Федеральное агентство по науке и инновациям
Федеральное государственное научное учреждение
"Научно-исследовательский радиофизический институт"

Препринт № 510

АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ОТВЕЧАЮЩИХ КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

М. А. Антонец

Нижний Новгород 2007

УДК 517.5

Антонец М. А. Анализ дифференциальных операторов, отвечающих краевым задачам // Препринт №510. — Нижний Новгород: ФГНУ “НИРФИ”, 2007. – 71 с.

В работе рассматриваются краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных в двухкомпонентной области евклидова пространства R^n, получающейся удалением из R^n границы $\mathfrak{S}$. Дано определение операторов вычисления следов на обеих сторонах границы $\mathfrak{S}$ без использования операции предельного перехода. В гильбертовом пространстве следов определены ортогональные проекторы, являющиеся аналогами проекторов Кальдерона. С помощью этих ортогональных проекторов строятся операторы в пространстве следов, непрерывная обратимость которых влечет разрешимость соответствующих краевых задач. Получены формулы для резольвент операторов, отвечающих краевым задачам (аналогичные формуле Крейна). Показано, что для симметрического дифференциального оператора построенные резольвенты краевых задач отвечают замкнутым, вообще говоря несамосопряженным, расширениям этого оператора по фон Нейману.

Работа поддержана грантом РФФИ 05-01-00299.

ВВЕДЕНИЕ

В теории линейных дифференциальных операторов краевые задачи для дифференциальных уравнений в векторных расслоениях рассматриваются с помощью методов, использующих сведение краевой задачи к уравнениям для следов её решений на границе области (см. [1, 2] и цитируемую там литературу). В случае эллиптических операторов следы определяются как односторонние пределы решений краевой задачи и её производных, существование которых обеспечивается теоремами вложения.

В предлагаемой работе рассматриваются краевые задачи для дифференциального оператора с краевыми условиями трансмиссии и импедансными краевыми условиями в области евклидова пространства R^n, получающейся удалением из R^n границы $\mathfrak{S}$. При этом существенно используются геометрические и аналитические характеристики дифференциального оператора, отвечающего задаче без граничных условий, то есть замкнутого оператора $\hat{A}$ в пространстве k-мерных вектор-функций $L_2^k(R^n)$ с областью определения $\mathcal{D}(\hat{A})$, содержащей пространство k-мерных вектор-функций $\mathcal{S}^k(R^n)$ с компонентами из пространства основных функций Шварца $\mathcal{S}(R^n)$.

Линейные операторы, отвечающие краевым задачам, строятся как замнутые расширения ограничения $\hat{A}_0$ оператора $\hat{A}$ на линейное многообразие основных вектор-функций из пространства Шварца, обращающихся в ноль вблизи границы $\mathfrak{S}$. С помощью оператора $\hat{A}$ удается дать определение операторов вычисления следов $\mathrm{Tr}_{\pm}^{\mathfrak{S}}$ на обеих сторонах границы $\mathfrak{S}$ без использования операции предельного перехода, а также дать более простые конструкции для операторов, отвечающих краевым задачам.

Краевые задачи рассматриваются в работе в следующей формулировке.

Пусть комплексное число λ принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{A}$. При каких условиях λ принадлежит резольвентному множеству оператора, отвечающего краевой задаче?

Положительный ответ на этот вопрос обуславливается обратимостью соответствующего оператора в пространстве следов, который строится с использованием краевых условий, операции вычисления следа и резольвенты оператора $\hat{A}$. В итоге для резольвенты краевой задачи строится представление для резольвенты краевой задачи, аналогичное формуле Крейна для резольвент.

Рассмотрим в качестве иллюстрации применение этого метода в случае краевых задач для оператора Лапласа. Пусть $\hat{A}$ — самосопряженное расширение в пространстве $L_2(R^n)$ оператора Лапласа Δ, заданного первоначально на пространстве основных функций Шварца $\mathcal{S}(R^n)$, а граничная поверхность $\mathfrak{S}$ является плоскостью $\{x_n = 0\}$ и $\hat{R}(\lambda) = (\lambda I - \hat{A})^{-1}$ — резольвента оператора $\hat{A}$. Обозначим θ функцию Хевисайда, то есть индикатор положительной полуоси. Тогда для произвольной основной функции u из пространства Шварца имеет место равенство

$$[\Delta\theta(x_n)u](x) = [\theta(x_n)\Delta u](x) + \frac{\partial u(x_1,\dots,x_{n-1},0)}{\partial x_n}\,\delta(x_n) + u(x_1,\dots,x_{n-1},0)\,\delta'(x_n). \qquad (1)$$

Это соотношение для произвольной функции u из области определения оператора $\hat{A}$ приобретает вид

$$\Delta\theta(x_n)u = \theta(x_n)\Delta u + g_+,$$

где g_+ — обобщенная функция умеренного роста, носитель которой является частью границы $\mathfrak{S}$, причем обобщенная функция $\hat{R}(\lambda)g_+$ принадлежит пространству $L_2(R^n)$. Эту обобщенную функцию g_+ назовем следом на положительной стороне границы $\mathfrak{S}$ от действия оператора $\hat{A}$ на функцию u и будем обозначать $g_+ = \mathrm{Tr}_+^{\mathfrak{S}} u$. Если в соотношении (1) заменить функцию $\theta(x_n)$ на функцию $\theta(-x_n)$, то получим определение следа $g_- = \mathrm{Tr}_-^{\mathfrak{S}} u$ на противоположной стороне поверхности $\mathfrak{S}$. Для функции u из области определения оператора $\hat{A}$ выполняется равенство

$$\mathrm{Tr}_+^{\mathfrak{S}} u = -\mathrm{Tr}_-^{\mathfrak{S}} u.$$

Однако следы $Tr_\pm^{\mathfrak{S}}$ могут быть определены для более широкого класса функций $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$, для которых последнее равенство может не выполняться. Следы функций из пространства $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$ образуют пространство $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$, являющееся полным гильбертовым пространством с любым из скалярных произведений $(g, h)_\lambda = \left(\hat{R}(\lambda)g, \hat{R}(\lambda)h\right)$ для произвольных λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$. В частности, для любого такого λ и любой обобщенной функции g из пространства $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ существуют следы $\mathrm{Tr}_\pm^{\mathfrak{S}} \hat{R}(\lambda) g$, причем отображения $\hat{t}_\pm(\lambda)$, определенные соотношениями

$$\hat{t}_\pm(\lambda) g = \mathrm{Tr}_\pm^{\mathfrak{S}} \hat{R}(\lambda) g,$$

являются ортогональными проекторами в пространстве $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ со скалярным произведением $(g, h)_\lambda$ и удовлетворяют соотношению

$$\hat{t}_+(\lambda) + \hat{t}_-(\lambda) = I.$$

Ортогональные проекторы $\hat{t}_+(\lambda), \hat{t}_-(\lambda)$ являются аналогами проекторов Кальдерона, введенных в работе [3] и использованных Сили для анализа краевых задач в работе [4]. Эти проекторы $\hat{t}_\pm(\lambda)$ обладают характеристическими свойствами проекторов Кальдерона: для любой обобщенной функции g, принадлежащей образу проектора $\hat{t}_+(\lambda)$, $(\hat{t}_-(\lambda))$, функция $\hat{R}(\lambda)g$ является решением уравнения

$$\hat{A}u - \lambda u = 0$$

в каждом из полупространств $\{\pm x_n > 0\}$, причем $u = 0$ при $x_n < 0$ $(x_n > 0)$ и $\mathrm{Tr}_+^{\mathfrak{S}} u = g$, $(\mathrm{Tr}_-^{\mathfrak{S}} u = g)$.

Кроме того, проекторы $\hat{t}_{\pm}(\lambda)$ присутствуют в явных выражениях для резольвент краевых задач. Так, например для краевой задачи с краевым условием трансмиссии

$$\mathrm{Tr}_{+}^{\mathfrak{S}} u = \hat{\gamma} \mathrm{Tr}_{-}^{\mathfrak{S}} u,$$

где $\hat{\gamma}$ — непрерывный оператор в пространстве $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$, резольвента задается выражением

$$\hat{R}(\lambda) + \hat{R}(\lambda)\Big(\hat{t}_{+}(\lambda) - \hat{\gamma}\hat{t}_{-}(\lambda)\Big)^{-1}(I + \hat{\gamma})\mathrm{Tr}_{+}^{\mathfrak{S}}\hat{R}(\lambda),$$

если только оператор $\hat{t}_{+}(\lambda) - \hat{\gamma}\hat{t}_{-}(\lambda)$ непрерывно обратим в пространстве $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$.

План работы:

В разд. 1 даются определения следов на границе $\mathfrak{S}$ от действия оператора $\hat{A}$, гильбертова пространства следов $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ и проекционных операторов $\hat{t}_{+}(\lambda)$, $\hat{t}_{-}(\lambda)$, а также устанавливаются условия их существования и некоторые их свойства.

В разд. 2 для произвольного λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ по операторам $\hat{t}_{+}(\lambda)$, $\hat{t}_{-}(\lambda)$ и операторам, задающим краевые условия трансмиссии и краевые условия импедансного типа, построены операторы в пространстве следов $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$, обратимость которых влечет однозначную разрешимость соответствующих краевых задач (см. Теоремы 2.1 и 2.2). При этом для резольвент краевых задач оказываются справедливыми формулы (16), (23), аналогичные формуле Крейна для резольвент самосопряженных расширений симметрического оператора.

В разд. 3 приведены простые примеры вычисления резольвент краевых задач для операторов дифференцирования, Лапласа, Максвелла и Дирака в тех случаях, когда граница является точкой или плоскостью.

В разд. 4 в случае симметрического оператора $\hat{A}_0$ исследуется возможность построения разложения фон Неймана для вектор-функций из области определения сопряженного оператора $\hat{A}_0^*$ с помощью оператора вычисления следа.

В разд. 5 показано, что в случае симметрического дифференциального оператора $\hat{A}_0$ операторы, отвечающие краевым задачам, даваемые конструкциями разд. 2, являются расширениями этого оператора по фон Нейману даже в том случае, когда эти расширения не являются симметрическими.

В разд. 6 даны применения теории Гельфанда–Шилова [5] обобщенных функций, сосредоточенных на гладкой поверхности, к вычислению следов в случае, когда граница $\mathfrak{S}$ является гладкой поверхностью.

1. СЛЕДЫ НА ГРАНИЦЕ ОТ ДЕЙСТВИЯ ОПЕРАТОРА НА ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Пусть $\hat{A}$ — линейный замкнутый дифференциальный оператор в пространстве $L_2^k(R^n)$, состоящем из k-мерных вектор-функций, интегрируемых с квадратом по мере Лебега на пространстве R^n и пусть $\mathcal{D}(\hat{A})$ — его область определения.

Для произвольного λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ обозначим $\hat{R}(\lambda) = (\lambda I - \hat{A})^{-1}$ — резольвенту этого оператора и обозначим $\mathcal{D}_\lambda(\hat{A})$ — гильбертово пространство, получаемое введением в пространстве $\mathcal{D}(\hat{A})$ скалярного произведения

$$(u,v)_{\mathcal{D}_\lambda(\hat{A})} = \Big((\lambda I - \hat{A})u, (\lambda I - \hat{A})v\Big)_{L_2^k(R^n)},$$

где $(u,v)_{L_2^k(R^n)}$ — скалярное произведение в пространстве $L_2^k(R^n)$.

Обозначим $\hat{A}^+$ — матричный дифференциальный оператор с символом Вейля A^+, эрмитово-сопряженным к матричному символу Вейля A оператора $\hat{A}$. Мы будем предполагать, что выполняются приводимые ниже условия.

Предположение 1. *Области определения $\mathcal{D}(\hat{A})$, $\mathcal{D}(\hat{A}^+)$ операторов $\hat{A}$, $\hat{A}^+$ содержат пространство k-мерных вектор-функций $\mathcal{S}^k(R^n)$ с компонентами из пространства $\mathcal{S}(R^n)$ основных функций Шварца на пространстве R^n.*

Предположение 2. *Ограничение оператора $\hat{A}$ на пространство $\mathcal{S}^k(R^n)$ является непрерывным оператором в $\mathcal{S}^k(R^n)$.*

Предположение 3. *Резольвента $\hat{R}(\lambda)$ продолжается до непрерывного оператора на пространстве обобщенных вектор-функций умеренного роста $\mathcal{S}'^k(R^n)$.*

Если оператор $\hat{R}(\lambda)^*$, сопряженный к оператору $\hat{R}(\lambda)$, непрерывен в пространстве основных вектор-функций $\mathcal{S}^k(R^n)$, то Предположение 3 относительно оператора $\hat{R}(\lambda)$ верно.

Действительно, продолжение оператора $\hat{R}(\lambda)$ до непрерывного оператора в пространстве обобщенных вектор-функций умеренного роста задается равенством

$$\left\langle \hat{R}(\lambda)u, \varphi \right\rangle = \left\langle u, \hat{R}(\lambda)^T \varphi \right\rangle,$$

где u, φ — произвольные элементы пространств $\mathcal{S}'^k(R^n)$, $\mathcal{S}^k(R^n)$ соответственно, а $\hat{R}(\lambda)^T$ — оператор, транспонированный к оператору $\hat{R}(\lambda)$, определен равенством

$$\hat{R}(\lambda)^T = \overline{\hat{R}(\lambda)^*},$$

где в правой части равенства стоит оператор, комплексно сопряженный оператору $\hat{R}(\lambda)^*$, который, в свою очередь, является оператором, сопряженным в пространстве $L_2^k(R^n)$ к оператору $\hat{R}(\lambda)$. Поскольку для произвольной основной вектор-функции φ имеет место равенство

$$\overline{\hat{R}(\lambda)^*}\,\varphi = \overline{\hat{R}(\lambda)^*\,\bar{\varphi}}\,,$$

то очевидно транспонированный оператор $\hat{R}(\lambda)^T$ непрерывен в пространстве $\mathcal{S}^k(R^n)$ тогда и только тогда, когда в нем непрерывен сопряженный оператор $\hat{R}(\lambda)^*$. Но, очевидно, имеет место равенство

$$\hat{R}(\lambda)^* = (\bar{\lambda}I - \hat{A}^*)^{-1},$$

где $\hat{A}^*$ — оператор, сопряженный к оператору $\hat{A}$.

Таким образом, для проверки справедливости Предположения 3 могут быть использованы условия непрерывности резольвенты псевдодифференциального оператора в пространстве основных функций Шварца, полученные в [6, 7].

Пусть $\mathfrak{D}_+$, $\mathfrak{D}_-$ — открытые непересекающиеся подмножества пространства R^n и множество $\mathfrak{S} = R^n \setminus (\mathfrak{D}_+ \cup \mathfrak{D}_-)$ является их общей границей.

Обозначим $\hat{\theta}_\pm$ — операторы умножения на индикаторы областей $\mathfrak{D}_\pm$ и $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$ — пространство всех вектор-функций из пространства $\mathcal{S}^k(R^n)$, представляемых в виде

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-, \quad \varphi_\pm \in \mathcal{S}^k(R^n), \quad \operatorname{Supp} \varphi_\pm \subset \mathfrak{D}_\pm.$$

Предположение 4. *Пространство* $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$ *всюду плотно в пространстве* $L_2^k(R^n)$.

Это предположение заведомо выполняется в случае, когда подмножество $\mathfrak{S}$ является кусочно-гладкой поверхностью в пространстве R^n.

Обозначим $L_2^k(R^n|\mathfrak{S})$ — подпространство пространства $\mathcal{S}'^k(R^n)$, состоящее из всех обобщенных вектор-функций таких, что их ограничения на подпространство $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$ непрерывны относительно сходимости по норме в пространстве $L_2^k(R^n)$.

Поскольку подпространство $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$ всюду плотно в пространстве $L_2^k(R^n)$, то мы можем построить линейное отображение:

$$\pi_\mathfrak{S} : L_2^k(R^n|\mathfrak{S}) \longmapsto L_2^k(R^n),$$

сопоставляя произвольной обобщенной вектор-функции u из пространства $L_2^k(R^n|\mathfrak{S})$ продолжение $\pi_\mathfrak{S} u$ на пространство $L_2^k(R^n)$ ограничения вектор-функции u на подпространство $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$. Очевидно, что имеет место соотношение

$$\pi_\mathfrak{S}\pi_\mathfrak{S} = \pi_\mathfrak{S},$$

то есть отображение $\pi_\mathfrak{S}$ является проекцией пространства $L_2^k(R^n|\mathfrak{S})$ на пространство $L_2^k(R^n)$.

Проекцию $\pi_{\mathfrak{S}} u$ будем называть регулярной частью обобщенной вектор-функции u.

Обозначим для произвольной обобщенной вектор-функции u из пространства $L_2^k(R^n|\mathfrak{S})$

$$\operatorname{sing}_{\mathfrak{S}} u = u - \pi_{\mathfrak{S}} u. \tag{2}$$

По построению носитель обобщенной вектор-функции $\operatorname{sing}_{\mathfrak{S}} u$ содержится в множестве $\mathfrak{S}$. Будем называть эту обобщенную вектор-функцию сингулярной частью обобщенной вектор-функции u. Таким образом, произвольная обобщенная вектор-функция u из пространства $L_2^k(R^n|\mathfrak{S})$ представима в виде суммы вектор-функции из пространства $L_2^k(R^n)$ и обобщенной вектор-функции с носителем из $\mathfrak{S}$.

Определение 1.2. *Определим линейное пространство $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$, как множество всех таких обобщенных вектор-функций g из пространства $\mathcal{S}'^k(R^n)$ с носителями из множества $\mathfrak{S}$, что обобщенная вектор-функция $\hat{R}(\lambda)g$ принадлежит пространству $L_2^k(R^n)$. В этом пространстве определим скалярное произведение:*

$$(g_1, g_2)_\lambda = \left(\hat{R}(\lambda)g_1, \hat{R}(\lambda)g_2\right) \equiv \left(\hat{R}(\lambda)g_1, \hat{R}(\lambda)g_2\right)_{L_2^k(R^n)}.$$

Из ограниченности оператора

$$(\mu I - \hat{A})\,\hat{R}(\lambda)$$

для любых λ, μ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ следует, что линейные пространства $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ не зависят от выбора λ, то есть являются одним и тем же линейным пространством $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$.

