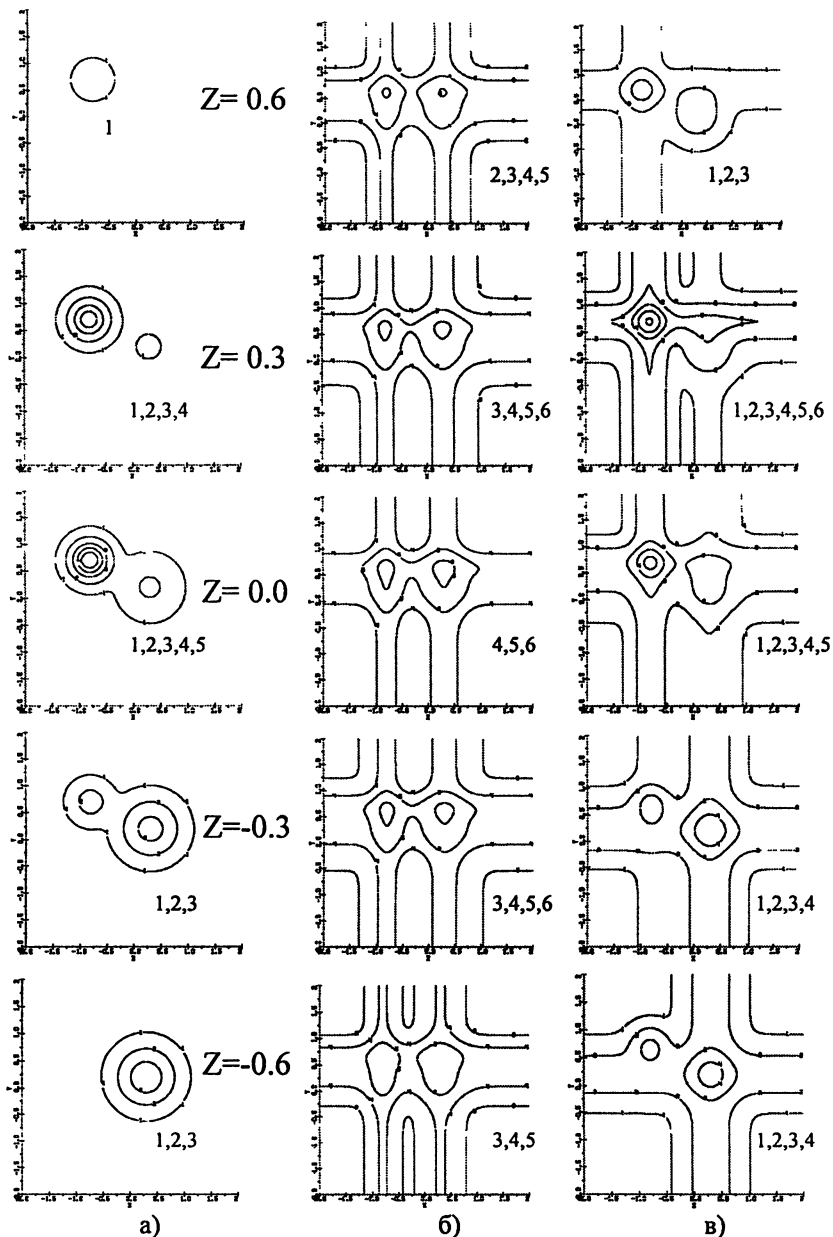


Рис. 7. Визуализация по сечениям по оси  $z$ : а) 3D-модели; б) и в) – суммарных 3D-изображений, построенных по проекциям в случае ножевых (б) и карандашных (в) лучей. Цифрами обозначены номера уровней интенсивности

Процесс чистки от влияния боковиков. При ограниченном числе проекций для минимизации откликов от боковиков в пространстве изображения целесообразно использовать алгоритмы чистки (CLEAN) [11,12], специально созданные и применяющиеся для такой цели в системах апертурного синтеза в радиоастрономии. В математическом плане алгоритмы [11,12] являются радиоастрономическими реализациями итерационных алгоритмов с нелинейными ограничениями [13]. Привлекательность таких алгоритмов для решения задач реконструкции изображений отмечалась в [14] и [15].

