Министерство образования Российской Федерации
Научно-исследовательский радиофизический институт

Препринт N 482

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТИКО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В НЕСТАЦИОНАРНО ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ (ОБЗОР)

Г. И. Григорьев

Нижний Новгород, 2003

Григорьев Г. И. Распространение акустико-гравитационных волн в нестационарно движущихся средах (обзор) // Препринт N 482. — Нижний Новгород: НИРФИ, 2003. 11 с.

УДК 551:511.3

Рассмотрены вопросы распространения внутренних гравитационных волн в движущихся средах с изменяющейся во времени скоростью. Обсуждаются вопросы излучения и устойчивости этих волн.

Известно, что в движущихся средах могут возникать различного типа неустойчивости [1]. Сдвиговая неустойчивость связана с неоднородным характером движения среды [2]. Другие типы неустойчивостей возникают в тех случаях, когда скорости движения изменяются во времени. Одной из них является параметрическая неустойчивость при периодической модуляции скорости среды под управлением уравнения Матье [3].

Аналогичная ситуация возникает для неравномерно движущихся источников [4]. Действительно, если в неподвижной среде действуют источники импульса f или массы Q, движущиеся с ускорением, то при переходе в систему координат, связанную с этими источниками, получаем среду, движущуюся с неравномерной скоростью.

Неравномерно движущиеся по вертикали или горизонтали внешние границы также могут приводить к параметрической неустойчивости [5].

Для рассмотрения параметрической неустойчивости на конкретном примере получим уравнение, описывающее распространение внутренних гравитационных волн (ВГВ) в среде, горизонтальная скорость которой является заданной произвольной функцией времени $u_0(t)$.

Исходные линейные уравнения для возмущений скорости $\mathbf{u}(u, v, w)$, плотности ρ и давления p в изотермической атмосфере в декартовой системе координат (x, y, z) запишем в виде

$$\rho_0 \frac{Du}{Dt} + \rho \frac{\partial u_0}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\rho_0 \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \tag{3}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} - w\rho_0/H = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{4}$$

В этих уравнениях $D/Dt = \partial/\partial t + u_0(t)\partial/\partial x$, g — ускорение поля тяжести, H — высота однородной атмосферы , значком «0» помечены равновесные величины.

Вводя замену переменных

$$(u, v, w) \sim (U, V, W) \exp(k_0 z), \qquad (p, g) \sim (P, R) \exp(-k_0 z),$$

$$W = \frac{D\eta}{Dt} \tag{5}$$

в предположении периодической структуры возмущений в пространстве (x, y, z)

$$\eta \sim \exp(ik_x x + ik_y y - ik_z z)$$

для вертикального смещения η из уравнений (1)–(5) имеем

$$(k^2 + k_z^2 + k_0^2)\frac{D^2\eta}{Dt^2} - 2ik_0 k_x \frac{\partial u_0}{\partial t}(k_0 + ik_z)\eta + \omega_g^2 k^2 \eta = 0, \tag{6}$$

где $k_0 = 1/2H$, $w_g^2 = g/H = 2gk_0$, $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. Уравнение (6) упрощается при переходе к новой переменной η_1

$$\eta_1 = \eta \exp\left[ik_x \int u_0(t)\,\mathrm{d}t\right], \tag{7}$$

т. к. при такой замене полная производная $\dfrac{D\eta}{Dt} = \dfrac{\partial\eta}{\partial t} + ik_x u_0(t)\eta$ преобразуется в частную

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t} \exp\left[-ik_x \int u_0(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

С безразмерным временем $\tau = \omega_g t$ зависимость $\eta_1(\tau)$ определяется уравнением

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta_1}{\mathrm{d}\tau^2} + [\delta + \varepsilon f(\tau)]\eta_1 = 0, \tag{8}$$

в котором $\delta = \dfrac{k^2}{k^2 + k_z^2 + k_0^2}$, $\varepsilon = \dfrac{2k_0 k_x (k_z - ik_0) V_0}{\omega_g (k_x^2 + k_z^2 + k_0^2)}$, $f(\tau) = \dfrac{1}{V_0} \dfrac{\partial u_0}{\partial \tau}$. Уравнение (8) для периодической функции $f(\tau)$ называют уравнением Хилла, а в частном случае $f(\tau) = \cos\tau$ — это уравнение Матье [6].