Линейное пространство $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ будем называть пространством следов оператора $\hat{A}$ на границе $\mathfrak{S}$.

Обозначим $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$ — подпространство $L_2^k(R^n)$, состоящее из всех вектор-функций u, таких что $\hat{A}u$ принадлежит пространству $L_2^k(R^n|\mathfrak{S})$.

Пусть $\hat{\theta}_\pm$ — операторы умножения на индикаторы областей $\mathfrak{D}_\pm$ соответственно.

Предложение 1.1. *Справедливы следующие утверждения относительно пространства $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$:*

1. пространство $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$ инвариантно относительно действия операторов $\hat{\theta}_\pm$;

2. для произвольной вектор-функции u из пространства $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$ имеет место равенство

$$\pi_{\mathfrak{S}}\hat{A}\hat{\theta}_\pm u = \hat{\theta}_\pm \pi_{\mathfrak{S}} \hat{A}u; \tag{3}$$

3. оператор $\hat{A}$ отображает пространство $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$ в прямую сумму $L_2^k(R^n) \oplus \mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$.

Доказательство. Если вектор-функция u принадлежит пространству $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$, то обобщенные вектор-функции $\hat{A}\hat{\theta}_\pm u$ принадлежат пространству $L_2^k(R^n|\mathfrak{S})$. Действительно, обозначим $\hat{A}^T$ — дифференциальный оператор, транспонированный к оператору $\hat{A}$. Тогда, полагая $\varphi_\pm = \hat{\theta}_\pm\varphi$ для основной вектор-функции φ из пространства $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$ и учитывая инвариантность пространства $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$ относительно действия операторов $\hat{\theta}_\pm$, получим цепочку равенств:

$$\begin{aligned}(\pi_{\mathfrak{S}}\hat{A}\hat{\theta}_\pm u, \varphi) &= (\hat{A}\hat{\theta}_\pm u, \varphi) = \langle \hat{A}\hat{\theta}_\pm u, \bar{\varphi}\rangle = \langle u, \hat{\theta}_\pm(\hat{A}^T\bar{\varphi}_+ + \hat{A}^T\bar{\varphi}_-)\rangle = \\ &= (\hat{A}u, \varphi_\pm) = (\pi_{\mathfrak{S}}\hat{A}u, \varphi_\pm) = (\hat{\theta}_\pm\pi_{\mathfrak{S}}\hat{A}u, \varphi).\end{aligned}$$

Поскольку в соответствии с Предположением 4 множество $\mathcal{S}(R^n|\mathfrak{S})$ плотно в пространстве $L_2^k(R^n)$, то из этих равенств следует принадлежность обобщенной вектор-функции $\hat{A}\hat{\theta}_\pm u$ пространству $L_2^k(R^n|\mathfrak{S})$, а значит и принадлежность вектор-функций $\hat{\theta}_\pm u$ пространству $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$ и равенство (3).

Докажем утверждение 3. Для этого достаточно доказать принадлежность сингулярной части $\mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\hat{A}u$ обобщенной вектор-функции $\hat{A}u$ пространству $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$. Но обобщенная функция $\hat{R}(\lambda)\hat{A}u$ принадлежит пространству $L_2^k(R^n)$, если λ принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{A}u$, и поэтому из равенства

$$\hat{R}(\lambda)\mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\hat{A}u = \hat{R}(\lambda)\hat{A}u - \hat{R}(\lambda)\pi_{\mathfrak{S}}\hat{A}u$$

следует, что обобщенная функция $\hat{R}(\lambda)\mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\hat{A}u$ принадлежит пространству $L_2^k(R^n)$. А так как носитель обобщенной функции $\mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\hat{A}u$ лежит в $\mathfrak{S}$, то отсюда следует утверждение 3. Предложение доказано.

Определение 1.1. *Для произвольной обобщенной функции u из пространства $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$ обозначим*

$$\mathrm{Tr}_{\pm}^{\mathfrak{S}}u = \mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\hat{A}\hat{\theta}_{\pm}u. \tag{4}$$

Правая часть последнего равенства существует в силу доказанной выше инвариантности пространства $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$ относительно действия операторов $\hat{\theta}_{\pm}$.

Обобщенные функции $\mathrm{Tr}_{\pm}^{\mathfrak{S}}u$ будем называть следами на границе $\mathfrak{S}$ от действия оператора $\hat{A}$ на вектор-функцию u.

Если у функции u существуют оба следа и имеет место равенство $\mathrm{Tr}_{+}^{\mathfrak{S}}u + \mathrm{Tr}_{-}^{\mathfrak{S}}u = 0$, то мы будем обозначать $\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}u = \mathrm{Tr}_{+}^{\mathfrak{S}}u$.

Для любой вектор-функции u из пространства $\mathcal{D}(\hat{A})$ следы $\mathrm{Tr}_{\pm}^{\mathfrak{S}}u$ существуют в силу включения $\mathcal{D}(\hat{A})$ в $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$ и, более того, существует след $\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}u$, поскольку выполняются равенства

$$\mathrm{Tr}_{+}^{\mathfrak{S}}u + \mathrm{Tr}_{-}^{\mathfrak{S}}u = \mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\hat{A}u = 0.$$

Предложение 1.2. *Для произвольного λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ операция вычисления следа $\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}u$ определяет непрерывное отображение*

$$\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}} : \mathcal{D}_{\lambda}(\hat{A}) \longmapsto \mathcal{B}_{\lambda}(\hat{A}, \mathfrak{S}), \tag{5}$$

причем имеет место соотношение

$$\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}} = [\hat{A}, \hat{\theta}_{+}]. \tag{6}$$

Доказательство. Из равенства (3) следует соотношение

$$\mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\hat{A}\hat{\theta}_{\pm}u = \hat{A}\hat{\theta}_{\pm}u - \hat{\theta}_{\pm}\hat{A}u, \tag{7}$$

то есть соотношение (6), из которого следует принадлежность обобщенной вектор-функции $\hat{R}(\lambda)\,\mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\hat{A}\hat{\theta}_{\pm}u$ пространству $L_2^k(R^n)$ и непрерывность отображения (5). Предложение доказано.

Пусть $\hat{A}^*$ — оператор, сопряженный к оператору $\hat{A}$. В соответствии с Предположением 1 область определения $\mathcal{D}(\hat{A}^*)$ оператора $\hat{A}^*$ содержит пространство $\mathcal{S}^k(R^n)$ и символ Вейля этого оператора совпадает с A^+. Обозначим $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$ — дефектное пространство ограничения $\hat{A}_0^*$ оператора $\hat{A}^*$ на пространство $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$. Иными словами, $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$ есть ортогональное дополнение в пространстве $L_2^k(R^n)$ к образу пространства $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$ относительно оператора $\bar{\lambda}I - \hat{A}^*$.

Предложение 1.3. *Для любого λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ справедливы следующие утверждения:*

1. оператор $\hat{R}(\lambda)$ изометрически отображает пространство $\mathcal{B}_{\lambda}(\hat{A},\mathfrak{S})$ на дефектное пространство $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$;

2. пространство $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$ инвариантно относительно действия операторов $\hat{\theta}_{\pm}$.

Доказательство. Для того, чтобы доказать утверждение 1 заметим, что вектор-функция u из пространства $L_2^k(R^n)$ принадлежит дефектному пространству $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$ тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$u = \hat{R}(\lambda)g\,, \tag{8}$$

где g — обобщенная функция умеренного роста с носителем, лежащим в границе $\mathfrak{S}$.

Действительно, если u принадлежит дефектному пространству $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$, то для произвольной основной вектор-функции φ, обращающейся в ноль в окрестности границы $\mathfrak{S}$, имеет место равенство

$$0 = \Big(u, (\bar{\lambda}I - \hat{A}^*)\varphi\Big) = \langle(\lambda I - \hat{A})u, \bar{\varphi}\rangle,$$

из которого следует, что носитель обобщенной вектор-функции $g = (\lambda I - \hat{A})u$ лежит в границе $\mathfrak{S}$ и при этом соотношение (8) выполняется. Отсюда следует, что пространство $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ содержит образ пространства $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$ относительно отображения $\lambda I - \hat{A}$.

Обратно, если вектор-функция φ принадлежит пространству $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$, а вектор-функция u из $L_2^k(R^n)$ имеет вид $u = \hat{R}(\lambda)g$, причем носитель обобщенной вектор-функции умеренного роста g лежит в границе $\mathfrak{S}$, то

$$\Big(\hat{R}(\lambda)g, (\bar{\lambda}I - \hat{A}^*)\varphi\Big) = \Big\langle \hat{R}(\lambda)g, \overline{(\bar{\lambda}I - \hat{A}^*)\varphi}\Big\rangle = \langle g, \bar{\varphi}\rangle = 0,$$

поскольку носитель обобщенной вектор-функции g не пресекается с носителем вектор-функции φ. Отсюда следует, что $\hat{R}(\lambda)g$ принадлежит пространству $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$ и, следовательно, образ пространства $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ при отображении $\hat{R}(\lambda)$ принадлежит дефектному пространству $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$. Поскольку операторы $\hat{R}(\lambda)$, $\lambda I - \hat{A}$ взаимно обратны, то из доказанного следует, что каждый из них является отображением на. Изометричность отображения

$$\hat{R}(\lambda) : \mathfrak{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S}) \longmapsto \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$$

следует из определения нормы в пространстве $\mathfrak{B}_\lambda$. Утверждение 1 доказано.

Если вектор-функция v принадлежит дефектному пространству $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$, а φ — произвольная вектор-функция, принадлежащая пространству $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$, то, учитывая инвариантность этого пространства относительно операторов $\hat{\theta}_\pm$ и локальность действия дифференциального оператора $\hat{A}^*$ на вектор-функции из пространства $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$, получим равенство

$$\Big(\hat{\theta}_\pm v, (\bar{\lambda}I - \hat{A}^*)\varphi\Big) = \Big(v, (\bar{\lambda}I - \hat{A}^*)\hat{\theta}_\pm\varphi\Big) = 0,$$

из которого следует, что вектор-функция $\hat{\theta}_\pm v$ также принадлежит дефектному пространству $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$, а значит это пространство инвариантно относительно действия операторов $\hat{\theta}_\pm$. Предложение доказано.

Из этого предложения следует, что пространство $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ полно, а значит является гильбертовым пространством.

Заметим теперь, что дефектные пространства $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$ также принадлежат пространству $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$: в силу Предложения 1.2 для любой вектор-функции v из пространства $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$ выполняется равенство

$$v = \hat{R}(\lambda)g,$$

где обобщенная вектор-функция g принадлежит пространству $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$, а из него следует равенство

$$\hat{A}\hat{R}(\lambda)g = -g + \lambda\hat{R}(\lambda)g = -g + \lambda v.$$

Поэтому для любой вектор-функции v из дефектного пространства $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$ существуют следы $\mathrm{Tr}_\pm^{\mathfrak{S}} v$.

Следовательно, правые части соотношений

$$\hat{t}_\pm(\lambda)g = -\mathrm{Tr}_\pm^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)\,g \tag{9}$$

корректно определены и принадлежат пространству $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ и поэтому соотношение (9) определяет линейные операторы $\hat{t}_\pm(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$.

Предложение 1.4. *Для любого λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ линейные операторы $\hat{t}_\pm(\lambda)$ являются ортогональными проекторами в пространстве $\mathcal{B}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ и удовлетворяют соотношениям*

$$\hat{t}_+(\lambda) + \hat{t}_-(\lambda) = I, \tag{10}$$

$$\hat{t}_\pm(\lambda) = (\lambda I - \hat{A})\,\hat{\theta}_\pm\,\hat{R}(\lambda). \tag{11}$$

Доказательство. Докажем сначала соотношения (11). Из инвариантности дефектного пространства $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$ относительно действия операторов $\hat{\theta}_\pm$ следует, что для произвольной обобщенной вектор-функции g из пространства $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ существуют однозначно определенные обобщенные вектор-функции $g_\pm$ из пространства $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ такие, что выполняются равенства

$$\hat{\theta}_\pm\hat{R}(\lambda)g = \hat{R}(\lambda)g_\pm,$$

то есть

$$g_\pm = (\lambda I - \hat{A})\,\hat{\theta}_\pm\,\hat{R}(\lambda)g.$$

С другой стороны, имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\hat{t}_\pm(\lambda)g &= -\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}_{\pm}\,\hat{R}(\lambda)g = -\mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\,\hat{A}\,\hat{\theta}_\pm\,\hat{R}(\lambda)g = \\
&= -\mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\,\hat{A}\,\hat{R}(\lambda)g_\pm = \mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\Big(g_\pm - \lambda\hat{R}(\lambda)g_\pm\Big) = g_\pm,
\end{aligned}$$

из которых и следует доказываемое равенство (11).

Поскольку оператор $\lambda I - \hat{A}$ изометрически отображает дефектное пространство $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$ на пространство $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$, то из соотношения (11) следует, что операторы $\hat{t}_\pm(\lambda)$ изометрически эквивалентны ограничениям операторов $\hat{\theta}_\pm$ на дефектное пространство $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0^*)$.

Следовательно, операторы $\hat{t}_\pm(\lambda)$, также как и операторы $\hat{\theta}_\pm$, являются ортогональными, взаимно ортогональными проекторами, сумма которых равна единичному оператору. Предложение доказано.

Теперь мы можем установить связь проекторов $\hat{t}_\pm(\lambda)$ с неоднородной краевой задачей для оператора $\hat{A}$ (см. Теорему 5 из работы Сили [4]).

Обозначим $\mathcal{B}^\pm_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ — образы проекторов $\hat{t}_\pm(\lambda)$. Из Предложения 1.4 следует, что пространство $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ разлагается в прямую сумму:

$$\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S}) = \mathcal{B}^+_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S}) \oplus \mathcal{B}^-_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S}).$$

Теорема 1.1. *Пусть для оператора $\hat{A}$ справедливы предположения 1–4 и комплексное λ принадлежит резольвентному множеству этого оператора. Тогда для любой обобщенной вектор-функции g из пространства $\mathcal{B}^\pm_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ вектор-функция $u = -\hat{R}(\lambda)g$ равна нулю в области $\mathcal{D}_\mp$, удовлетворяет уравнению*

$$\lambda u - \pi_{\mathfrak{S}}\,\hat{A}u = 0 \qquad (12)$$

и удовлетворяет краевым условиям

$$\mathrm{Tr}_{\pm}^{\mathfrak{S}} u = g, \quad \mathrm{Tr}_{\mp}^{\mathfrak{S}} u = 0.$$

Доказательство. Если обобщенная вектор-функция g принадлежит пространству $\mathcal{B}_{\lambda}^{\pm}(\hat{A}, \mathfrak{S})$, то имеет место равенство

$$g = \hat{t}_{\pm}(\lambda) g.$$

Отсюда, используя (11), получим равенство

$$u = -\hat{\theta}_{\pm} R(\lambda) g,$$

из которого следует равенство нулю вектор-функции u в области $\mathcal{D}_{\mp}$. По построению имеет место равенство

$$\lambda u - \hat{A} u = -\lambda \hat{R}(\lambda) g + \pi_{\mathfrak{S}} \hat{A} \hat{R}(\lambda) g = -\pi_{\mathfrak{S}} g = 0,$$

из которых следует, что вектор-функция u удовлетворяет уравнению (12). Далее из соотношений (9)–(11) следуют равенства

$$\mathrm{Tr}_{\pm}^{\mathfrak{S}} u = -\mathrm{Tr}_{\pm}^{\mathfrak{S}} R(\lambda) g = \hat{t}_{\pm}(\lambda) g = g,$$

$$\mathrm{Tr}_{\mp}^{\mathfrak{S}} u = -\mathrm{Tr}_{\mp}^{\mathfrak{S}} R(\lambda) g = \hat{t}_{\mp}(\lambda) g = 0.$$

Теорема доказана.

2. СЛЕДЫ И РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Начнем с построения решений краевых задач для уравнения

$$\lambda u - \pi_{\mathfrak{S}} \hat{A} u = v \tag{13}$$

с условиями трансмиссии, имеющими вид

$$\mathrm{Tr}_{+}^{\mathfrak{S}} u = \hat{\gamma}\, \mathrm{Tr}_{-}^{\mathfrak{S}} u, \tag{14}$$

где $\hat{\gamma}$ — непрерывный линейный оператор в пространстве $\mathcal{B}_{\lambda}(\hat{A}, \mathfrak{S})$.

Иными словами, на области $\mathcal{D}(\hat{A}_{\hat{\gamma}})$, состоящей из всех вектор-функций из пространства $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$, удовлетворяющих условию трансмиссии (14), определим оператор $\hat{A}_{\hat{\gamma}}$ с помощью соотношения

$$\hat{A}_{\hat{\gamma}} u = \pi_{\mathfrak{S}} \hat{A} u.$$

Определим непрерывный оператор $\hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})$ в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$, положив

$$\hat{B}(\lambda, \hat{\gamma}) = \hat{t}_+(\lambda) - \hat{\gamma}\, \hat{t}_-(\lambda). \tag{15}$$

В том случае, когда оператор $\hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})$ непрерывно обратим, обозначим

$$\hat{R}_{\hat{\gamma}}(\lambda) = \hat{R}(\lambda) + \hat{R}(\lambda)\, \hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})^{-1} (I + \hat{\gamma})\, \mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\, \hat{R}(\lambda). \tag{16}$$

Теорема 2.1. *Пусть комплексное число λ принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{A}$, $\hat{\gamma}$ — непрерывный линейный оператор в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ и оператор $\hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})$ непрерывно обратим в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$. Тогда оператор $\hat{R}_{\hat{\gamma}}(\lambda)$ непрерывен в пространстве $L_2^k(R^n)$ и для любой вектор-функции v из пространства $L_2^k(R^n)$ вектор-функция u, определенная соотношением*

$$u = \hat{R}(\lambda) v + \hat{R}(\lambda)\, \hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})^{-1} (I + \hat{\gamma})\, \mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\, \hat{R}(\lambda) v, \tag{17}$$

принадлежит пространству $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$, является решением уравнения (13) *и удовлетворяет условиям трансмиссии* (14), *а значит оператор $\hat{R}_{\hat{\gamma}}(\lambda)$ является резольвентой оператора $\hat{A}_{\hat{\gamma}}$.*

Доказательство. Из соотношения (17) следует равенство

$$\lambda u - \hat{A} u = v + \hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})^{-1} (I + \hat{\gamma})\, \mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\, \hat{R}(\lambda) v. \tag{18}$$

А так как обобщенная вектор-функция $\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\, \hat{R}(\lambda) v$ принадлежит пространству $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$, то в соответствии с предположениями об операторах $B(\lambda, \hat{\gamma})^{-1}$, $\hat{\gamma}$ вектор-функция

$$\hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})^{-1} (I + \hat{\gamma})\, \mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\, \hat{R}(\lambda) v$$

также принадлежит этому пространству. Отсюда следует, что обобщенная вектор-функция $\lambda u - \hat{A}u$ принадлежит пространству $L_2^k(R^n|\mathfrak{S})$, а значит обобщенная вектор-функция u принадлежит пространству $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$.