Процесс сходимости и возможности применения двух алгоритмов чистки в двумерной томографической задаче детально исследовались в [7]. Для определения области допустимых решений в сложных случаях в [8] было предложено использовать два алгоритма [11,12] в паре. Несколько позже [9,10] метод, включающий эту процедуру, получил название 2-CLEAN DSA (*Determination of permissible Solutions Area*). В общем случае в него входит процесс предварительного моделирования на сходном типе или классе изображений для выяснения возможностей восстановления исследуемого объекта при данном количестве и расположении проекций. Последующая реконструкция по экспериментальным данным выполняется либо с привлечением одного из алгоритмов, либо с использованием двух алгоритмов в сложных случаях с целью определения области допустимых решений от наиболее «острого» до наиболее «тупого» из вариантов. На возможность существования такой области указывает равенство минимальной ошибки исходных и контрольных проекций для каждого из решений, найденных в условиях одинаковых установленных ограничений. Решения могут различаться степенью сглаженности основных элементов. Итерационный процесс накопления таких двух экстремальных решений рассмотрен в нашей работе [8]. Их различие объясняется особенностями выбора компонентов в каждом из алгоритмов. В алгоритме ST-CLEAN [11] компонентом каждой итерации в пространстве изображений является отдельный пик, а в алгоритме TC-CLEAN [12] процесс начинается с наиболее протяженной области, ограниченной уровнем приспособленного контура. Подробно вопрос был рассмотрен в работе [7,8], а также описан в [9,10,2].

Использование метода 2-CLEAN DSA в трехмерном варианте реконструкции принципиально не отличается от рассмотренного ранее в [7,8,10,2] двумерного случая. Алгоритмы чистки [11,12] адаптируются



к трехмерному восстановлению, возрастает лишь сложность вычислений.

В работах [2, 7] при анализе двумерной реконструкции сечений была показана возможность восстановления структуры объекта при наличии лишь около 0.1 части проекций от их количества, необходимого при традиционном подходе ( $N \approx 0.1 N_{BR}$ ). Реконструкция реальных наблюдательных данных с использованием двух алгоритмов чистки и результатов [7,8] приведена в [16].

Исследование возможностей трехмерной реконструкции требует проведения моделирования для требуемых классов изображений и желаемого числа используемых проекций. Модель, принятая нами в настоящей работе для иллюстрации подхода к трехмерной реконструкции, не позволяет получить результаты, аналогичные [7,8], которые смогли бы продемонстрировать процесс определения области допустимых решений. Необходима более сложная модель. Это тема отдельной работы. Однако полезно сделать некоторый качественный анализ.

**Обсуждение.** В литературе рассмотрено большое количество методов реконструкции. К примеру, в монографии [17] описаны математические аспекты компьютерной томографии с изложением целого ряда методов. В монографиях [3,18] рассмотрено применение итерационного алгоритма Гершберга-Папулиса с введением нелинейных ограничений. В этой связи следует обратить внимание на эффективность проведения реконструкции с использованием метода 2-CLEAN DSA. Причиной является введение синтезированного луча, применение процедуры чистки, которая успешно минимизирует влияние боковых, благодаря их последовательному исключению при итерациях непосредственно в пространстве суммарного изображения. Кроме того, метод позволяет проводить восстановление в широкой полосе пространственных частот  $\{0, \omega_b\}$  и легко адаптируется к введению дополнительных ограничений. Это уже было отмечено в работе [2].

Постараемся качественно проанализировать рассматриваемые варианты трехмерной реконструкции на основе терминологии боковых синтезированной диаграммы и при сопоставлении со случаем двумерной реконструкции сечений. Как было отмечено в [15], методы обработки одномерных ( $m=1$ ) и двумерных ( $m=2$ ) сигналов или данных имеют существенные отличия, однако дальнейшее повышение

размерности ( $m \geq 2$ ) не приводит к заметным отличиям от двумерного случая, кроме усложнения вычислений. Следует обратить внимание на тот факт, что томографические задачи занимают в этой связи особое место, так как в процессе их решения устанавливается связь между данными различных размерностей. В настоящей работе радиоастрономический подход и метод, развитый ранее для нахождения связи размерностей  $m=1$  и  $m=2$ , приложен к трехмерной задаче. Очевидно, что повышение размерности привело в основном лишь к усложнению вычислений, что согласуется с утверждением [15]. Однако целесообразно выделить некоторые принципиальные моменты.