Другой часто употребляемой формой уравнения Матье является [7]

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\tau^2} + [a - 2q\cos(2\tau)]\zeta = 0. \tag{9}$$

Исторический обзор исследований, приводящих к этому уравнению, и основные сведения о методах его анализа и имеющихся результатах содержатся в руководствах [6–10].

В работе [11] анализируется уравнение (9) для двумерной задачи о внутренних волнах в изотермической атмосфере, распространяющихся на фоне однородного горизонтального ветра

$$u_0(t) = u_1 + u_2 \sin\Omega t. \tag{10}$$

Укажем некоторые свойства уравнения Матье, необходимые для последующего изложения.

На рис. 1 приведена диаграмма, показывающая области устойчивости (заштрихованы) и неустойчивости для уравнения Матье (8), а также границы, разделяющие их [12].

Общее решение уравнения (10) согласно теореме Флоке можно записать в виде

$$\zeta(\tau) = D_1 A(\tau)\exp(\mu\tau) + D_2 B(\tau)\exp(-\mu\tau), \tag{11}$$

где D_1 и D_2 — постоянные, а $A(\tau)$ и $B(\tau)$ — периодические функции.

Характеристический показатель μ определяет устойчивость или неустойчивость решений. Вблизи оси $\varepsilon = 0$ неустойчивость возникает при $\delta = n^2/4$, где n — целые числа для обозначения номеров гармоник. Границы областей устойчивости при $\varepsilon \ll 1$ грубо определяются из условия

$$\delta = \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{12}$$

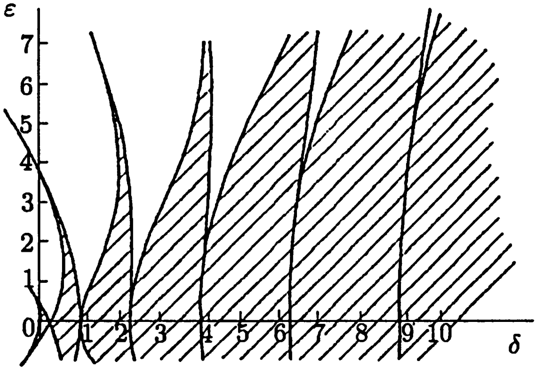

Рис. 1. Границы и области устойчивости для уравнения Матье (8)

Применительно к уравнению (8) из [11] это условие для инкремента γ внутренних волн, распространяющихся в среде с переменным ветром, даёт

$$\gamma = \mathrm{Re}\mu = \frac{u_2}{H} \sin\theta \cos\theta, \tag{13}$$

где θ — угол, характеризующий направление волнового вектора $\mathbf{k}(k_x = k\sin\theta, k_z = k\cos\theta)$.

Отношение инкремента γ к частоте волны Ω дается приближенным равенством $\gamma/\Omega \simeq k_0 u_2 \cos\Theta/\omega_g$.

В работе [11] дан анализ распространения ВГВ в условиях безграничной изотермической атмосферы при наличии однородного нестационарного ветра. Показано, что в этом случае имеет место параметрическое линейное взаимодействие волн и среды. Приведены поляризационные соотношения, связывающие возмущения давления плотности и скорости среды при прохождении ВГВ. Сформулированы и проанализированы в различных предельных случаях условия неустойчивости ВГВ из-за их взаимодействия с нестационарным ветром. Рассчитаны временные инкременты нарастания ВГВ. Проведено сопоставление полученных инкрементов с декрементами затухания ВГВ под действием вязкости. Выполнены численные оценки рассчитанных эффектов в интервале высот от тропосферы до нижней ионосферы.

В работе [5] рассмотрена неустойчивость двух слоев жидкости с размерами по вертикали d_1 и d_2 со свободной поверхностью, движение которых возникает из-за осцилляций нижней границы в горизонтальном направлении со скоростью $u_0(t) = V_0 \cos \Omega t$. При постановке задачи в [5] предполагалось, что слои отличаются плотностью ρ и вязкостью ν. Вопрос об устойчивости такой системы анализировался на основе решения уравнений Орра—Зоммерфельда с меняющимися во времени коэффициентами. Две волновые моды — поверхностная на свободной границе и внутренняя на границе между слоями играют определяющую роль для устойчивости. Анализ показал, что при числах Фруда $\mathrm{F} < 3$ неустойчивость определяется только внутренней модой. Результаты численного исследования условий устойчивости иллюстрируются многочисленными графиками для разных чисел Фруда F и Рейнольда R и параметров $m = \nu_2/\nu_1$, $n = d_2/d_1$, $\gamma = \rho_2/\rho_1$.