Из соотношения (18) следует, что обобщенная вектор-функция u удовлетворяет уравнению (13). Проверим теперь, что u удовлетворяет условиям трансмиссии (14). Очевидно имеют место равенства

$$\mathrm{Tr}_{\pm}^{\mathfrak{S}} u = \pm \hat{\mathrm{Tr}}^{\mathfrak{S}} R(\lambda)v - \hat{t}_{\pm}(\lambda)\,\hat{B}(\lambda,\hat{\gamma})^{-1}(I+\hat{\gamma})\,\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)v,$$

из которых следует равенство

$$\mathrm{Tr}_{+}^{\mathfrak{S}} u - \hat{\gamma}\,\mathrm{Tr}_{-}^{\mathfrak{S}} u = (I+\hat{\gamma})\,\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)v - \\ -\Big(\hat{t}_{+}(\lambda) - \hat{\gamma}\,\hat{t}_{-}(\lambda)\Big)\hat{B}(\lambda,\hat{\gamma})^{-1}(I+\hat{\gamma})\,\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)v = 0.$$

Непрерывность оператора $\hat{R}_{\hat{\gamma}}(\lambda)$ следует из того, что все операторы в правой части соотношения (16) являются непрерывными. Теорема доказана.

Замечание 2.1. *Из соотношения* (10) *следует соотношение*

$$\hat{B}(\lambda,\hat{\gamma}) = I - (I+\hat{\gamma})\,\hat{t}_{-}(\lambda).$$

А так как операторы $\hat{t}_{\pm}(\lambda)$ являются ортогональными проекторами, то

$$\|\hat{t}_{\pm}(\lambda)\| \le 1,$$

и поэтому для непрерывной обратимости оператора $\hat{B}(\lambda,\hat{\gamma})$ достаточно выполнения неравенства

$$\|I+\hat{\gamma}\|_{B_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})\to B_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})} < 1. \tag{19}$$

Простые примеры применения этих утверждений мы приведем в разд. 3.

Заметим также, что для краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с условием трансмиссии на неограниченной поверхности представление для резольвенты, аналогичное (16), получено в работе [8].

Рассмотрим теперь краевые задачи с импедансными краевыми условиями.

Пусть $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$ — проекционные операторы в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{aligned} &\hat{\xi}_1 + \hat{\xi}_2 = I, \\ &\hat{\xi}_1\hat{\xi}_2 = \hat{\xi}_2\hat{\xi}_1 = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Обозначим $\mathcal{B}_{\lambda,\hat{\xi}_1}(\hat{A}, \mathfrak{S}), \mathcal{B}_{\lambda,\hat{\xi}_2}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ — области значений проекторов $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$ соответственно.

Пусть

$$\hat{\zeta}_+ : \mathcal{B}_{\lambda,\hat{\xi}_2}(\hat{A}, \mathfrak{S}) \to \mathcal{B}_{\lambda,\hat{\xi}_1}(\hat{A}, \mathfrak{S}),$$

$$\hat{\zeta}_- : \mathcal{B}_{\lambda,\hat{\xi}_2}(\hat{A}, \mathfrak{S}) \to \mathcal{B}_{\lambda,\hat{\xi}_1}(\hat{A}, \mathfrak{S})$$

— непрерывные линейные операторы, причем оператор $\hat{\zeta}_-$ непрерывно обратим. Мы будем отождествлять эти операторы с их продолжениями на пространство $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ с помощью соотношений

$$\hat{\zeta}_+ = \hat{\xi}_1\hat{\zeta}_+\hat{\xi}_2, \quad \hat{\zeta}_- = \hat{\xi}_2\hat{\zeta}_-\hat{\xi}_1.$$

Будем говорить, что вектор-функция u из пространства $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$ удовлетворяет на границе $\mathfrak{S}$ импедансным краевым условиям с операторами импеданса $\hat{\zeta}_+$, $\hat{\zeta}_-$, если выполняются равенства

$$\hat{\xi}_1 \operatorname{Tr}_+^{\mathfrak{S}} u = \hat{\zeta}_+\hat{\xi}_2 \operatorname{Tr}_+^{\mathfrak{S}} u, \quad \hat{\xi}_2 \operatorname{Tr}_-^{\mathfrak{S}} u = -\hat{\zeta}_-^{-1}\hat{\xi}_1 \operatorname{Tr}_-^{\mathfrak{S}} u. \tag{21}$$

Положим $\hat{\xi} = \{\xi_1, \xi_2\}$ и $\hat{\zeta} = \{\zeta_1, \zeta_2\}$.

На области определения $\mathcal{D}(\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}})$, состоящей из всех вектор-функций из пространства $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$, удовлетворяющих импедансным краевым условиям (21), определим оператор $\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}}$ с помощью соотношения

$$\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}} u = \pi_{\mathfrak{S}} \hat{A} u.$$

Определим оператор $\hat{G}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta})$, действующий в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$, соотношением

$$\hat{G}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta}) = \hat{\xi}_1 \hat{t}_+(\lambda) - \hat{\zeta}_+ \hat{\xi}_2 \hat{t}_+(\lambda) + \hat{\xi}_2 \hat{t}_-(\lambda) + \hat{\zeta}_-^{-1} \hat{\xi}_1 \hat{t}_-(\lambda). \quad (22)$$

В том случае, когда оператор $\hat{G}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta})$ непрерывно обратим, обозначим

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}}(\lambda) \quad = \quad & \hat{R}(\lambda) + \hat{R}(\lambda)\, \hat{G}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta})^{-1} \times \\ & \times \Big((I - \hat{\zeta}_-^{-1}) \hat{\xi}_1 - (I + \hat{\zeta}_+) \hat{\xi}_2 \Big) \operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}} \hat{R}(\lambda). \end{aligned} \quad (23)$$

Теорема 2.2. *Пусть комплексное число λ принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{A}$, линейные операторы $\hat{\zeta}_+$, $\hat{\zeta}_-$ — непрерывны и оператор $\hat{G}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta})$ непрерывно обратим.*

Тогда оператор $\hat{R}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}}(\lambda)$ непрерывен в пространстве $L_2^k(R^n)$ и для любой вектор-функции v из пространства $L_2^k(R^n)$ вектор-функция u, определенная соотношением

$$u = \hat{R}(\lambda) v + \hat{R}(\lambda)\, \hat{G}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta})^{-1} \Big((I - \hat{\zeta}_-^{-1}) \hat{\xi}_1 - (I + \hat{\zeta}_+) \hat{\xi}_2 \Big) \operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}} \hat{R}(\lambda)\, v, \quad (24)$$

принадлежит пространству $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$, является решением уравнения (13) *и удовлетворяет импедансным краевым условиям* (21), *а значит оператор $\hat{R}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}}$ является резольвентой оператора $\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}}$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы отличается от предыдущего лишь в части проверки выполнения краевых условий. Очевидно, имеют место равенства

$$\operatorname{Tr}_\pm^{\mathfrak{S}} u = \pm \hat{\operatorname{Tr}}^{\mathfrak{S}} R(\lambda) v - \hat{t}_\pm(\lambda)\, \hat{G}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta})^{-1} \Big((I - \hat{\zeta}_-^{-1}) \hat{\xi}_1 - (I + \hat{\zeta}_+) \hat{\xi}_2 \Big) v,$$

из которых следуют равенства

$$\begin{aligned} (\hat{\xi}_1 - \hat{\zeta}_+ \hat{\xi}_2) \operatorname{Tr}_+^{\mathfrak{S}} u = (\hat{\xi}_1 - \hat{\zeta}_+ \hat{\xi}_2) \operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}} \hat{R}(\lambda) v \; - \\ - (\hat{\xi}_1 - \hat{\zeta}_+ \hat{\xi}_2)\, \hat{t}_+(\lambda)\, \hat{G}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta})^{-1} \times \end{aligned}$$

$$\times\Big((I-\hat\zeta_-^{-1})\hat\xi_1-(I+\hat\zeta_+)\hat\xi_2\Big)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v=$$
$$=(\hat\xi_1-\hat\zeta_+\hat\xi_2)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v-\hat\xi_1\hat G(\lambda,\hat\xi,\hat\zeta)\,\hat G(\lambda,\hat\xi,\hat\zeta)^{-1}\times$$
$$\times\Big((I-\hat\zeta_-^{-1})\hat\xi_1-(I+\hat\zeta_+)\hat\xi_2\Big)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v=$$
$$=(\hat\xi_1-\hat\zeta_+\hat\xi_2)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v-$$
$$-\hat\xi_1\Big((I-\hat\zeta_-^{-1})\hat\xi_1-(I+\hat\zeta_+)\hat\xi_2\Big)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v=$$
$$=(\hat\xi_1-\hat\zeta_+\hat\xi_2)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v-(\hat\xi_1-\hat\zeta_+\hat\xi_2)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v=0,$$

а также равенства

$$(\hat\xi_2+\hat\zeta_-^{-1}\hat\xi_1)\operatorname{Tr}_+^{\mathfrak{S}}u=(\hat\xi_2+\hat\zeta_-^{-1}\hat\xi_1)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v-$$
$$-(\hat\xi_2+\hat\zeta_-^{-1}\hat\xi_1)\,\hat t_+(\lambda)\,\hat G(\lambda,\hat\xi,\hat\zeta)^{-1}\times$$
$$\times\Big((I-\hat\zeta_-^{-1})\hat\xi_1-(I+\hat\zeta_+)\hat\xi_2\Big)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v=$$
$$=(\hat\xi_2+\hat\zeta_-^{-1}\hat\xi_1)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v-\hat\xi_2\,\hat G(\lambda,\hat\xi,\hat\zeta)\,\hat G(\lambda,\hat\xi,\hat\zeta)^{-1}\times$$
$$\times\Big((I-\hat\zeta_-^{-1})\hat\xi_1-(I+\hat\zeta_+)\hat\xi_2\Big)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v=$$
$$=(\hat\xi_2+\hat\zeta_-^{-1}\hat\xi_1)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v-\hat\xi_1\Big((I-\hat\zeta_-^{-1})\hat\xi_1-$$
$$-(I+\hat\zeta_+)\hat\xi_2\Big)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v=$$
$$=(\hat\xi_1-\hat\zeta_+\hat\xi_2)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v-(\hat\xi_1-\hat\zeta_+\hat\xi_2)\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)v=0.$$

Теорема доказана.

Замечание 2.2. *В случае, когда* $\hat\zeta_+=0$, $\hat\zeta_-^{-1}=0$, *имеет место равенство*

$$\hat G(\lambda,\hat\xi,0)=\hat\xi_1\hat t_+(\lambda)+\hat\xi_2\hat t_-(\lambda)\tag{25}$$

и соотношение (23) *принимает вид*

$$(\lambda I-\hat A_{\hat\xi,\hat\zeta})^{-1}u=\hat R(\lambda)u+\hat R(\lambda)\Big(\hat\xi_1\hat t_+(\lambda)-\hat\xi_2\hat t_-(\lambda)\Big)^{-1}\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}\hat R(\lambda)u.\tag{26}$$

Заметим, что приведенная теорема является обобщением результатов работы [9].

3. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим теперь несколько простых примеров применения теорем, приведенных в предыдущих параграфах.

Пример 3.1. Рассмотрим задачу трансмиссии для оператора $\hat{A} = i\,\dfrac{d}{dx}$ с граничным множеством $\mathfrak{S} = \{x_0\}$.

В этом случае для функции φ из пространства основных функций Шварца имеет место соотношение

$$\begin{aligned}[\hat{R}(\lambda)\varphi](x) \;&=\; -i\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\,\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,\lambda-\mathrm{Im}\,\lambda)(\mathrm{x}-\mathrm{y})} \times \\ &\times\theta\Big(\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\,\lambda(\mathrm{x}-\mathrm{y})\Big)\varphi(\mathrm{y})\,\mathrm{dy}. \qquad (27)\end{aligned}$$

Положим

$$w_{\bar{\lambda},x}(y) = -i\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\,\lambda\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\mathrm{Re}\,\lambda-\mathrm{Im}\,\lambda)(\mathrm{y}-\mathrm{x})}\,\theta\Big(\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\,\lambda(\mathrm{y}-\mathrm{x})\Big).$$

Очевидно, выполняется равенство

$$w_{\bar{\lambda},x}(y) = [\hat{R}(\lambda)\,\delta_x](y),$$

где δ_x — мера Дирака, сосредоточенная в точке x, а соотношение (27) может быть представлено в виде

$$[\hat{R}(\lambda)\,\varphi](x) = (\varphi, w_{\lambda,x}).$$

В последнем соотношении можно заменить основную функцию φ на произвольную функцию u из пространства $L_2(R^1)$. Кроме того, из него следует, что функция $\hat{R}(\lambda)u$ будет непрерывной, поскольку функции $w_{\bar{\lambda},x}(y)$ получаются действием группы сдвигов, которая является непрерывной группой унитарных операторов в пространстве $L_2(R^1)$. Поэтому, применяя соотношение (4), получим

$$\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)u = i[\hat{R}(\lambda)\,u](x_0)\,\delta_{x_0} = i(u, w_{\lambda,x_0})\,\delta_{x_0}, \qquad (28)$$

откуда следует соотношение

$$\hat{R}(\lambda)\,\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)u = i(u, w_{\lambda,x_0})\, w_{\bar{\lambda},x_0}.$$

В силу известной теоремы из теории обобщенных функций, произвольная обобщенная функция с носителем в точке x_0 является линейной комбинацией производных от обобщенной функции δ_{x_0}. Поэтому для любого комплексного числа λ, не являющегося вещественным числом, пространство $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ одномерно и состоит из обобщенных функций пропорциональных δ_{x_0}. Из Предложения 1.3 следует, что дефектное пространство $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}$ одномерно и функция $w_{\bar{\lambda}}$ является в нем базисом.

Оператор трансмиссии $\hat{\gamma}$ и оператор $\hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})$ в рассматриваемом случае являются операторами умножения на комплексные постоянные γ, $B(\lambda, \gamma)$ соответственно, и имеют место соотношения

$$B(\lambda,\gamma) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda) - \frac{\gamma}{2}(1 - \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda),$$

$$B(\lambda,\gamma)^{-1} = 2(1 + \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda) - \frac{2}{\gamma}(1 - \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda).$$

Таким образом, получим соотношение

$$\begin{aligned}(\lambda I - \hat{A}_{\hat{\gamma}})^{-1}u = \hat{R}(\lambda)u + 2i(1+\gamma)\, \times \\ \times \left(1 + \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda - \frac{1}{\gamma}(1 - \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda)\right)(u, w_{\lambda,x_0})\, w_{\bar{\lambda},x_0}.\end{aligned} \tag{29}$$

Для операторов $\hat{\theta}_\pm$ в дефектных пространствах $\mathcal{N}_\lambda$ имеют место соотношения

$$\hat{\theta}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda)\,\mathrm{I},$$

из которых следуют соотношения

$$\hat{t}_\pm(\lambda) = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\lambda)\,\mathrm{I}.$$

В заключение заметим, что непосредственно из определения (4) следов $\mathrm{Tr}_{\pm}^{\mathfrak{S}}$, в том случае, когда функция u может быть представлена в виде

$$u = \theta_+ u_+ + \theta_- u_-,$$

следуют равенства

$$\mathrm{Tr}_{\pm}^{\mathfrak{S}} u = \pm i\, u_{\pm}(0)\, \delta_{x_0} = \pm i\, u(\pm 0)\, \delta_{x_0}.$$

Следовательно, условие трансмиссии (14) в рассматриваемом случае совпадает с обычным условием трансмиссии

$$u(+0) = -\gamma u(-0).$$

Появление знака минус в последней формуле объясняется наличем знака $\pm$ в определении следа (4).

Пример 3.2. Рассмотрим задачу трансмиссии для оператора $\hat{A} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ и границы $\mathfrak{S} = \{x_0\}$.

Для резольвенты $\hat{R}(\lambda)$ оператора $\hat{A}$ и для произвольной функции φ из пространства основных функций Шварца имеет место соотношение

$$[\hat{R}(\lambda)\varphi](x) = -\frac{i \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{\lambda} \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \sqrt{\lambda}\, |x-y|}\, \varphi(y)\, dy.$$

Для любого комплексного числа λ, не являющегося вещественным неотрицательным числом, пространство $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ двумерно и состоит из линейных комбинаций двух обобщенных функций: δ_{x_0}, δ'_{x_0}, и, следовательно, имеет место разложение в прямую сумму

$$\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S}) = \mathcal{B}_\lambda^1(\hat{A}, \mathfrak{S}) \oplus \mathcal{B}_\lambda^2(\hat{A}, \mathfrak{S}),$$

где одномерные пространства $\mathcal{B}_\lambda^1(\hat{A}, \mathfrak{S})$, $\mathcal{B}_\lambda^2(\hat{A}, \mathfrak{S})$ состоят из обобщенных функций пропорциональных обобщенным функциям δ_{x_0} и δ'_{x_0} соответственно.