Формулой (11) была показана связь уровня боковиков  $I_{max(SL)}$  синтезированной диаграммы с количеством проекций  $N$  для реконструкции в пространстве размерности  $M$  при учете размерности проекций  $m$ . Поскольку уровень боковиков является определяющим фактором, ответственным за возникновение искажений (артефактов) на суммарном изображении, то будет логично полагать, что одинаковый уровень боковиков в 3D-пространстве для 2D-проекций и в 2D-пространстве для 1D-проекций указывает на подобие соответствующих трехмерной и двумерной задач в условии равномерного распределения проекций в пространстве. В этой связи очевидна и справедливость для 3D-реконструкции по 2D-проекциям разумного практического правила Брейсуэлла–Риддла, определяющего необходимое для традиционной реконструкции количество проекций, как  $N_{BR} \geq \pi D / \varphi$ . Это соотношение приводилось нами во введении для 2D-реконструкции сечений. Теперь желаемое разрешение  $\varphi$  и размер объекта  $D$  становятся уже значениями для трехмерного пространства, а  $N$  – числом двумерных проекций. Все вышеизложенное позволяет сделать вывод о возможности проведения предварительного, менее сложного моделирования ряда задач в 2D-варианте с последующим переносом методических результатов на трехмерный случай. Полученная ранее для 2D-реконструкции оценка необходимого количества проекций, которое может составлять при рассматриваемом подходе лишь около 0.1 от  $N_{BR}$ , должна быть справедлива для соответствующего 3D-случая.

Неравномерное распределение лучей в пространстве будет проявляться в различиях в разрешении. «Экваториальный» случай (см. рис.8\*) приведет к ухудшению разрешения в горизонтальной плоскости. Это отразится также и на форме синтезированного луча. Поверхности с уровнем выше значений отсечки боковиков окажутся сжатыми по вертикальной оси, а вместо шара получится

расплющенный глобус. Пространственное разрешение изображения, прошедшего процедуру чистки, непосредственно связано с этими размерами и будет различно по разным осям.

Реконструкция при ограниченном числе проекций, как правило, имеет смысл в задачах с малым уровнем шумов. Низкое отношение сигнал/шум существенно ограничивает возможность решения задачи в условиях скудного количества данных. Рассматриваемый подход может быть адаптирован к трансмиссионному случаю, к учету влияния дифракции. Надеемся, что процесс исключения откликов от боковых, рассмотренный нами ранее для 2D и в настоящей работе для двух 3D вариантов, будет интересен, поскольку обычно для реконструкции применяется инверсная фильтрация, а при использовании итерационных алгоритмов с ограничениями процесс включает лишь подгонку одномерных данных. В свою очередь, использование радиоастрономических алгоритмов чистки предполагает исключение артефактов, или откликов от боковых, в пространстве изображения для каждого компонента решения на этапе каждой итерации.

**Приложение 3D-реконструкции.** Условные схемы приложения двух вариантов 3D-томографии показаны на рис.8. Для простоты рисунков количество сканирующих лучей или проекций, в каждом варианте минимально и равно трем.

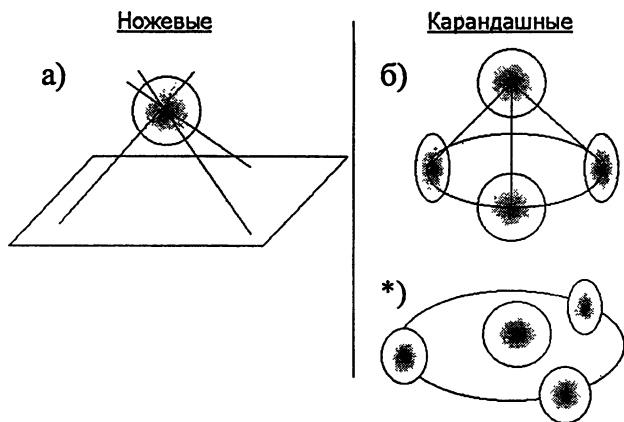


Рис.8. Условные схемы приложения двух вариантов 3D-реконструкции: а) для ножевых лучей при одномерных проекциях; б) для карандашных лучей при двумерных проекциях; \*) «экваториальный» случай расположения проекций