В [13] решена аналогичная задача о параметрическом возбуждении стоячих, трехмерных волн на границе раздела маловязкой жидкости в сосуде цилиндрической формы, совершающем вертикальные колебания. Даны приближенные формулы для определения условий параметрической неустойчивости внутренних волн и границ резонансных зон.

В работе [14] анализировалось параметрическое взаимодействие внутренних гравитационных волн разных масштабов, когда длина волны неустойчивой моды мала по сравнению с характерным масштабом изменения параметров среды под действием другой волны. Показано, что временные изменения плотности связаны с растущими возмущениями, которые описываются уравнением Матье (9). Связь характеристического показателя μ с параметрами a и q в уравнении (9) дается со ссылкой на работу [15] соотношением

$$a = 1 + (\mu - 1)^2 \pm [4(\mu - 1)^2 + q^2]^{1/2}. \tag{14}$$

Рассчитанный для простой модели механизм параметрической неустойчивости был протестирован на экспериментальных установках.

В работе [12] рассмотрена задача о неустойчивости тангенциального разрыва в несжимаемой среде при скачках плотности $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ и скорости. Изменение последней задано формулой

$$u_2(t) - u_1(t) = \Delta u_0 + (1 - \rho_2/\rho_1)\tilde{u}\cos\Omega t. \tag{15}$$

Смещение η границы слоев в вертикальном направлении от равновесного положения $\eta = 0$ в этой задаче определяется уравнением Матье. В условиях $\Delta u_0 \gg |1-\rho_2/\rho_1|\tilde{u}$ найден инкремент нарастания волн во времени

$$\gamma = \Delta u_0 \tilde{u} \frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}(1-\rho_2/\rho_1)k_x^2\Omega^{-1/2}.$$

В этой же работе дан численный анализ устойчивости сдвиговых течений для модели, в которой менялись со временем толщина струи и ее скорость

$$u(z,t) = V(t)[1 - z/z_0(t)], \qquad 0 \le z \le z_0(t);$$

$$u(z,t) = V(t)[z/z_0(t)], \qquad -z_0(t) \le z \le o;$$

$$u(z,t) = 0, \qquad |z| \ge z_0(t). \tag{16}$$

Орографические возмущения от препятствия в горизонтальном потоке с простой гармонической зависимостью последнего от времени изучены в работе [15], в которой показано, что спектр волн кроме основной частоты потока Ω содержит и ее гармоники $n\Omega$. Вертикальная компонента групповой скорости ВГВ диапазоне частот $n\Omega < \omega_g$ дана в виде

$$V_{\text{гр}z} = \mu_n(n\omega)^3/\omega_g^2 k^2, \qquad \mu_n = k(\omega_g^2/n^2\Omega^2 - 1)^{1/2}. \tag{17}$$

Аналитическое решение для орографических волновых возмущений в атмосфере от порыва ветра горным препятствием $h(x) =$

$= h_0 \cos(kx)$ получено в работе [16]. Изменение ветра во времени задавалось в виде $u_0(t) = \dfrac{V_0}{2}[1 + \cos(t/\tau)]$ для $|t| < \tau$ и $u_0(t) = 0$ для $t > \tau$. Численные расчеты проводились для другой модели, в которой ветер менялся с высотой и сопровождался быстрыми вариациями во времени.

В работе [17] обсуждаются с привлечением кинематических соотношений орографически возбуждаемые подветренные волны для случаев, когда ветер имеет периодическую модуляцию. Если одна Фурье компонента препятствия на поверхности $z = 0$ задана в виде $h_0 \cos(kx)$, то на уровне $z > 0$ при $\varepsilon = k_x u_2/\Omega \ll 1$ вертикальное смещение дается формулой

$$\eta = h_0 \cos(k_x x - k_z z - \varepsilon \sin \Omega t) - \\ - \varepsilon \sin(k_x x - k_z z) \sin\left[\Omega t - \Omega \frac{\partial k_z}{\partial \Omega} z\right]. \quad (18)$$

Отмечается трудность выделения генерируемых возмущений на фоне пульсаций потока, которые их порождают.