Оператор трансмиссии $\hat{\gamma}$ в рассматриваемом случае является матрицей 2×2 и поэтому выражение для резольвенты может быть представлено в более простой форме. Проведем необходимые для этого преобразования. Обозначим

$$w^1_\lambda = \hat{R}(\lambda)\delta_{x_0}, \quad w^2_\lambda = \hat{R}(\lambda)\delta'_{x_0}.$$

Очевидно

$$w^1_\lambda = -\frac{i\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}\, e^{i\sqrt{\lambda}\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\,|x-x_0|},$$

$$w^2_\lambda = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x-x_0)\, e^{i\sqrt{\lambda}\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\,|x-x_0|}.$$

Эти функции взаимно ортогональны и их нормы могут быть вычислены:

$$\|w^1_\lambda\|^2_{L^2(R^1)} = \frac{1}{8\,|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|\,|\lambda|}, \quad \|w^2_\lambda\|^2_{L^2(R^1)} = \frac{1}{8\,|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}.$$

Следовательно, скалярное произведение в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})$ имеет вид

$$(g,h)_{\mathcal{B}_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})} = \frac{1}{8\,|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|}\left(\frac{1}{|\lambda|}\,\tilde{g}_1\bar{\tilde{h}}_1 + \tilde{g}_2\bar{\tilde{h}}_2\right),$$

$$g = \tilde{g}_1\delta_{x_0} + \tilde{g}_2\delta'_{x_0}, \quad h = \tilde{h}_1\delta_{x_0} + \tilde{h}_2\delta'_{x_0}.$$

Далее

$$\operatorname{sing}_{\mathfrak{S}} \frac{d^2}{dx^2}\,\theta\Big(\pm(x-x_0)\Big)e^{i\sqrt{\lambda}\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\,|x-x_0|} =$$
$$= \pm\delta'_{x_0} + i\sqrt{\lambda}\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\,\delta_{x_0}$$

и поэтому имеют место соотношения

$$[\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}_{\pm} w^1_\lambda](x) = \pm\frac{i\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}\,\delta'_{x_0} - \frac{1}{2}\,\delta_{x_0},$$

$$[\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}_{\pm} w^2_\lambda](x) = -\frac{1}{2}\,(\delta'_{x_0} \pm i\sqrt{\lambda}\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\,\delta_{x_0}).$$

Из соотношений

$$\begin{aligned}\hat t_\pm(\lambda)g &= -\operatorname{Tr}_\pm^{\mathfrak S}\hat R(\lambda)g = -\tilde g_1\operatorname{Tr}_\pm^{\mathfrak S} w_\lambda^1 - \tilde g_2\operatorname{Tr}_\pm^{\mathfrak S} w_\lambda^2 = \\ &= \left(\frac12\,\tilde g_1\delta_{x_0} \pm \frac12\, i\sqrt\lambda\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt\lambda\,\tilde g_2\right) + \\ &\quad + \left(\mp\frac{i\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt\lambda}{2\sqrt\lambda}\,\tilde g_1 + \frac12\,\tilde g_2\right)\delta'_{x_0}\end{aligned}$$

следуют равенства

$$\hat t_\pm(\lambda) = \frac12\begin{pmatrix}1 & \pm\hat W\\ \pm\hat W^{-1} & 1\end{pmatrix}, \tag{30}$$

где

$$\hat W = WI,\quad W = i\sqrt\lambda\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt\lambda.$$

Для завершения вывода соотношения для резольвенты нам осталось вычислить выражение

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr}^{\mathfrak S}\hat R(\lambda)u = \operatorname{sing}_{\mathfrak S}\hat A\theta(x-x_0)\hat R(\lambda)u = \\ &= \frac{i\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt\lambda}{2\sqrt\lambda}\operatorname{sing}_{\mathfrak S}\frac{d^2}{dx^2}\,\theta(x-x_0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt\lambda\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt\lambda\,|x-y|}u(y)\,dy.\end{aligned}$$

Используя выражения для функций w_λ^1, w_λ^2 и предполагая, что функция u является основной, получим

$$\begin{aligned}&\operatorname{sing}_{\mathfrak S}\frac{d^2}{dx^2}\,\theta(x-x_0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt\lambda\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt\lambda\,|x-y|}u(y)\,dy = \\ &= \operatorname{sing}_{\mathfrak S}\frac{d}{dx}\left\{\delta(x-x_0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt\lambda\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt\lambda\,|x-y|}u(y)\,dy + \right. \\ &\left. + i\sqrt\lambda\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt\lambda\,\theta(x-x_0)\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(x-y)\,e^{i\sqrt\lambda\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt\lambda\,|x-y|}u(y)\,dy\right\} = \\ &= 2i\sqrt\lambda\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt\lambda\,(u,w_\lambda^1)\,\delta(x-x_0) - \frac{2\sqrt\lambda}{i\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\sqrt\lambda}\,(u,w_\lambda^2)\,\delta'(x-x_0),\end{aligned}$$

и, наконец,

$$\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}} \hat{R}(\lambda)u = (u, w_{\bar\lambda}^1)\, \delta(x - x_0) + (u, w_{\bar\lambda}^2)\, \delta'(x - x_0). \tag{31}$$

В силу Предложения 1.2 это выражение для следа функции $\hat{R}(\lambda)u$ по непрерывности продолжается на произвольные функции u из пространства $L_2(R^1)$. Теперь из соотношения (16) получим

$$(\lambda I - \hat{A}_{\hat\gamma})^{-1} u = \hat{R}(\lambda)u + \alpha_1(\lambda, u)\, w_{\bar\lambda}^1 + \alpha_2(\lambda, u)\, w_{\bar\lambda}^2, \tag{32}$$

где

$$\alpha(\lambda, u) = \{\alpha_1(\lambda, u), \alpha_2(\lambda, u)\} = \hat{B}(\lambda, \hat\gamma)^{-1}(I + \hat\gamma)\, \omega(\lambda, u),$$
$$\omega(\lambda, u) = \{(u, w_{\bar\lambda}^1), (u, w_{\bar\lambda}^2)\}$$

— двумерные комплексные вектора.

Таким образом, для произвольных u, v из пространства $L_2(R^1)$ и произвольного λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ получим в случае обратимости оператора $\hat{B}(\lambda, \gamma)$ равенство

$$\begin{aligned}\Big((\lambda I - \hat{A}_{\hat\gamma})^{-1} u, v\Big) = (\hat{R}(\lambda)u, v) &+ \\ + \Big(\hat{B}(\lambda, \hat\gamma)^{-1}(I + \hat\gamma)\, \omega(\lambda, u), \omega(\bar\lambda, v)\Big)_{C^2}&.\end{aligned} \tag{33}$$

Для того чтобы получить достаточные условия обратимости оператора $\hat{B}(\lambda, \hat\gamma)$, нужно оценить норму оператора трансмиссии $\hat\gamma$ в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$. Для этой нормы справедливы соотношения

$$\|\hat\gamma\|_{\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})} = \sup_g \frac{\|\hat\gamma g\|_{\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})}}{\|g\|_{\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})}} = \sup_g \frac{\|\hat\rho^{\frac12} \hat\gamma g\|}{\|\hat\rho^{\frac12} g\|} = \sup_g \frac{\|\hat\rho^{\frac12}\, \hat\gamma\, \hat\rho^{-\frac12}\, g\|}{\|g\|},$$

где оператор $\hat\rho$ имеет вид

$$\hat\rho = \begin{pmatrix} |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} |\lambda|^{-1} & 0 \\ 0 & |\operatorname{Im} \lambda|^{-1} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, норма оператора $\hat{\gamma}$ в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ совпадает с нормой матрицы $\hat{\rho}^{\frac{1}{2}}\,\hat{\gamma}\,\hat{\rho}^{-\frac{1}{2}}$, имеющей вид

$$\hat{\rho}^{\frac{1}{2}}\,\hat{\gamma}\,\hat{\rho}^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_{11} & \hat{\gamma}_{12}\,|\lambda|^{-\frac{1}{2}} \\ \hat{\gamma}_{21}\,|\lambda|^{\frac{1}{2}} & \hat{\gamma}_{22} \end{pmatrix}.$$

Поэтому из неравенства (19) следует, что для непрерывной обратимости оператора $\hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})$ достаточно, чтобы норма матрицы $I + \hat{\rho}^{\frac{1}{2}}\,\hat{\gamma}\,\hat{\rho}^{-\frac{1}{2}}$ удовлетворяла неравенству

$$\left\| I + \hat{\rho}^{\frac{1}{2}}\,\hat{\gamma}\,\hat{\rho}^{-\frac{1}{2}} \right\| < 1. \tag{34}$$

Заметим, что в том случае, когда функция u может быть представлена в виде

$$u = \hat{\theta}_+ u_+ + \hat{\theta}_- u_-,$$

с непрерывно дифференцируемыми функциями $u_\pm$, непосредственно из определения (4) следа $\mathrm{Tr}_\pm^{\mathfrak{S}}$ для оператора $\hat{A} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ получаются равенства

$$\mathrm{Tr}_\pm^{\mathfrak{S}}\, u = \mp\Big(u'(\pm 0)\,\delta_{x_0} + u(\pm 0)\,\delta'_{x_0}\Big).$$

Из этих равенств следует соотношение

$$\begin{pmatrix} u'(+0) \\ u(+0) \end{pmatrix} = -\tilde{\gamma}\begin{pmatrix} u'(-0) \\ u(-0) \end{pmatrix},$$

совпадающее с обычным условием трансмиссии с матрицей трансмиссии $-\hat{\gamma}$.

Пример 3.3. Рассмотрим теперь краевую задачу для оператора $\hat{A} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ с импедансными краевыми условиями (21), предполагая, что проекционные операторы $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2$ и операторы импеданса $\hat{\zeta}_+$, $\hat{\zeta}_-$ заданы матрицами

$$\hat{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \hat{\zeta}_+ = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{\zeta}_- = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_- \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где ζ_+, ζ_- — комплексные константы. Такому выбору операторов импеданса отвечают краевые условия

$$u'(+0)=\zeta_+u(+0),\quad u(-0)=-\zeta_-^{-1}u'(-0).$$

Из соотношений (22), (30) следует, что

$$\begin{aligned}\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta}) &= \begin{pmatrix}1 & \zeta_+\\ 0 & 0\end{pmatrix}\hat{t}_+(\lambda)+\begin{pmatrix}0 & 0\\ -\zeta_-^{-1} & 1\end{pmatrix}\hat{t}_-(\lambda)=\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\zeta_+W^{-1} & W-\zeta_+\\ -\zeta_-^{-1}-W^{-1} & \zeta_-^{-1}W+1\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{35}$$

и

$$\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})^{-1}=\begin{pmatrix}W(W-\zeta_+)^{-1} & -W(1+W\zeta_-^{-1})^{-1}\\ (W-\zeta_+)^{-1} & (1+W\zeta_-^{-1})^{-1}\end{pmatrix}.\tag{36}$$

Выражение для резольвенты оператора $\hat{A}_{\xi,\zeta}$ имеет вид

$$\left(\lambda I-\hat{A}_{\xi,\zeta}\right)^{-1}u=\hat{R}(\lambda)u+\alpha_1(\lambda,u)\,w_\lambda^1+\alpha_2(\lambda,u)\,w_\lambda^2,\tag{37}$$

где

$$\alpha(\lambda,u)=\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})^{-1}\begin{pmatrix}1 & -\zeta_+\\ \zeta_-^{-1} & 1\end{pmatrix}\omega(\lambda,u),$$
$$\omega(\lambda,u)=\{(u,w_\lambda^1),(u,w_\lambda^2)\}.$$

Следовательно, комплексное число λ, не являющееся неотрицательным вещественным числом, принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}}$, если выполняются неравенства

$$i\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\neq\zeta_+,\quad i\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\neq\zeta_-^{-1}.$$

В силу элементарного соотношения

$$|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}|=\sqrt{\frac{|\lambda|-\mathrm{Re}\,\lambda}{2}}$$

в полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \le b$ при достаточно большом b выполняются неравенства

$$|W - \zeta_+| \ne 0, \quad |W + \zeta_-| \ne 0,$$

а значит эта полуплоскость принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}}$.

Пример 3.4. Рассмотрим задачу трансмиссии для оператора $\hat{A} = -\Delta = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ в пространстве $L_2(R^n)$ и плоскости $\{x_n = 0\}$ в качестве граничного множества $\mathfrak{S}$. В этом случае для функции φ из пространства $\mathcal{S}(R^n)$ основных функций Шварца имеет место соотношение

$$[\hat{R}(\lambda)\varphi](x) = -\frac{i}{2}\hat{k}(\lambda)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\hat{k}^{-1}(\lambda)|x_n - y_n|}\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)\, dy_n, \tag{38}$$

где $\hat{k}(\lambda) = \hat{W}(\lambda)^{-1}\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\,\hat{W}(\lambda)$ и оператор

$$\hat{W}(\lambda) = \sqrt{\lambda + \Delta_{||}}, \quad \Delta_{||} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$$

корректно определен с помощью преобразования Фурье по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Мы можем воспользоваться основными соотношениями из предыдущего примера, заменяя параметр λ на оператор $\hat{W}(\lambda)$. Для любого комплексного числа λ, не являющегося вещественным неотрицательным числом, пространство $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ состоит из линейных комбинаций вида

$$g_1\delta_{x_0} + g_2\delta'_{x_0},$$

где g_1, g_2 — обобщенные функции умеренного роста от аргументов $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Необходимым и достаточным условием принадлежности такой линейной комбинации пространству $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ является выполнение неравенства

$$\|\hat{R}(\lambda)g_1\delta_{x_0} + \hat{R}(\lambda)g_2\delta'_{x_0}\|^2_{L_2(R^n)} = \|\hat{R}(\lambda)g_1\delta_{x_0}\|^2_{L_2(R^n)} + \\ + \|\hat{R}(\lambda)g_2\delta'_{x_0}\|^2_{L_2(R^n)} < \infty.$$

Имеют место равенства

$$\left(\hat{R}(\lambda)g_1\delta_{x_0}, \hat{R}(\lambda)h_1\delta_{x_0}\right)_{L_2(R^n)} =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\left|\operatorname{Im}\hat{W}(\lambda)\right|^{-1}\left|\hat{W}(\lambda)\right|^{-1}g_1, h_1\right)_{L_2(R^{n-1})},$$
$$\left(\hat{R}(\lambda)g_2\delta'_{x_0}, \hat{R}(\lambda)h_2\delta'_{x_0}\right)_{L_2(R^n)} = \frac{1}{8}\left(\left|\operatorname{Im}\hat{W}(\lambda)\right|^{-1}g_2, h_2\right)_{L_2(R^{n-1})}.$$

Поэтому, используя элементарное соотношение

$$\operatorname{Im}\sqrt{z} = \operatorname{sgn}\operatorname{Im} z\sqrt{\frac{|z| - \operatorname{Re} z}{2}}$$

и преобразование Фурье, получим неравенства

$$c_1\left((1-\Delta_{||})^{-\frac{3}{2}}g_1, g_1\right)_{L_2(R^{n-1})} < \|\hat{R}(\lambda)g_1\delta_{x_0}\|^2_{L_2(R^n)} <$$
$$< c_2\left((1-\Delta_{||})^{-\frac{3}{2}}g_1, g_1\right)_{L_2(R^{n-1})}, \tag{39}$$

$$c_1\left((1-\Delta_{||})^{-\frac{1}{2}}g_2, g_2\right)_{L_2(R^{n-1})} < \|\hat{R}(\lambda)g_2\delta'_{x_0}\|_{L_2(R^n)} <$$
$$< c_2\left((1-\Delta_{||})^{-\frac{1}{2}}g_2, g_2\right)_{L_2(R^{n-1})}, \tag{40}$$

где c_1, c_2 — положительные константы, зависящие от λ.

Рассмотрим теперь оператор трансмиссии $\hat{\gamma}$ в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$, отвечающий матрице γ. Для его нормы справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\|\hat{\gamma}\|_{\mathcal{B}_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})} &= \sup_g \frac{\|\hat{\gamma}g\|_{\mathcal{B}_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})}}{\|g\|_{\mathcal{B}_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})}} = \sup_{\tilde{g}} \frac{\|\hat{\rho}^{\frac{1}{2}}\gamma\tilde{g}\|_{L^2_2(R^{n-1})}}{\|\hat{\rho}^{\frac{1}{2}}\tilde{g}\|_{L^2_2(R^{n-1})}} = \\ &= \sup_{\tilde{g}} \frac{\|\hat{\rho}^{\frac{1}{2}}\gamma\hat{\rho}^{-\frac{1}{2}}\tilde{g}\|_{L^2_2(R^{n-1})}}{\|\tilde{g}\|_{L^2_2(R^{n-1})}},\end{aligned} \tag{41}$$

где операторная матрица $\hat{\rho}$ имеет вид

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \left|\operatorname{Im} \hat{W}(\lambda)\right|^{-1} \left|\hat{W}(\lambda)\right|^{-1} & 0 \\ 0 & \left|\operatorname{Im} \hat{W}(\lambda)\right|^{-1} \end{pmatrix}.$$

Поэтому имеет место равенство

$$\hat{\rho}^{\frac{1}{2}} \gamma \hat{\rho}^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \left|\hat{W}(\lambda)\right|^{-\frac{1}{2}} \\ \gamma_{21} \left|\hat{W}(\lambda)\right|^{\frac{1}{2}} & \gamma_{22} \end{pmatrix},$$

из которого ввиду неограниченности оператора $\hat{W}(\lambda)$ в пространстве $L_2^2(R^{n-1})$ следует, что оператор $\hat{\gamma}$ непрерывен в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $\gamma_{21} = 0$.