Рис.8а иллюстрирует сканирование объекта ограниченным числом ножевых лучей. Параллельность лучевого пучка должна обеспечиваться либо перемещением сканирующего устройства, либо применением набора детекторов, что исключает необходимость сканирования. При расположении объекта в дальней зоне возможно сканирование без перемещения приемника, что лишь связано с введением незначительных дополнительных условий на процесс реконструкции в использовании приближения параллельного пучка. Рис.8б иллюстрирует 3D-реконструкцию по ограниченному числу двумерных проекций объекта, полученных либо из разных точек пространства, либо в различные моменты времени в процессе вращения объекта в условии стабильности его структуры на данном временном интервале. «Экваториальный» случай \*) по сути эквивалентен реконструкции объекта набором двумерных сечений. Рассмотренный подход и метод трехмерной реконструкции в каждом из вариантов возможно использовать при дистанционных бесконтактных исследованиях объектов, в том числе в задачах астротомографии.

### Выводы.

1. Рассмотрены 2 варианта трехмерной реконструкции. Показаны: общий радиоастрономический подход; путь решения задачи с введением синтезированного луча, процедуры чистки от влияния его боковиков, с возможностью применения метода 2-CLEAN DSA; способы визуализации синтезированного луча и трехмерных массивов при моделировании.
2. Предложенный процесс реконструкции 3D-структуры в целом подобен рассмотренному ранее двумерному случаю: обладает возможностью восстановления в широкой полосе частот, способностью приложения меньшего, по сравнению с традиционным подходом, числа проекций.
3. Достижение в 3D-случае качества реконструкции, аналогичного рассмотренному ранее 2D-случаю, требует использования равного с ним числа двумерных проекций в условии равномерного распределения проекций в пространстве.
4. Достижение аналогичного качества для 3D-реконструкции при сканировании ножевыми лучами, то есть при использовании одномерных проекций, требует удвоенного числа таких

проекций в сравнении с количеством двумерных проекций при 3D-реконструкции.

5. Следствием пункта 3 является возможность предварительной отработки ряда вопросов 3D-моделирования с использованием менее сложного в вычислительном отношении 2D-варианта.

**Заключение.** Развитие вычислительной техники в последние годы стало определяющим фактором в решении обратных задач с использованием компьютерного моделирования, которое вместе с современными численными алгоритмами позволяет найти для этого эффективные привлекательные пути. Предложенный нами подход решения для случаев с ограниченным числом проекций может, как нам представляется, с успехом использоваться для целого ряда задач, достаточно прост в вычислительном отношении, легко адаптируется к введению ограничений, основанных на априорной информации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bracewell, R.N., Riddle A.C. Inversion of fan-beam scans in radioastronomy. *Astrophys.J.*, 1967, v.150, p.427-434.
2. Агафонов М.И. Томография при ограниченном числе проекций. I. Радиоастрономический подход к проблеме и метод 2-CLEAN DSA. Препринт N 476 р. – Нижний Новгород: НИРФИ, 2003. –30с. Известия ВУЗов – Радиофизика, 2003 (в печати).
3. Левин Г.Г., Вишняков Г.Н. Оптическая томография. – М.: Радио и связь, 1989. – 224 с.
4. Бейтс Р.Х.Т., Гарден К.Г., Петерс Т.М. Реконструктивная вычислительная томография: Современные достижения и перспективы развития. ТИИЭР, 1983, т. 71, N3, с.84-104.
5. Удупа Дж. Отображение информации о трехмерных дискретных сценах, полученной методом реконструктивной вычислительной томографии. ТИИЭР, 1983, т. 71, N3, с.160-174.
6. Физика визуализации изображений в медицине: в 2-х томах. Пер. с англ./Под ред. С.Уэбба. – М.: Мир, 1991.
7. Агафонов М.И., Подвойская О.А. Восстановление двумерного распределения яркости итерационными алгоритмами при ограниченном количестве сканов ножевым лучом. Известия ВУЗов – Радиофизика, 1989, т.32, N6, с.742-752.