В работе [4] при решении линейной задачи об излучении внутренних гравитационных волн источником массы, движущимся по вертикали с переменным ускорением ($z = vt + a \sin \omega t$), обнаружено взаимодействие мультиполей, образующих сложный излучатель, в результате чего может возникать неустойчивость.

В работах [18, 19] рассмотрены задачи о распространении и устойчивости звуковых волн в среде, движущейся с переменной во времени скоростью. Звуковые волны соответствуют высокочастотной ветви акустико-гравитационных волн $\omega \gg \omega_g$ и малых длин волн $\lambda \ll H$, когда влиянием поля тяжести можно пренебречь. Оказалось, что и для звуковых волн при наличии ветрового движения (10) их устойчивость определяется уравнением (9) с параметрами $a = 4\omega_0^2/\Omega^2$, $q = 2ik_x u_2/\Omega$, $\omega_0^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$, c — скорость звука. В отличие от внутренних гравитационных волн для звуковых волн параметр q чисто мнимый. Результаты исследований уравнения Матье в комплексной области параметров a и

q скудно представлены в современной литературе, а работа [20], посвященная этой проблеме, трудно доступна.

Укажем, что характеристический показатель μ для решений уравнения Матье при малых значениях параметра q может быть определен из соотношения

$$\mathrm{ch}(\pi\mu) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{a}\right) - \frac{\pi q^2}{(1-a)\sqrt{a}}\sin(\pi\sqrt{a}). \qquad (19)$$

Эта формула в некоторых источниках приведена с опечатками (например [21]). Расчеты для звуковых волн показали, что при $a = 1$, т. е. при $\Omega = 2\omega_0$, значения μ являются чисто мнимыми, и следовательно, в этом случае нет роста амплитуды волн, а есть лишь дополнительный частотный сдвиг резонанса на величину $\Delta\omega = \dfrac{k_x u}{2}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грантами № 01–02–17403, 03–05–65137 и грантом Минобразования РФ КцФЕ02–3.5–479.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. Т. 2. М.: Мир, 1984.
2. Госсард Э., Хук У. Волны в атмосфере. М.: Мир, 1975. 532 с.
3. Zhong W. // Ann. Geophys. 1995. V. 13. P. 375.
4. Григорьев Г. И. Излучение внутренних гравитационных волн источниками массы, движущимися с переменным ускорением. Препринт НИРФИ, № 164. Горький, 1983.
5. Li C. H. // Phys. Fluids. 1970. V. 13, No. 5. P. 1121.
6. Стретт М. Д. О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. Харьков, Киев: ОНТИ, 1935.
7. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
8. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959.

9. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.
10. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М.: ИЛ, 1953.
11. Григорьев Г. И., Савина О. Н. // Изв. РАН. ФАО. 2004. Т. 40, № 1. С. 39.
12. Kelly R. E. // J. Fluid Mech. 1965. V. 22, p. 3. P. 547.
13. Кравцов А. В., Кравцов Ал. В. // Ж. вычисл. математики и матем. физики. 2002. Т. 42, № 8. С. 1 236.
14. McEvan A. D. // J. Fluid Mech. 1975. V. 67, p. 4. P. 667.
15. Bell T. H. // J. Fluid Mech. 1975. V. 67, p. 4. P. 705.
16. Lott F., Teitelbaum H. // J. Atm. Sci. 1993. V. 50, No. 16. P. 2 607.
17. Hines C. O. // J. Atm. Sci. 1995. V. 52, No. 5. P. 602.
18. Григорьев Г. И., Савина О. Н., Тамойкин В. В. // Изв. РАН. ФАО. 1996. Т. 32, № 4. С. 498.
19. Григорьев Г. И., Савина О. Н., Тамойкин В. В. // Изв. вузов. Радиофизика. 1996. Т. 39, № 9. С.1 087.
20. Strutt M. J. O. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. 1948. V. A62. P. 278.
21. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ИЛ, 1950. С. 533.

Григорьев Геннадий Иванович

Распространение акустико-гравитационных волн в
нестационарно движущихся средах (обзор)

Подписано в печать 26. 12. 03 г. Формат 60 × 84/16.
Бумага писчая. Объем 0,62 усл. п. л. Заказ 5532. Тираж 50.

Отпечатано в НИРФИ