Теперь, учитывая что оператор $\hat{W}(\lambda)$ унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию и удовлетворяет оценке

$$\|\hat{W}(\lambda)\|_{L_2^2(R^{n-1}) \to L_2^2(R^{n-1})} < \frac{1}{\sqrt{|\operatorname{Im} \lambda|}},$$

получим, используя матричную норму Гильберта–Шмидта для оценки нормы оператора $I + \hat{\gamma}$, достаточные условия обратимости оператора $\hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})$:

$$\sqrt{|1 + \gamma_{11}|^2 + |1 + \gamma_{22}|^2 + \frac{|\gamma_{12}|^2}{|\operatorname{Im} \lambda|}} < 1. \tag{42}$$

Пример 3.5. Рассмотрим теперь задачу с импедансными краевыми условиями для оператора $\hat{A}$ из предыдущего примера. Рассмотрим случай, когда $\hat{\zeta}_-^{-1} = 0$, а операторы $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$ те же, что и в примере 3. Используя соотношения (30) с заменой оператора $\hat{W}$ на оператор $\hat{W}(\lambda) = \sqrt{\lambda + \Delta}$, получим равенство

$$\hat{t}_\pm(\lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm \hat{W}(\lambda) \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \hat{W}(\lambda) \\ \pm \hat{W}(\lambda)^{-1} \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \hat{W}(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

из которого следует соотношение

$$\begin{aligned}\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta}) &= \hat{\xi}_1\hat{t}_+(\lambda) - \hat{\zeta}_+\hat{\xi}_2\hat{t}_+(\lambda) + \hat{\xi}_2\hat{t}_-(\lambda) = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\hat{\zeta}_+\hat{W}(\lambda)^{-1} & \hat{W}(\lambda)-\hat{\zeta}_+ \\ -\hat{W}(\lambda)^{-1} & 1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Обозначим $\hat{\zeta}^0 = \{0,\infty\}$. Тогда

$$\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta}) = \hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta}^0) + \begin{pmatrix} -\hat{\zeta}_+\hat{W}(\lambda)^{-1} & -\hat{\zeta}_+ \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

и поскольку

$$\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta}^0)^{-1} = \begin{pmatrix} I & -\hat{W}(\lambda) \\ \hat{W}(\lambda)^{-1} & I\end{pmatrix},$$

то имеет место равенство

$$\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})^{-1} = \hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta}^0)^{-1}\left(I + \begin{pmatrix} \hat{\zeta}_+\hat{W}(\lambda)^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)^{-1}.$$

Следовательно, для обратимости оператора $\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})$ достаточно, чтобы оператор $\hat{\zeta}_+\hat{W}(\lambda)^{-1}$ был непрерывен в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})$ и чтобы его норма удовлетворяла неравенству

$$\|\hat{\zeta}_+\hat{W}(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{B}^1_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})\longrightarrow\mathcal{B}^1_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})} < 1,$$

для чего в силу соотношения (41) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\||\mathrm{Im}\,\hat{\mathrm{W}}(\lambda)|^{-1}\,|\hat{W}(\lambda)|^{-1}\hat{\zeta}_+\,|\mathrm{Im}\,\hat{W}(\lambda)|\right\|_{L^2(R^{n-1})\longrightarrow L^2(R^{n-1})} < 1.$$

Если оператор $\hat{\zeta}_+$ является оператором умножения на комплексную константу ζ_+, то последнее неравенство имеет место для всех комплексных λ, достаточно удаленных от положительной полуоси.

В частном случае $\zeta_+ = 0$ и $\zeta_- = \infty$ из соотношения (26) получим выражение для резольвенты $\hat{R}_{\hat{\xi}\hat{\zeta}}(\lambda)$, дающей решение задачи Неймана в области $\mathcal{D}_+$ и решение задачи Дирихле в области $\mathcal{D}_-$.

Пример 3.6. Рассмотрим симметрический оператор $\hat{A}$, связанный с оператором Максвелла:

$$\hat{A} = i\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{rot} \\ \mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть граница $\mathfrak{S}$ является гладкой поверхностью, задаваемой уравнением $F = 0$, где F — дифференцируемая функция и $u = \{\mathcal{E}, \mathcal{H}\}$, где $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ — дифференцируемые 3-х мерные вектор-функции. Тогда из соотношения

$$\mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\, \mathrm{rot}\, \theta(F)\, \mathcal{E} = [\mathrm{grad}\, F, \mathcal{E}]\, \delta(F)$$

следует, что след от действия оператора $\hat{A}$ на вектор-функцию u имеет вид

$$\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}} u = i\begin{pmatrix} 0 & -[\mathrm{grad}\, F, \mathcal{H}] \\ [\mathrm{grad}\, F, \mathcal{E}] & 0 \end{pmatrix} u\, \delta(F).$$

Из этого соотношения видно, что след вектор-функции зависит только от её проекции на касательное пространство граничной поверхности. Для резольвенты оператора $\hat{A}$ имеет место формула

$$\hat{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div} + \lambda^2 I) & -i\,\mathrm{rot} \\ i\,\mathrm{rot} & \dfrac{1}{\lambda}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div} + \lambda^2 I) \end{pmatrix} \hat{r}(\lambda), \qquad (44)$$

где

$$\hat{r}(\lambda) = (\lambda^2 + \Delta)^{-1}.$$

Вычислим операторы $\hat{t}_\pm(\lambda)$ в случае плоской границы $F(x) = x_3$. Используя преобразование Фурье, можно показать, что обобщенная вектор-функция g принадлежит пространству $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ в том и только в том случае, когда она имеет вид

$$g = \varphi\delta(x_3), \quad \varphi = \{\varphi_\mathcal{E}, \varphi_\mathcal{H}\}, \quad \varphi_\mathcal{L} = \{\varphi_{\mathcal{L},1}, \varphi_{\mathcal{L},2}, 0\}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{E}, \mathcal{H}.$$

Обозначим $u = \hat{R}(\lambda)g$. Пусть обобщенные вектор-функции $\tilde{u}(p_1, p_2, x_3)$, $\tilde{g}(p_1, p_2)$ получены преобразованием Фурье $\mathcal{F}_{||}$ по переменным x_1, x_2 из вектор-функций u, g и вектор-функция φ принадлежит пространству основных функций Шварца.

Из соотношения (38), обозначив $p_{||} = \{p_1, p_2\}$, получим для оператора $\hat{r}_1(\lambda) = \mathcal{F}_{||}^{-1}\,\hat{r}(\lambda)\,\mathcal{F}_{||}$ равенства

$$[\hat{r}_1(\lambda)\tilde{g}]\,(p_{||}, x_3) = -\frac{i}{2}\,k(\lambda, p_{||})\,e^{ik(\lambda,p_{||})^{-1}\,|x_3|}\varphi(p_{||}),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\,\hat{r}_1(\lambda)\tilde{g}\right](p_{||}, x_3) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x_3\,\varphi(p_{||}),$$

где

$$k(\lambda, p_{||}) = W(\lambda, p_{||})^{-1}\operatorname{sgn}\operatorname{Im} W(\lambda, p_{||}), \quad W(\lambda, p_{||}) = \sqrt{\lambda^2 - p_{||}^2}\,.$$

Отсюда, учитывая равенство $\varphi_3 = 0$, получим

$$\hat{\theta}_\pm\tilde{u} = \theta(\pm x_3)\tilde{u}^\pm(x), \quad \tilde{u}^\pm = \{\tilde{\mathcal{E}}^\pm, \tilde{\mathcal{H}}^\pm\},$$

где $\tilde{\mathcal{E}}^\pm, \tilde{\mathcal{H}}^\pm$ — вектор-функции, бесконечно дифференцируемые в окрестности замкнутого полупространства $\{\pm x_3 > 0\}$ соответственно. Поэтому для оператора $\tilde{\hat{t}}_\pm(\lambda) = \mathcal{F}_{||}^{-1}\,\hat{t}_\pm(\lambda)\,\mathcal{F}_{||}$ получим соотношение

$$\tilde{\hat{t}}_\pm(\lambda)\tilde{g} = -\operatorname{sing}_\mathfrak{S}\tilde{\hat{A}}\,\hat{\theta}_\pm\tilde{u} = -i\operatorname{sing}_\mathfrak{S}\begin{pmatrix} -\operatorname{rot}\theta(\pm x_3)\,\tilde{\mathcal{H}}^\pm(0, p_{||}) \\ \operatorname{rot}\theta(\pm x_3)\,\tilde{\mathcal{E}}^\pm(0, p_{||}) \end{pmatrix} =$$

$$= \pm i\begin{pmatrix} [e_3, \tilde{\mathcal{H}}^\pm(0, p_{||})] \\ -[e_3, \tilde{\mathcal{E}}^\pm(0, p_{||})] \end{pmatrix}\delta(x_3),$$

где e_3 — орт, соответствующий координате x_3.

Обозначим $Q_{||}$ — ортогональный проектор на подпространство, ортогональное орту e_3, и положим

$$\tilde{u}_{||}^{\pm} = \{\tilde{\mathcal{E}}_{||}^{\pm}, \tilde{\mathcal{H}}_{||}^{\pm}\}, \quad \text{где} \quad \tilde{\mathcal{E}}_{||}^{\pm} = Q_{||}\tilde{\mathcal{E}}^{\pm}, \, \tilde{\mathcal{H}}_{||}^{\pm} = Q_{||}\tilde{\mathcal{H}}^{\pm}.$$

Тогда

$$\tilde{\hat{t}}_{\pm}(\lambda)\tilde{g} = \pm i \begin{pmatrix} J\,\tilde{\mathcal{H}}_{||}^{\pm}(0,p_{||}) \\ -J\,\tilde{\mathcal{E}}_{||}^{\pm}(0,p_{||}) \end{pmatrix} \delta(x_3), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Полагая $g_{||} = \varphi_{||}\,\delta(x_3)$, где $\varphi_{||} = \{\varphi_{\mathcal{E}_{||}}, \varphi_{\mathcal{H}_{||}}\}$, получим из соотношения (44), что

$$Q_{||}\hat{R}(\lambda)\, g_{||} = \{\tilde{\mathcal{E}}_{||}, \tilde{\mathcal{H}}_{||}\},$$

где

$$\tilde{\mathcal{E}}_{||} = \frac{1}{\lambda}\,(p_{||}\otimes p_{||} - \lambda^2 I)\,\hat{r}_1(\lambda)\,\delta(x_3)\,\varphi_{\mathcal{E}_{||}} - i\,\mathrm{rot}\,\hat{r}_1(\lambda)\,\delta(x_3)\,\varphi_{\mathcal{H}_{||}},$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{||} = i\,\mathrm{rot}\,\hat{r}_1(\lambda)\,\delta(x_3)\,\varphi_{\mathcal{E}_{||}} + \frac{1}{\lambda}\,(p_{||}\otimes p_{||} - \lambda^2 I)\,\hat{r}_1(\lambda)\,\delta(x_3)\,\varphi_{\mathcal{E}_{||}}.$$

Далее, учитывая равенство

$$Q_{||}\,\mathrm{rot}\,Q_{||} = -\frac{\partial}{\partial x_3}\,JQ_{||}\,,$$

получим, что

$$Q_{||}\,\mathrm{rot}\,\hat{r}_1(\lambda)\delta(x_3)\varphi_{||\mathcal{L}} = -\frac{\partial}{\partial x_3}\hat{r}_1(\lambda)\delta(x_3)J\varphi_{||\mathcal{L}} = -\frac{1}{2}\mathrm{sgn}\,x_3\;J\varphi_{||\mathcal{L}},$$

где $\varphi_{||} = Q_{||}\varphi$, и поэтому

$$\tilde{\mathcal{E}}_{||}^{\pm}(0,p_{||}) = -\frac{i}{2\lambda}\,(p_{||}\otimes p_{||} - \lambda^2 I)\,k(\lambda,p_{||})\,\varphi_{||\mathcal{E}}(p_{||}) \mp \frac{i}{2}\,J\,\varphi_{||\mathcal{H}}(p_{||}),$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_{||}^{\pm}(0,p_{||}) = -\frac{i}{2\lambda}\,(p_{||}\otimes p_{||} - \lambda^2 I)\,k(\lambda,p_{||})\,\varphi_{||\mathcal{H}}(p_{||}) \pm \frac{i}{2}\,J\,\varphi_{||\mathcal{E}}(p_{||}).$$

Отсюда, используя соотношение (45), получим

$$\tilde{\hat{t}}_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \pm b(\lambda) \\ \mp b(\lambda) & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad b(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\,J(p_{||}\otimes p_{||} - \lambda^2 I)\,k(\lambda,p_{||})$$

и

$$\hat{t}_\pm(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & \pm\hat{b}(\lambda) \\ \mp\hat{b}(\lambda) & I \end{pmatrix},$$

$$\hat{b}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} J(\nabla_\| \otimes \nabla_\| - \lambda^2 I)\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{Im}\,\hat{W}(\lambda)\,\hat{W}(\lambda)^{-1}, \quad (46)$$

где

$$\hat{W}(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - \Delta_\|}.$$

Заметим, что имеет место соотношение

$$\hat{b}(\lambda)^2 = -I.$$

Пример 3.7. Рассмотрим двумерный оператор Дирака. Этот оператор действует в пространстве $L_2^2(R^n)$ и задается матрицей

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} mc^2 & \hat{b}_- \\ \hat{b}_+ & -mc^2 \end{pmatrix}, \text{ где } \hat{b}_\pm = c\left(\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1\right) \pm i\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2} - a_2\right)\right).$$

Мы будем предполагать, что векторный потенциал магнитного поля $a = \{a_1, a_2\}$ постоянен. Пусть граница $\mathfrak{S}$ является гладкой поверхностью, задаваемой уравнением $F = 0$, где F — дифференцируемая функция и $u = \{u_1, u_2\}$ — дифференцируемая 2-мерная вектор-функция. Тогда след от действия оператора $\hat{A}$ на вектор-функцию u имеет вид

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{S}} u = c\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial F}{\partial x_1} - \dfrac{\partial F}{\partial x_2} \\ \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix} u\,\delta(F).$$

Для резольвенты $\hat{R}(\lambda)$ оператора $\hat{A}$ имеет место выражение

$$\hat{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda + mc^2)\,\hat{r}(\lambda) & \hat{b}_- \\ \hat{b}_+ & (\lambda - mc^2)\,\hat{r}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (47)$$

где

$$\hat{r}(\lambda) = \left(\lambda^2 - m^2c^4 + c^2\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - ia_1\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - ia_2\right)^2\right)\right)^{-1}. \quad (48)$$

Вычислим операторы $\hat{t}_\pm(\lambda)$ в случае плоской границы $\mathfrak{S} = \{x, (\nu, x) = 0\}$, где $\nu = \{\cos\theta, \sin\theta\}$ — вектор нормали к граничной прямой $\mathfrak{S}$. Используя преобразование Фурье, можно показать, что обобщенная вектор-функция g принадлежит пространству $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ в том и только в том случае, когда она имеет вид

$$g = \varphi(x_{||})\,\delta(x_\perp),$$

где $x_\perp = (\nu, x), x_{||} = -(J\nu, x), \varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$.

Обозначим $u = \hat{R}(\lambda)g$. Пусть обобщенные вектор-функции $\tilde{u}(p_{||}, x_\perp)$, $\tilde{g}(p_{||}, x_\perp)$ получены преобразованием Фурье $\mathcal{F}_{||}$ по переменной $x_{||}$ из вектор-функций u и g:

$$\tilde{u}(p_{||}, x_\perp) = \int u(x_\perp, x_{||})\, e^{-ix_{||}p_{||}}\, dx_\perp$$

и функция φ принадлежит пространству основных функций Шварца.

Переходя к переменным $x_\perp$, $x_{||}$, получим соотношения

$$\hat{r}(\lambda) = \left(\lambda^2 - m^2c^4 + c^2\left(\frac{\partial}{\partial x_\perp} - ia_\perp\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial}{\partial x_{||}} - ia_{||}\right)^2\right)^{-1}$$

и

$$\hat{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + mc^2 & \hat{q}_- \\ \hat{q}_+ & \lambda - mc^2 \end{pmatrix} \hat{r}(\lambda), \quad (49)$$

где $\hat{q}_\pm = -c\left(ie^{\pm i\theta}\dfrac{\partial}{\partial x_\perp} \mp e^{\pm i\theta}\dfrac{\partial}{\partial x_{||}} + \bar{\alpha}\right)$, $\alpha = a_1 + ia_2$.