8. Агафонов М.И., Подвойская О.А. Восстановление двумерного распределения яркости с использованием двух вариантов алгоритма CLEAN при ограниченном числе проекций в радиоастрономии и томографии. Известия ВУЗов – Радиофизика, 1990, т.33, N10, с.1185-1187.
9. Agafonov M.I. Image reconstruction with few strip-integrated projections: enhancements by application of versions of the CLEAN algorithm. In the Book: Astronomical Data Analysis Software and Systems VI. ASP Conference Series, San Francisco, v.125, 1997, p.202-205. Edited by G. Hunt and H.E. Payne.
10. Agafonov M.I. Determination of the permissible solutions area by image reconstruction from a few projections: method 2-CLEAN DSA. In the Book: Astronomical Data Analysis Software and Systems VII. ASP Conference Series, San Francisco, 1998, v.145, p.58-62. Edited by R. Albrecht, R.N. Hook and H.A. Bushouse.
11. Hogbom, J.A. Aperture synthesis with a non-regular distribution of interferometer baselines. Astron.Astroph, Suppl.Ser., 1974, v.15, N3, p.417-426.
12. Steer, D.G., Dewdney, P.E., Ito, M.R. Enhancements to the deconvolution algorithm "CLEAN". Astron.Astrophys., 1984, v.137, N2, p.159-165.
13. Шафер Р., Мерсеро Р., Ричардс М. Итерационные алгоритмы восстановления сигналов при наличии ограничений. ТИИЭР, 1981, т.69, N 4, с. 432.
14. Василенко Г.И., Тараторин А.М. Восстановление изображений. – М.: Радио и связь, 1986. – 304с.
15. Даджион Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 488 с.
16. Агафонов М.И., Иванов В.П., Подвойская О.А. Радиоизображения Крабовидной туманности по данным лунных покрытий. Астрон. ж., 1990, т.67, N3, с.549-560.
17. Наттерер Ф. Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 288 с.
18. Пикалов В.В., Мельникова Т.С., Томография плазмы. – Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 1995. – 229с. – (Низкотемпературная плазма. Т.13).

Agafonov M.I., Sharova O.I.

**FEW PROJECTIONS TOMOGRAPHY. III.  
RADIOASTRONOMICAL APPROACH AND METHOD  
2-CLEAN DSA IN THE 3-DIMENSIONAL APPLICATIONS**  
Reprint № 478 R – Nizhny Novgorod: NIRFI, 2003, 23p.

The Radioastronomical approach and 2-CLEAN DSA method are examined in the application to the two variants of three-dimensional (3D) reconstruction. The first variant assumes the use of one-dimensional projections, received by scanning the object with plane beavertail beams, the second variant assumes reconstruction on the basis of two-dimensional projections. The process of construction and visualization of the synthesized beam is examined in the paper. The connection of the level of its sidelobes with the necessary for the reconstruction number of projections is shown in comparison with the situation of two-dimensional reconstruction. The possibilities of graphical depiction of the process are illustrated by the example of the 3D model of an optically thin emitting object. The recommended applications to the method: remote sensing of the objects, including the problems of astrotomography. The adaptation of the solution to the transmission scheme is possible.

Key Words: radioastronomy, few projections tomography, remote sensing, inverse problem, images reconstruction and analysis, pattern recognition, synthesized beam, 2-CLEAN DSA method, digital processing, iterative algorithms, non-linear constraints, computer simulation, information-computerized technology, contactless monitoring, astrotomography.

Агафонов Михаил Игоревич  
Шарова Ольга Иосифовна

Томография при ограниченном числе проекций. III.  
Радиоастрономический подход и метод 2-CLEAN DSA  
в приложении к трехмерным задачам

---

Подписано в печать 12.05.2003 г. Формат 60 x 84/16.

Бумага писчая. Объем 1,43 усл. п. л.

Тираж 100. Заказ 5527.

---

Отпечатано в НИРФИ

Нижний Новгород, ул.Большая Печерская, 25