Обозначая $\mathcal{F}_{||}$ — преобразование Фурье по переменной $x_{||}$, получим из соотношения (38) соотношение для оператора $\hat{r}_1(\lambda) = \mathcal{F}_{||}^{-1}\,\hat{r}(\lambda)\,\mathcal{F}_{||}$:

$$\hat{r}_1(\lambda) = \left(\lambda^2 - m^2c^4 - c^2(p_{||} - a_{||})^2 + c^2\left(\frac{\partial}{\partial x_\perp} - ia_\perp\right)^2\right)^{-1}$$

и равенства

$$[\hat{r}_1(\lambda)\,\tilde{g}](p_{||}, x_\perp) = -\frac{i}{2c^2}\,k(\lambda, p_{||})e^{i\left(k(\lambda,p_{||})^{-1}\,|x_\perp| + a_\perp x_\perp\right)}\,\varphi(p_{||}),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\perp}\,\hat{r}_1(\lambda)\,\tilde{g}\right](p_{||}, x_\perp) = \frac{1}{2c^2}\left(\operatorname{sgn} x_\perp + a_\perp\,k(\lambda, p_{||})\right)\varphi(p_{||}),$$

где

$$\begin{aligned} k(\lambda, p_{||}) \;&=\; \left(\lambda^2c^{-2} - m^2c^2 - (p_{||} - a_{||})\right)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \operatorname{sgn}\operatorname{Im}\left(\lambda^2c^{-2} - m^2c^2 - (p_{||} - a_{||})^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Положим теперь $\tilde{\hat{t}}_\pm(\lambda) = \mathcal{F}_{||}^{-1}\hat{t}_\pm(\lambda)\mathcal{F}_{||}$. Тогда, учитывая, что

$$[\theta(x_\perp)\,\hat{R}(\lambda)\,\tilde{g}](x_\perp, p_{||}) = \theta(\pm x_\perp)\tilde{u}^\pm(x_\perp, p_{||}),$$

где вектор-функции $\tilde{u}^\pm$ бесконечно дифференцируемы в окрестности замкнутого полупространства $\pm\{x_\perp > 0\}$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{t}}_\pm(\lambda)\tilde{g} \;&=\; -\operatorname{sing}_{\Theta}\tilde{\hat{A}}\,\hat{\theta}_\pm\,\hat{R}(\lambda)\,\tilde{g} = \pm ic\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\tilde{u}^\pm(0, p_{||})\,\delta(x_\perp) = \\ &= \pm ic\begin{pmatrix} e^{-i\theta}\,\tilde{u}_2^\pm(0, p_{||}) \\ e^{i\theta}\tilde{u}_1^\pm(0, p_{||}) \end{pmatrix}\delta(x_\perp), \end{aligned}$$

где вектор-функции $\tilde{u}^\pm(0, p_{||})$ задаются соотношениями

$$\tilde u_1^{\pm}(0,p_{\|}) = -\frac{i}{2c^2}(\lambda+mc^2)\hat k(\lambda)\varphi_1 \mp \frac{i}{2c}e^{-i\theta}\varphi_2 + \\ +\frac{1}{2c}\left(-ie^{-i\theta}a_{\perp}-e^{-i\theta}p_{\|}+i\bar\alpha\right)\hat k(\lambda)\varphi_2,$$

$$\tilde u_2^{\pm}(0,p_{\|}) = \mp\frac{i}{2c}e^{i\theta}\varphi_1 + \frac{1}{2c}\left(-ie^{i\theta}a_{\perp}+e^{i\theta}p_{\|}+i\alpha\right)\hat k(\lambda)\varphi_1 - \\ -\frac{i}{2c^2}(\lambda-mc^2)\hat k(\lambda)\varphi_2,$$

$\hat k(\lambda)$ — оператор с символом $k(\lambda,p_{\|})$.

Отсюда, учитывая равенства

$$e^{i\theta}\bar\alpha = a_{\perp} - ia_{\|}, \quad e^{-i\theta}\alpha = a_{\perp} + ia_{\|},$$

получим соотношения

$$\hat t_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2}I \pm \frac{1}{2}\hat k(\lambda)\begin{pmatrix} i(p_{\|}-a_{\|}) & \frac{1}{c}e^{-i\theta}(\lambda-mc^2) \\ \frac{1}{c}e^{i\theta}(\lambda+mc^2) & -i(p_{\|}-a_{\|}) \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Пример 3.8. Рассмотрим трехмерный оператор Дирака. Этот оператор действует в пространстве $L_4^2(R^n)$ и задается матрицей

$$\hat A = \begin{pmatrix} mc^2 & cM(\frac{1}{i}\nabla - a) \\ M(\frac{1}{i}\nabla - a) & -mc^2 \end{pmatrix},$$

где для произвольного 3-х мерного вектора $v = \{v_1, v_2, v_3\}$ матрица $M(v)$ определена равенством

$$M(v) = \begin{pmatrix} v_3 & v_1 - iv_2 \\ v_1 + iv_2 & -v_3 \end{pmatrix}.$$

Мы будем предполагать, что векторный потенциал магнитного поля $a = \{a_1, a_2, a_3\}$ постоянен. Пусть граница $\mathfrak{S}$ является гладкой поверхностью, задаваемой уравнением $F = 0$, где F — дифференцируемая функция и u — дифференцируемая 4-х мерная вектор-функция. Тогда след от действия оператора $\hat{A}$ на вектор-функцию u имеет вид

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{S}} u = -i \begin{pmatrix} 0 & M(\nabla F) \\ M(\nabla F) & 0 \end{pmatrix} u\,\delta(F).$$

Очевидно, имеют место равенства

$$(\lambda I - \hat{A})^{-1} = \left((\lambda^2 - m^2c^4)I - c^2 M\left(\frac{1}{i}\nabla - a\right)^2\right)^{-1} \times$$

$$\times I \begin{pmatrix} (\lambda - mc^2)I & -cM\left(\frac{1}{i}\nabla - a\right) \\ -cM\left(\frac{1}{i}\nabla - a\right) & (\lambda - mc^2)I \end{pmatrix}$$

и

$$M\left(\frac{1}{i}\nabla - a\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - a_1\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2} - a_2\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_3} - a_3\right)^2\right) I.$$

Отсюда следует формула для резольвенты

$$\hat{R}(\lambda) = \hat{r}(\lambda) \begin{pmatrix} (\lambda + mc^2)\,I & cM\left(\frac{1}{i}\nabla - a\right) \\ cM\left(\frac{1}{i}\nabla - a\right) & (\lambda - mc^2)\,I \end{pmatrix}, \qquad (51)$$

где

$$\hat{r}(\lambda) = \left(\lambda^2 - m^2c^4 + c^2\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - ia_1\right)^2 + \right.$$

$$\left. + c^2\left(\frac{\partial}{\partial x_2} - ia_2\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - ia_3\right)^2\right)^{-1}. \qquad (52)$$

Вычислим операторы $\hat{t}_\pm(\lambda)$ в случае плоской границы $\mathfrak{S} = \{x, (\nu, x) = 0\}$, где ν — вектор нормали к граничной плоскости $\mathfrak{S}$. Используя преобразование Фурье, можно показать, что обобщенная вектор-функция g принадлежит пространству $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ в том и только в том случае, когда она имеет вид

$$g(x) = \varphi(x_{||})\delta(x_\perp),$$

где

$$x_\perp = (\nu, x), \quad x_{||} = x - (\nu, x)\nu$$

и φ — 4-х мерная вектор-функция на $\mathfrak{S}$.

Обозначим $u = \hat{R}(\lambda)g$. Пусть обобщенные вектор-функции $\tilde{u}(p_{||}, x_\perp)$, $\tilde{g}(p_{||}, x_\perp)$ получены преобразованием Фурье $\mathcal{F}_{||}$ по переменной $x_{||}$ из вектор-функций u и g:

$$\tilde{u}(p_{||}, x_\perp) = \int u(x_\perp, x_{||})\, e^{-i(x_{||}, p_{||})}\, dx_{||}$$

и вектор-функция φ принадлежит пространству основных вектор-функций Шварца.

Обозначим

$$a_\perp = (\nu, a), \quad a_{||} = a - (\nu, a)\nu.$$

Для оператора $\hat{A}_1 = \mathcal{F}_{||}^{-1}\, \hat{A}\mathcal{F}_{||}$ имеет место равенство

$$\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} mc^2 & \hat{q} \\ \hat{q} & mc^2 \end{pmatrix}, \text{ где } \hat{q} = -ic\, M(\nu)\, \frac{\partial}{\partial x_\perp} + c\, M(p_{||} - a)$$

Получим из соотношения (38) соотношение для оператора $\hat{r}_1(\lambda) = \mathcal{F}_{||}^{-1}\hat{r}(\lambda)\mathcal{F}_{||}$:

$$\hat{r}_1(\lambda) = \left(\lambda^2 - m^2c^4 - c^2(p_{||} - a_{||})^2 + c^2\left(\frac{\partial}{\partial x_\perp} - ia_\perp\right)^2\right)^{-1}$$

и равенства

$$[\hat{r}_1(\lambda)\,\tilde{g}](p_{||},x_\perp) = -\frac{i}{2c^2}\,k(\lambda,p_{||})\,e^{i(k(\lambda,p_{||})^{-1}\,|x_\perp|+a_\perp\,x_\perp)}\,\varphi(p_{||}),$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_\perp}\hat{r}_1(\lambda)\,\tilde{g}\right](p_{||},x_\perp) =$$
$$= \frac{1}{2c^2}\Big(\operatorname{sgn} x_\perp + a_\perp k(\lambda,p_{||})\Big)e^{i\left(k(\lambda,p_{||})^{-1}\,|x_\perp|+a_\perp\,x_\perp\right)}\,\varphi(p_{||}),$$

где

$$\begin{aligned} k(\lambda,p_{||}) \;&=\; \left(\lambda^2c^{-2}-m^2c^2-|p_{||}-a_{||}|^2\right)^{-\frac{1}{2}}\times \\ &\times\operatorname{sgn}\operatorname{Im}\left(\lambda^2c^{-2}-m^2c^2-|p_{||}-a_{||}|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, для оператора $\hat{R}_1(\lambda)$ получим выражение

$$\hat{R}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda+mc^2)\,I & \hat{q} \\ \hat{q} & (\lambda-mc^2)\,I \end{pmatrix}\hat{r}_1(\lambda),$$

используя которое получим равенства

$$\begin{aligned} \tilde{u}(p_{||},x_\perp) = -\frac{i}{2c^2}\,k(\lambda,p_{||})\,e^{i\left(k(\lambda,p_{||})^{-1}\,|x_\perp|+a_\perp x_\perp\right)}\times \\ \times\begin{pmatrix} (\lambda+mc^2)\,I & c\,M(p_{||}-a) \\ c\,M(p_{||}-a) & (\lambda-mc^2)\,I \end{pmatrix}\varphi(p_{||}) - \\ -\frac{1}{2c}\Big(\operatorname{sgn} x_\perp + a_\perp k(\lambda,p_{||})\Big)e^{i\left(k(\lambda,p_{||})^{-1}\,|x_\perp|+a_\perp x_\perp\right)}\times \\ \times\begin{pmatrix} 0 & M(\nu) \\ M(\nu) & 0 \end{pmatrix}\varphi(p_{||}). \end{aligned}$$

Следовательно, имеют место равенства

$$[\theta(x_\perp)\,\hat{R}(\lambda)\,\tilde{g}](x_\perp,p_{||}) = \theta(\pm x_\perp)\,\tilde{u}^{\pm}(x_\perp,p_{||}),$$

где вектор-функции $\tilde{u}^{\pm}$ бесконечно дифференцируемы в окрестности замкнутого полупространства $\{\pm x_{\perp} > 0\}$.

Положим теперь $\tilde{\hat{t}}_{\pm}(\lambda) = \mathcal{F}_{||}^{-1}\,\hat{t}_{\pm}(\lambda)\,\mathcal{F}_{||}$. Тогда имеют место равенства

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{t}}_{\pm}(\lambda)\,\tilde{g} &= -\mathrm{sing}_{\mathfrak{S}}\,\tilde{\hat{A}}\,\theta(\pm x_{\perp})\,\hat{R}(\lambda)\,\tilde{g} = \\ &= \pm ic \begin{pmatrix} 0 & M(\nu) \\ M(\nu) & 0 \end{pmatrix} \tilde{u}^{\pm}(0,p_{||})\,\delta(x_{\perp}). \end{aligned}$$

А так как

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{\pm}(0,p_{||}) &= -\frac{i}{2c^2}\,k(\lambda,p_{||}) \begin{pmatrix} (\lambda+mc^2)\,I & c\,M(p_{||}-a) \\ c\,M(p_{||}-a) & (\lambda-mc^2)\,I \end{pmatrix} \varphi - \\ &\quad -\frac{i}{2c}\Big(\pm 1 + a_{\perp}k(\lambda,p_{||})\Big) \begin{pmatrix} 0 & M(\nu) \\ M(\nu) & 0 \end{pmatrix} \varphi, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{t}}_{\pm}(\lambda)\tilde{g} &= \pm\frac{1}{2c}\,k(\lambda,p_{||}) \begin{pmatrix} c\,M(\nu)\,M(p_{||}-a) & (\lambda-mc^2)\,M(\nu) \\ (\lambda+mc^2)\,M(\nu) & c\,M(\nu)\,M(p_{||}-a) \end{pmatrix} \varphi + \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(1 \pm a_{\perp}k(\lambda,p_{||})\Big)\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда, используя соотношение

$$M(\nu)\,M(v) = M([\nu,v]) + (\nu,v)\,I,$$

получим

$$\hat{t}_{\pm}(\lambda) = \frac{1}{2}I \pm \frac{1}{2}\,\hat{k}(\lambda) \begin{pmatrix} \hat{M}([\nu,p_{||}-a_{||}]) & \frac{1}{c}(\lambda-mc^2)M(\nu) \\ \frac{1}{c}(\lambda+mc^2)M(\nu) & \hat{M}([\nu,p_{||}-a_{||}]) \end{pmatrix},$$

где $\hat{k}(\lambda)$, $\hat{M}(p_{||}-a_{||})$ — операторы, отвечающие символам $k(\lambda)$, $M(p_{||}-a_{||})$ соответственно.

4. СЛЕДЫ И РАЗЛОЖЕНИЕ ФОН НЕЙМАНА

В этом разделе мы будем предполагать, что $\hat{A}$ — линейный самосопряженный дифференциальный оператор в пространстве $L_2^k(R^n)$ с областью определения $\mathcal{D}(\hat{A})$. Заметим, что из замкнутости оператора $\hat{A}$ в пространстве $L_2^k(R^n)$ и его непрерывности в топологии пространства $\mathcal{S}'^k(R^n)$ следует, что

$$\mathcal{D}(\hat{A}) = \{u : u \in L_2^k(R^n),\ \hat{A}u \in L_2^k(R^n)\}.$$

Обозначим $\hat{A}_0$ — ограничение оператора $\hat{A}$ на область определения $\mathcal{D}(\hat{A}_0) = \mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$.

В силу непрерывности оператора $\hat{A}$ в пространстве $\mathcal{S}'^k(R^n)$ область определения $\mathcal{D}(\hat{A}_0^*)$ оператора $\hat{A}_0^*$, сопряженного к оператору $\hat{A}_0$, совпадает с пространством $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$, и этот сопряженный оператор задается соотношением

$$\hat{A}_0^* u = \pi_{\mathfrak{S}} \hat{A} u. \tag{53}$$

Обозначим $\hat{A}_0^c$ — замыкание оператора $\hat{A}_0$ в пространстве $L_2^k(R^n)$ и $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$ — область определения этого замыкания.

Для произвольного λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ обозначим $\mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0)$ — дефектное пространство оператора $\hat{A}_0$, то есть ортогональное дополнение в $L_2^k(R^n)$ к образу области $\mathcal{D}(\hat{A}_0)$ относительно оператора $\lambda I - \hat{A}$.

Предложение 4.1. *Для того, чтобы вектор-функция u принадлежала области определения $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$ замыкания $\hat{A}_0^c$, необходимо, чтобы для любого λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ существовала вектор-функция v_λ, ортогональная к дефектному пространству $\mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0)$ такая, что $u = \hat{R}(\lambda)v_\lambda$, и достаточно, чтобы такая вектор-функция v_λ существовала хотя бы для одного λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$.*

Доказательство. Если вектор-функция u принадлежит области определения $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$ замыкания $\hat{A}_0^c$, то существует последовательность u_s элементов из $\mathcal{D}(\hat{A}_0)$ такая, что имеют место равенства

$$u = \lim_s u_s, \quad \lim_s \hat{A}u_s = \hat{A}u.$$

По определению дефектного пространства $\mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0)$ вектор-функции $v_{\lambda s} = (\lambda I - \hat{A})u_s$ ортогональны этому подпространству, а значит для любого λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ вектор-функция $v_\lambda = \lambda u - \hat{A}u$ также ортогональна ему и $u = \hat{R}(\lambda)v_\lambda$.

Если же для некоторого λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ вектор-функция u представима в виде $u = \hat{R}(\lambda)v_\lambda$, где вектор-функция v_λ ортогональна дефектному пространству $\mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0)$, то существует последовательность вектор-функций $\{u_s\}$ из пространства $\mathcal{D}(\hat{A}_0)$ такая, что последовательность $\{(\lambda I - \hat{A})u_s\}$ сходится к v_λ. Но из непрерывности оператора $\hat{R}(\lambda)$ следует тогда, что последовательность $\{u_s\}$ сходится к вектор-функции u. В силу замкнутости оператора $\hat{A}_0^c$ отсюда следует принадлежность u области $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$. Предложение доказано.

Предложение 4.2. *Пространство $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$ инвариантно относительно действия операторов $\hat{\theta}_\pm$.*

Доказательство. Пусть вектор-функция u принадлежит $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$, тогда найдется последовательность $\{\varphi_k\}$ из $\mathcal{D}(\hat{A}_0)$, сходящаяся к u в пространстве $\mathcal{D}_\lambda(\hat{A})$ при любом λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$. Но сходимость в пространстве $\mathcal{D}_\lambda(\hat{A})$ — это сходимость по норме графика оператора $\hat{A}$, и поэтому последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится к u в пространстве $L_2^k(R^n)$, а последовательность $\{\hat{A}\varphi_k\}$ сходится к $\hat{A}u$ в том же пространстве. Учитывая непрерывность операторов $\hat{\theta}_\pm$ в пространстве $L_2^k(R^n)$, получим отсюда, что последовательности $\{\hat{\theta}_\pm\varphi_k\}$ сходятся к элементам $\hat{\theta}_\pm u$ соответственно и, ввиду равенств

$$\hat{A}\hat{\theta}_\pm\varphi_k = \hat{\theta}_\pm\hat{A}\varphi_k,$$

последовательности $\{\hat{A}\hat{\theta}_\pm\varphi_k\}$ сходятся к элементам $\hat{\theta}_\pm\hat{A}u$, а значит эти элементы принадлежат области определения $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$ замыкания $\hat{A}_0^c$. Предложение доказано.

Определим операторы

$$\hat{l}_{\pm}(\lambda) = \hat{R}(\lambda)\,\hat{\theta}_{\pm}(\lambda I - \hat{A}), \tag{54}$$

действующие в пространстве $\mathcal{D}_\lambda(\hat{A})$. Они являются ортогональными проекторами в пространстве $\mathcal{D}_\lambda(\hat{A})$, поскольку оператор $\hat{R}(\lambda)$ изометрично отображает пространство $L_2^k(R^n)$ на пространство $\mathcal{D}_\lambda(\hat{A})$, а операторы $\hat{\theta}_{\pm}$ являются ортогональными проекторами в пространстве $L_2^k(R^n)$. Так как оператор $\hat{A}$ является дифференциальным, то из инвариантности пространства $\mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$ относительно действия операторов $\hat{\theta}_{\pm}$ следует, что ограничения операторов $\hat{l}_{\pm}(\lambda)$ на пространство $\mathcal{D}(\hat{A}_0) = \mathcal{S}^k(R^n|\mathfrak{S})$ совпадают с операторами $\hat{\theta}_{\pm}$ соответственно.

Обозначим $\hat{P}_\lambda$ — оператор проектирования в пространстве $L_2^k(R^n)$ на дефектное пространство $\mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0)$.

Предложение 4.3. *Справедливы следующие утверждения:*
1. ограничение оператора $\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}$ *на область* $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$ *равно нулю;*
2. для произвольного λ *из резольвентного множества оператора* $\hat{A}$ *и произвольной вектор-функции* u *из пространства* $L_2^k(R^n)$ *выполняется соотношение*

$$\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)u = \mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)\,\hat{P}_\lambda u. \tag{55}$$

Доказательство. Если вектор-функция u принадлежит области $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$, то в силу инвариантности этой области относительно действия операторов $\hat{\theta}_{\pm}$ получим равенства

$$\mathrm{Tr}_{+}^{\mathfrak{S}} u = \mathrm{sing}_{\mathfrak{S}} \hat{A}\hat{\theta}_{+} u = 0,$$

доказывающие утверждение 1.

Справедливость утверждения 2 следует из того, что для произвольной вектор-функции u из области $\mathcal{D}(\hat{A})$ выполняется соотношение

$$\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)(u - \hat{P}_\lambda u) = 0,$$

поскольку вектор-функция $\hat{R}(\lambda)(u - \hat{P}_\lambda u)$ принадлежит области $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$ в соответствии с Предложением 4.1. Предложение доказано.

По теореме фон Неймана для произвольного элемента u из области определения сопряженного оператора $\mathcal{D}(\hat{A}_0^*)$ имеет место представление в виде суммы

$$u = u_0 + v_\lambda + v_{\bar{\lambda}}, \tag{56}$$

где u_0, v_λ, $v_{\bar{\lambda}}$ — однозначно определенные элементы пространств $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$, $\mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0)$, $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0)$ соответственно. В силу Предложения 1.3 это разложение для произвольной обобщенной вектор-функции u из $\mathcal{D}(\hat{A}_0^*)$ имеет вид

$$u = u_0 + \hat{R}(\bar{\lambda})\, g_\lambda + \hat{R}(\lambda)\, g_{\bar{\lambda}}, \tag{57}$$

где g_λ, $g_{\bar{\lambda}}$ — однозначно определенные обобщенные вектор-функции из пространства $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$.

В этом разделе мы получим связь обобщенных вектор-функций g_λ, $g_{\bar{\lambda}}$ со следами вектор-функции u.

Для произвольного λ резольвентного множества оператора $\hat{A}$ определим оператор $\hat{f}(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$, полагая

$$\hat{f}(\lambda) = \pm\Big(\hat{t}_\pm(\lambda) - \hat{t}_\pm(\bar{\lambda})\Big). \tag{58}$$

Правая часть этого равенства не зависит от выбора знака $\pm$ в силу соотношения (10). Оператор $\hat{f}(\lambda)$ самосопряжен в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ поскольку ортогональные проекторы $\hat{t}_\pm(\lambda)$, $\hat{t}_\pm(\bar{\lambda})$ являются самосопряженными операторами в пространствах $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ и $\mathcal{B}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ соответственно, а скалярные произведения в этих пространствах, а значит и сами пространства совпадают. Действительно, для произвольных обобщенных вектор-функций g, h из пространства имеют место равенства

$$\begin{aligned}
(g,h)_{\mathcal{B}_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})} &= \Big(\Big(\hat{R}(\lambda)g_1, \hat{R}(\lambda)g_2\Big)_{L_2^k(R^n)} = \\
&= \Big((\bar{\lambda}I - \hat{A})\,\hat{R}(\bar{\lambda})\,\hat{R}(\lambda)g_1, (\bar{\lambda}I - \hat{A})\,\hat{R}(\bar{\lambda})\,\hat{R}(\lambda)g_2\Big)_{L_2^k(R^n)} = \\
&= \Big(\hat{R}(\bar{\lambda})g_1, \hat{R}(\bar{\lambda})(\lambda I - \hat{A})(\bar{\lambda}I - \hat{A})\,\hat{R}(\bar{\lambda})\,\hat{R}(\lambda)g_2\Big)_{L_2^k(R^n)} = \\
&= (g,h)_{\mathcal{B}_{\bar{\lambda}}(\hat{A},\mathfrak{S})}.
\end{aligned}$$

Теорема 4.1. *Для любого λ из резольвентного множества оператора $\hat{A}$ справедливы следующие утверждения:*

1. имеет место равенство операторов в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$:

$$\hat{f}(\lambda) = 2i \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}} \hat{R}(\lambda) \hat{R}(\bar{\lambda}), \tag{59}$$

и равенство операторов из пространства $\mathcal{D}(\hat{A})$ в пространство $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$:

$$\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}} = \frac{1}{2i \operatorname{Im} \lambda} \hat{f}(\lambda)(\bar{\lambda} I - \hat{A}) \hat{P}_\lambda(\lambda I - \hat{A}); \tag{60}$$

2. образы операторов $\hat{f}(\lambda)$ и $\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}$ совпадают;

3. оператор $\hat{f}(\lambda)$ обратим тогда и только тогда, когда образ пространства $\mathcal{D}(\hat{A})$ относительно оператора вычисления следа $\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}$ всюду плотен в пространстве $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$, причем оператор $\hat{f}(\lambda)^{-1}$ непрерывен тогда и только тогда, когда оператор $\operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}}$ отображает пространство $\mathcal{D}(\hat{A})$ на пространство $\mathcal{B}(\hat{A}, \mathfrak{S})$;

4. если оператор $\hat{f}(\lambda)$ непрерывно обратим, то для обобщенных вектор-функций g_λ, $g_{\bar{\lambda}}$ из разложения фон Неймана (57) *имеют место соотношения*

$$g_\lambda = \left(\hat{t}_+(\bar{\lambda}) - \hat{t}_-(\bar{\lambda})\right) \hat{f}(\lambda)^{-1} \left(\hat{t}_-(\lambda) \operatorname{Tr}_+^{\mathfrak{S}} u + \hat{t}_+(\lambda) \operatorname{Tr}_-^{\mathfrak{S}} u\right),$$

$$g_{\bar{\lambda}} = -\left(\hat{t}_+(\lambda) - \hat{t}_-(\lambda)\right) \hat{f}(\lambda)^{-1} \left(\hat{t}_-(\bar{\lambda}) \operatorname{Tr}_+^{\mathfrak{S}} u + \hat{t}_+(\bar{\lambda}) \operatorname{Tr}_-^{\mathfrak{S}} u\right). \tag{61}$$

Доказательство. Докажем утверждение 1.

Соотношение (59) следует из тождества Гильберта для резольвент:

$$\hat{f}(\lambda) g = \mp \operatorname{Tr}_\pm^{\mathfrak{S}} \left(\hat{R}(\lambda) - \hat{R}(\bar{\lambda})\right) g = 2i \operatorname{Im} \lambda \operatorname{Tr}^{\mathfrak{S}} \hat{R}(\lambda) \hat{R}(\bar{\lambda}) g.$$

Соотношение (60) следует из приводимой ниже цепочки равенств, имеющих место в силу тождества Гильберта для резольвент и соотношений (55), (59). Действительно, полагая $v_\lambda =$

$= (\lambda I - \hat{A})u$ и $g_\lambda = (\bar{\lambda} I - \hat{A})\hat{P}_\lambda v_\lambda$ для произвольной вектор-функции u из области $\mathcal{D}(A)$, получим

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}} u &= \mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}} \hat{R}(\lambda)\hat{P}_\lambda v_\lambda = \mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}} \hat{R}(\lambda)\,\hat{R}(\bar{\lambda}) g_\lambda = \\ &= \frac{1}{2i\,\mathrm{Im}\,\lambda}\,\hat{f}(\lambda) g_\lambda = \frac{1}{2i\,\mathrm{Im}\,\lambda}\,\hat{f}(\lambda)(\bar{\lambda} I - \hat{A})\hat{P}_\lambda v_\lambda. \end{aligned}$$

Утверждение 1 доказано.

Заметим теперь, что из соотношения (59) следует, что образ оператора $\hat{f}(\lambda)$ лежит в образе оператора $\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}$, а из соотношения (60) следует противоположное включение. Отсюда и следует утверждение 2. Из самосопряженности оператора $\hat{f}(\lambda)$ следует, что его ядро и ортогональное дополнение к образу совпадают. Поэтому из утверждения 2 следует утверждение 3.

Докажем теперь соотношения (61). Применяя операции вычисления следов к разложению фон Неймана (57), получим соотношения

$$\begin{aligned} \hat{t}_+(\bar{\lambda}) g_\lambda + \hat{t}_+(\lambda) g_{\bar{\lambda}} &= -\mathrm{Tr}_+^{\mathfrak{S}} u, \\ \hat{t}_-(\bar{\lambda}) g_\lambda + \hat{t}_-(\lambda) g_{\bar{\lambda}} &= -\mathrm{Tr}_-^{\mathfrak{S}} u. \end{aligned} \tag{62}$$

Умножая эти равенства на операторы $\hat{t}_\mp(\lambda)$ соответственно и складывая результаты умножения, получим соотношение

$$\hat{a} g_\lambda = -\left(\hat{t}_-(\lambda)\,\mathrm{Tr}_+^{\mathfrak{S}} u + \hat{t}_+(\lambda)\,\mathrm{Tr}_-^{\mathfrak{S}} u\right), \tag{63}$$

где

$$\hat{a} = \hat{t}_-(\lambda)\,\hat{t}_+(\bar{\lambda}) + \hat{t}_+(\lambda)\,\hat{t}_-(\bar{\lambda}) = \hat{f}(\lambda)\left(\hat{t}_-(\bar{\lambda}) - \hat{t}_+(\bar{\lambda})\right).$$

Используя равенство

$$\left(\hat{t}_-(\bar{\lambda}) - \hat{t}_+(\bar{\lambda})\right)^{-1} = \hat{t}_-(\bar{\lambda}) - \hat{t}_+(\bar{\lambda}),$$

получим равенство

$$\hat{a}^{-1} = \left(\hat{t}_-(\bar{\lambda}) - \hat{t}_+(\bar{\lambda})\right)\hat{f}(\lambda)^{-1}.$$

Подставляя это равенство в соотношение (63), получим соотношения (61). Теорема доказана.

Замечание 4.1. *Из соотношений* (62) *следует, что разложение фон Неймана для произвольной вектор-функции и из области определения $\mathcal{D}(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$ имеет вид*

$$u = u_0 + \hat{R}(\bar{\lambda})g - \hat{R}(\lambda)g.$$

Отсюда, используя определение операторов $\hat{t}_{\pm}(\lambda)$ и Предложение 4.2, *получим соотношения*

$$\begin{aligned} \hat{l}_{\pm}(\lambda)u &= \hat{\theta}_{\pm}u_0 - 2i\,\mathrm{Im}\,\lambda\,\hat{R}(\lambda)\,\hat{\theta}_{\pm}\,\hat{R}(\bar{\lambda})g = \\ &= \hat{\theta}_{\pm}u_0 + \hat{R}(\lambda)\,\hat{t}_{\pm}(\bar{\lambda})g - \hat{R}(\bar{\lambda})\,\hat{t}_{\pm}(\bar{\lambda})g. \end{aligned} \tag{64}$$

5. СЛЕДЫ И РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Расширение $\hat{A}_{\hat{\gamma}}$ оператора $\hat{A}_0^c$, отвечающее оператору трансмиссии $\hat{\gamma}$, мы определили соотношением

$$\hat{A}_{\hat{\gamma}}u = \pi_{\mathfrak{S}}\hat{A}u$$

на области определения $\mathcal{D}(\hat{A}_{\hat{\gamma}})$, состоящей из всех вектор-функций из пространства $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$, удовлетворяющих условию трансмиссии (14). Мы покажем, что этот оператор может быть построен с помощью конструкции фон Неймана для расширений симметрического оператора, а его резольвента совпадает с оператором $\hat{R}_{\hat{\gamma}}(\lambda)$, определенным соотношением (16).

Определение 5.1. *Для произвольного невещественного λ будем называть линейный оператор $\hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}$ с областью определения*

$$\mathcal{D}\left(\hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}\right) = \{u : u = u_0 - \hat{V}(\lambda)v_\lambda + v_\lambda,\ u_0 \in \mathcal{D}(\hat{A}_0^c),\ v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0)\},$$

заданный соотношением

$$\hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}u = \hat{A}u_0 - \lambda\hat{V}(\lambda)v_\lambda + \bar{\lambda}v_\lambda, \tag{65}$$

расширением по фон Нейману оператора $\hat{A}_0^c$ с помощью линейного непрерывного оператора

$$\hat{V}(\lambda) : \mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0) \longrightarrow \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0).$$

Предложение 5.1. *Пусть линейный оператор $\hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}$ является расширением по фон Нейману линейного симметрического оператора $\hat{A}$ с помощью линейного непрерывного оператора*

$$\hat{V}(\lambda) : \mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0) \longrightarrow \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0).$$

Тогда сопряженный к нему оператор $\hat{A}^*_{\hat{V}(\lambda)}$ является расширением по фон Нейману линейного симметрического оператора $\hat{A}$ с помощью оператора $\hat{V}(\lambda)^*$, сопряженного к оператору $\hat{V}(\lambda)$.

Доказательство. В силу определения сопряженного оператора элемент u гильбертова пространства принадлежит области определения сопряженного оператора тогда и только тогда, когда существует элемент u^* из пространства $L_2^k(R^n)$ такой, что для произвольного элемента w из $\mathcal{D}\left(\hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}\right)$ выполняется равенство

$$(u, \hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}w) = (u^*, w) \tag{66}$$

и тогда $u^* = \hat{A}^*_{\hat{V}(\lambda)}u$.

Любое расширение по фон Нейману симметрического оператора является частью сопряженного оператора и поэтому имеют место следующие соотношения:

$$u = u_0 + u_\lambda + u_{\bar{\lambda}},$$

$$\hat{A}^*_{\hat{V}(\lambda)}u = \hat{A}u_0 + \bar{\lambda}u_\lambda + \lambda u_{\bar{\lambda}},$$

$$w = w_0 - \hat{V}(\lambda)w_\lambda + w_\lambda,$$

где элементы u_0, w_0 принадлежат $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$, элементы u_λ, w_λ принадлежат $\mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0)$, а элемент $u_{\bar{\lambda}}$ принадлежит $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0)$.

Поэтому из соотношения (66) следует равенство

$$(u_0 + u_\lambda + u_{\bar{\lambda}}, \hat{A}w_0 + \bar{\lambda}w_\lambda - \lambda\hat{V}(\lambda)w_\lambda) =$$
$$= (\hat{A}u_0 + \bar{\lambda}u_\lambda + \lambda u_{\bar{\lambda}}, w_0 + w_\lambda - \hat{V}(\lambda)w_\lambda).$$

Полагая $u_0 = w_0 = 0$ и учитывая невещественность λ, получим равенство

$$(u_\lambda, w_\lambda) = (u_{\bar{\lambda}}, \hat{V}(\lambda)w_\lambda).$$

Отсюда в силу произвольности элемента w_λ из $\mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0)$ и невещественности λ получим равенство

$$u_\lambda = \hat{V}(\lambda)^* u_{\bar{\lambda}},$$

из которого и следует доказываемое утверждение. Предложение доказано.

Предложение 5.2. *Пусть $\hat{M}$ — линейный, непрерывный оператор в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ и для некоторого невещественного λ оператор $\hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}$ является расширением по фон Нейману оператора $\hat{A}_0^c$ с помощью оператора*

$$\hat{V}(\lambda) : \mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0) \longrightarrow \mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0),$$

определенного соотношением

$$\hat{V}(\lambda) = (\lambda I - \hat{A})^{-1}\hat{M}(\bar{\lambda}I - \hat{A}).$$

Тогда для оператора $\lambda I - \hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}$ существует ограниченный обратный оператор $\left(\lambda I - \hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}\right)^{-1}$, определенный на всем пространстве $L_2^k(R^n)$ и задаваемый равенством

$$\left(\lambda I - \hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}\right)^{-1} = (\lambda I - \hat{A})^{-1} +$$
$$+ \frac{i}{2\,\mathrm{Im}\,\lambda}\{\hat{V}(\lambda) - (\lambda I - \hat{A})^{-1}(\bar{\lambda}I - \hat{A})\}\hat{P}_\lambda. \quad (67)$$

Соотношение (67) *можно представить в другой форме:*

$$\left(\lambda I - \hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}\right)^{-1} = \left(\lambda I - \hat{A}\right)^{-1} + \\ + \frac{i}{2\operatorname{Im}\lambda}\left(\lambda I - \hat{A}\right)^{-1}(\hat{M} - I)(\bar{\lambda}I - \hat{A})\,\hat{P}_\lambda. \qquad (68)$$

Доказательство. Произвольный элемент u из области определения оператора $\hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}$ имеет вид

$$u = u_0 + \left(\bar{\lambda}I - \hat{A}\right)^{-1} g - \left(\lambda I - \hat{A}\right)^{-1} \hat{M} g, \qquad (69)$$

где u_0 принадлежит $\mathcal{D}(\hat{A}_0^c)$, а g — произвольный элемент пространства $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$. Поэтому

$$\hat{A}_{\hat{V}(\lambda)} u = \hat{A} u_0 + \bar{\lambda}\left(\bar{\lambda}I - \hat{A}\right)^{-1} g - \lambda\left(\lambda I - \hat{A}\right)^{-1} \hat{M} g. \qquad (70)$$

Для построения обратного оператора $\left(\lambda I - \hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}\right)^{-1}$ мы должны решить уравнение

$$(\lambda I - \hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}) u = w$$

для произвольного вектора w из области значений оператора $\lambda I - \hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}$.

Из этого уравнения и соотношения (70) следует, что

$$(\lambda I - \hat{A}) u_0 + 2i \operatorname{Im}\lambda\left(\bar{\lambda}I - \hat{A}\right)^{-1} g = w.$$

В этом соотношении вектор w принимает всевозможные значения из пространства $L_2^k(R^3)$, поскольку каждое из двух слагаемых в правой части принимает всевозможные значения из двух ортогональных, взаимно дополняющих друг друга подпространств. Следовательно, область значений оператора $\lambda I - \hat{A}_{\hat{V}(\lambda)}$ совпадает со всем пространством $L_2^k(R^n)$. Применяя к обеим частям уравнения проектор $\hat{P}_\lambda$ на дефектное пространство $\mathcal{N}_\lambda(\hat{A}_0)$, получим новое соотношение:

$$2i \operatorname{Im}\lambda(\bar{\lambda}I - \hat{A})^{-1} g = \hat{P}_\lambda w.$$

Откуда
$$g = \frac{1}{2i\,\mathrm{Im}\,\lambda}\,(\bar\lambda I - \hat A)\,\hat P_\lambda w$$
и
$$u_0 = (\lambda I - \hat A)^{-1}(w - \hat P_\lambda w).$$

Подставляя эти выражения для u_0, g в соотношение (69) и приводя подобные, получим правую часть соотношения (68).

В силу единственности разложения (69), найденные вектора u_0, g, а значит и вектор u определены однозначно, а поэтому обратный оператор $\left(\lambda I - \hat A_{\hat V(\lambda)}\right)^{-1}$ существует и задается соотношением (68), из которого следует ограниченность этого оператора. Предложение доказано.

Для того, чтобы применить это предложение к оператору $\hat A_{\hat\gamma}$, нам нужно будет построить подходящий оператор $\hat V(\lambda)$. Этот оператор, в свою очередь, будет выражен через некоторые операторы в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat A, \mathfrak{S})$.

Теорема 5.1. *Пусть комплексное число λ принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat A$, $\hat\gamma$ — непрерывный линейный оператор в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat A, \mathfrak{S})$ и оператор $\hat B(\lambda, \hat\gamma)$, определенный соотношением* (15) *непрерывно обратим в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat A, \mathfrak{S})$. Тогда оператор $\hat A_{\hat\gamma}$ совпадает с оператором $\hat A_{\hat V(\lambda)}$ для*
$$\hat V(\lambda) = \hat R(\lambda)\,\hat B(\lambda, \hat\gamma)^{-1}\hat B(\bar\lambda, \hat\gamma)(\bar\lambda I - \hat A). \tag{71}$$

Доказательство. Произвольная вектор-функция u из области определения $\mathcal{D}(\hat A_{\hat\gamma})$ оператора $\hat A_{\hat\gamma}$ единственным образом представима в виде суммы
$$u = u_0 + v_\lambda + v_{\bar\lambda},$$
где вектор u_0 принадлежит $\mathcal{D}(\hat A_0^c)$, а вектора v_λ, $v_{\bar\lambda}$ принадлежат дефектным пространствам $\mathcal{N}_\lambda(\hat A_0)$, $\mathcal{N}_{\bar\lambda}(\hat A_0)$ соответственно. Существование этого разложения вытекает из теоремы фон

Неймана, поскольку область определения $\mathcal{D}(\hat{A}_{\hat{\gamma}})$ является по построению частью области определения $\mathcal{D}(\hat{A}_0^*) = \mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$ сопряженного к $\hat{A}_0$ оператора $\hat{A}_0^*$. Поскольку имеют место соотношения

$$v_\lambda = \hat{R}(\bar{\lambda})g_\lambda, \quad v_{\bar{\lambda}} = \hat{R}(\lambda)g_{\bar{\lambda}}$$

для некоторых однозначно определенных обобщенных вектор-функций g_λ, $g_{\bar{\lambda}}$ из пространства $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$, то, вычисляя следы $\mathrm{Tr}_\pm^{\mathfrak{S}}$ и используя условие трансмиссии (14), получим соотношение

$$\hat{t}_+(\bar{\lambda})g_\lambda + \hat{t}_+(\lambda)g_{\bar{\lambda}} = \hat{\gamma}\left(\hat{t}_-(\bar{\lambda})g_\lambda + \hat{t}_-(\lambda)g_{\bar{\lambda}}\right)$$

и соотношение

$$g_{\bar{\lambda}} = -\hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})^{-1}\hat{B}(\bar{\lambda}, \hat{\gamma})g_\lambda,$$

эквивалентное соотношению (71). Следовательно, имеет место включение $\mathcal{D}(\hat{A}_{\hat{\gamma}}) \subset \mathcal{D}(\hat{A}_{\hat{V}(\lambda)})$. Обратное включение следует из того, что произвольная функция u из $\mathcal{D}(\hat{A}_{\hat{V}(\lambda)})$ однозначно представима в виде

$$u = u_0 - \hat{V}(\lambda)v_\lambda + v_\lambda, \;\; u_0 \in \mathcal{D}(\hat{A}_0^c), \;\; v_\lambda = \hat{R}(\bar{\lambda})g_\lambda, \;\; g_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$$

и поэтому имеют место соотношения

$$\mathrm{Tr}_\pm^{\mathfrak{S}} u = -\hat{t}_\pm(\bar{\lambda})g_\lambda + \hat{t}_\pm(\lambda)\,\hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})^{-1}\,\hat{B}(\bar{\lambda}, \hat{\gamma})g_\lambda,$$

из которых следует выполнение условия трансмиссии

$$\mathrm{Tr}_+^{\mathfrak{S}} u = \hat{\gamma}\,\mathrm{Tr}_-^{\mathfrak{S}} u.$$

Теорема доказана.

Предложение 5.3. *Если операторы $\hat{f}(\lambda)$, $\hat{\gamma}$, $\hat{B}(\bar{\lambda}, \hat{\gamma}^*)$ непрерывно обратимы в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$, а оператор $\hat{\gamma}^\#$ определен соотношением*

$$\hat{\gamma}^\# = \hat{f}(\lambda)\hat{\gamma}^{*-1}\,\hat{f}(\lambda)^{-1}, \tag{72}$$

то оператор $\hat{B}(\bar{\lambda}, \hat{\gamma}^{\#})$ *непрерывно обратим в пространстве* $\mathcal{B}_{\lambda}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ *и имеет место равенство*

$$\left(\lambda I - \hat{A}_{\hat{\gamma}}\right)^{-1*} = \left(\bar{\lambda} I - \hat{A}_{\hat{\gamma}^{\#}}\right)^{-1}, \tag{73}$$

а значит оператор $\hat{A}^{*}_{\hat{\gamma}}$, *сопряженный к оператору* $\hat{A}_{\hat{\gamma}}$, *удовлетворяет равенству*

$$\hat{A}^{*}_{\hat{\gamma}} = \hat{A}_{\hat{\gamma}^{\#}}.$$

Доказательство. Имеет место равенство

$$\hat{R}(\lambda)^{\star} = (\lambda I - \hat{A})\hat{P}_{\bar{\lambda}}, \tag{74}$$

где

$$\hat{R}(\lambda)^{\star} : L_2^k(R^n) \longmapsto \mathcal{B}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}, \mathfrak{S})$$

— оператор, сопряженный к ограничению оператора $\hat{R}(\lambda)$, определенного на пространстве обобщенных вектор-функций умеренного роста $\mathcal{S}'^{k}(R^n)$, на пространство $\mathcal{B}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}, \mathfrak{S})$.

Действительно, из цепочки равенств, справедливых для произвольных u и g из пространств $\mathcal{N}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}_0)$, $\mathcal{B}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}, \mathfrak{S})$ соответственно

$$\left(u, \hat{R}(\lambda)g\right)_{L_2^k(R^n)} = \left(\hat{R}(\lambda)^{\star}u, g\right)_{\mathcal{B}_{\bar{\lambda}}(\hat{A}, \mathfrak{S})} =$$
$$= \left(\hat{R}(\lambda)\,\hat{R}(\lambda)^{\star}u, \hat{R}(\lambda)g\right)_{L_2^k(R^n)} = \left(\hat{P}_{\bar{\lambda}}\,\hat{R}(\lambda)\,\hat{R}(\lambda)^{\star}u, \hat{R}(\lambda)g\right)_{L_2^k(R^n)},$$

следует соотношение

$$\hat{P}_{\bar{\lambda}}\,\hat{R}(\lambda)\,\hat{R}(\lambda)^{\star} = \hat{P}_{\bar{\lambda}},$$

эквивалентное соотношению (74).

А так как из соотношения (16) следует равенство

$$\left(\lambda I - \hat{A}_{\hat{\gamma}}\right)^{-1*} = \hat{R}(\bar{\lambda}) + \left(\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)\right)^{*}(I + \hat{\gamma}^{*})\hat{B}(\lambda, \hat{\gamma})^{-1*}\,\hat{R}(\lambda)^{\star}, \tag{75}$$

то, используя соотношение

$$\left(\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)\right)^{*} = -\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)\,\hat{R}(\bar{\lambda})$$

и соотношение (74), получим соотношение

$$(\lambda I - \hat{A}_{\hat{\gamma}})^{-1*} = \hat{R}(\bar{\lambda}) -$$
$$-\hat{R}(\bar{\lambda})\,\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\lambda)\,\hat{R}(\bar{\lambda})\,(I+\hat{\gamma}^*)\,\hat{B}(\lambda,\hat{\gamma})^{-1*}(\lambda I - \hat{A})\hat{P}_{\bar{\lambda}},$$

из которого в силу соотношений (59), (60) получим

$$(\lambda I - \hat{A}_{\hat{\gamma}})^{-1*} = \hat{R}(\bar{\lambda}) +$$
$$+\hat{R}(\bar{\lambda})\,\hat{f}(\lambda)\,(I+\hat{\gamma}^*)\,\hat{B}(\lambda,\hat{\gamma})^{-1*}\hat{f}(\lambda)^{-1}\,\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\bar{\lambda}).$$

Далее из соотношения

$$(I+\hat{\gamma}^*)\left(\hat{t}_+(\lambda) - \hat{t}_-(\lambda)\hat{\gamma}^*\right) = \left(\hat{t}_+(\lambda) - \hat{\gamma}^* t_-(\lambda)\right)(I+\hat{\gamma}^*)$$

следует равенство

$$(I+\hat{\gamma}^*)\hat{B}(\lambda,\hat{\gamma})^{-1*} = \hat{B}(\lambda,\hat{\gamma}^*)^{-1}(I+\hat{\gamma}^*),$$

из которого следует соотношение

$$(\lambda I - \hat{A}_{\hat{\gamma}})^{-1*} = \hat{R}(\bar{\lambda}) + \hat{R}(\bar{\lambda})\,\hat{f}(\lambda)\,\hat{B}(\lambda,\hat{\gamma}^*)^{-1}(I+\hat{\gamma}^*)\hat{f}(\lambda)^{-1}\mathrm{Tr}^{\mathfrak{S}}\,\hat{R}(\bar{\lambda}).$$

Наконец из соотношения

$$-\left(\hat{t}_-(\lambda) - \hat{t}_-(\bar{\lambda})\right)\hat{t}_+(\lambda) = \hat{t}_-(\bar{\lambda})\left(t_+(\lambda) - t_+(\bar{\lambda})\right)$$

следует соотношение

$$\hat{t}_-(\bar{\lambda}) = \hat{f}(\lambda)\,\hat{t}_+(\lambda)\,\hat{f}(\lambda)^{-1}, \tag{76}$$

ипользуя которое получим соотношение (73). Предложение доказано.

Теперь перейдем к рассмотрению операторов, связанных с импедансными краевыми условиями. Расширение $\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}}$ оператора $\hat{A}_0^c$ определено соотношением

$$\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}} u = \pi_{\mathfrak{S}} \hat{A} u$$

на области определения $\mathcal{D}(\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}})$, состоящей из всех вектор-функций из пространства $\mathcal{D}(\hat{A}|\mathfrak{S})$, удовлетворяющих импедансным краевым условиям (21).

Теорема 5.2. *Пусть комплексное число λ принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{A}$, линейные операторы $\hat{\zeta}_+$, $\hat{\zeta}_-$ непрерывны и оператор $\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})$, определенный соотношением* (22), *непрерывно обратим в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})$. Тогда оператор $\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}}$ совпадает с оператором $\hat{A}_{\hat{V}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})}$ для*

$$\hat{V}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta}) = \hat{R}(\lambda)\,\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})^{-1}\,\hat{G}(\bar{\lambda},\hat{\xi},\hat{\zeta})\,(\bar{\lambda}I - \hat{A}). \qquad (77)$$

Доказательство. Докажем утверждение 1. Для произвольной вектор-функции u из области определения сопряженного оператора $\mathcal{D}(\hat{A}_0^*)$ в силу соотношений (62) и импедансных краевых условий (21) имеют место равенства

$$(\hat{\xi}_1 - \hat{\zeta}_+\hat{\xi}_2)\,\hat{t}_+(\bar{\lambda})g_\lambda = -(\hat{\xi}_1 - \hat{\zeta}_+\hat{\xi}_2)\,\hat{t}_+(\lambda)g_{\bar{\lambda}}\,,$$

$$(\hat{\xi}_2 + \hat{\zeta}_-^{-1}\hat{\xi}_1)\,\hat{t}_-(\bar{\lambda})g_\lambda = -(\hat{\xi}_2 + \hat{\zeta}_-^{-1}\hat{\xi}_1)\,\hat{t}_-(\lambda)g_{\bar{\lambda}}\,,$$

эквивалентные равенствам

$$\hat{\xi}_1\hat{G}(\bar{\lambda},\hat{\xi},\hat{\zeta})g_\lambda = -\hat{\xi}_1\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})g_{\bar{\lambda}},$$

$$\hat{\xi}_2\hat{G}(\bar{\lambda},\hat{\xi},\hat{\zeta})g_\lambda = -\hat{\xi}_2\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})g_{\bar{\lambda}},$$

которые в силу соотношения (20) эквивалентны соотношению

$$\hat{G}(\bar{\lambda},\hat{\xi},\hat{\zeta})g_\lambda = -\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})g_{\bar{\lambda}}.$$

Таким образом, доказано равенство

$$g_{\bar{\lambda}} = -\hat{G}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})^{-1}\,\hat{G}(\bar{\lambda},\hat{\xi},\hat{\zeta})g_\lambda,$$

из которого следует включение $\mathcal{D}(\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}}) \subset \mathcal{D}(\hat{A}_{\hat{V}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})})$.

Обратное включение следует из того, что произвольная функция u из $\mathcal{D}(\hat{A}_{\hat{V}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})})$ однозначно представима в виде

$$u = u_0 - \hat{V}(\lambda,\hat{\xi},\hat{\zeta})v_\lambda + v_\lambda,\;\; u_0 \in \mathcal{D}(\hat{A}_0^c),\;\; v_\lambda = \hat{R}(\bar{\lambda})g_\lambda,\;\; g_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})$$

и поэтому имеют место соотношения

$$\mathrm{Tr}_{\pm}^{\mathfrak{S}} u = -\hat{t}_{\pm}(\bar{\lambda}) g_{\lambda} + \hat{t}_{\pm}(\lambda)\, \hat{G}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta})^{-1}\, \hat{G}(\bar{\lambda}, \hat{\xi}, \hat{\zeta}) g_{\lambda},$$

из которых следует выполнение импедансных краевых условий. Теорема доказана.

Предложение 5.4. *Если операторы $\hat{f}(\lambda)$, $\hat{G}(\bar{\lambda}, \hat{\xi}, \hat{\zeta})$ непрерывно обратимы в пространстве $\mathcal{B}_{\lambda}(\hat{A}, \mathfrak{S})$, то имеет место равенство*

$$\hat{A}^{*}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}} = \hat{A}_{\hat{\xi}^{\#},\hat{\zeta}^{\#}}, \tag{78}$$

где

$$\hat{\xi}_1^{\#} = \hat{f}(\lambda)\, \hat{\xi}_2^{*}\, \hat{f}(\lambda)^{-1}, \quad \hat{\xi}_2^{\#} = \hat{f}(\lambda)\, \hat{\xi}_1^{*}\, \hat{f}(\lambda)^{-1}, \tag{79}$$

$$\hat{\zeta}_{\pm}^{\#} = -\hat{f}(\lambda)\, \hat{\zeta}_{\pm}^{*}\, \hat{f}(\lambda)^{-1}. \tag{80}$$

Доказательство. Действительно, если обозначить

$$\hat{a}(\lambda, \zeta, \xi) = \hat{G}(\bar{\lambda}, \hat{\xi}^{\#}, \hat{\zeta}^{\#})\, \hat{G}(\bar{\lambda}, \hat{\xi}, \hat{\zeta})^{*},$$

то из определения (22) следует равенство

$$\begin{aligned} \hat{a}(\lambda, \zeta, \xi) \;\; = \;\; & (\hat{\xi}_1^{\#} - \hat{\zeta}_{+}^{\#} \hat{\xi}_2^{\#})\, \hat{t}_{+}(\lambda)\, (\hat{\xi}_1^{*} - \hat{\xi}_2^{*} \hat{\zeta}_{+}^{*}) + \\ & + (\hat{\xi}_2^{\#} + \hat{\zeta}_{-}^{\#-1} \hat{\xi}_1^{\#})\, \hat{t}_{-}(\lambda)\, (\hat{\xi}_2^{*} + \hat{\xi}_1^{*} \hat{\zeta}_{-}^{*-1}). \end{aligned}$$

Положим

$$\hat{\xi}_1^{\star} = \hat{f}(\lambda)\, \hat{\xi}_2^{*}\, \hat{f}(\lambda)^{-1}, \quad \hat{\xi}_2^{\star} = \hat{f}(\lambda)\, \hat{\xi}_1^{*}\, \hat{f}(\lambda)^{-1}$$

и

$$\hat{\zeta}_{\pm}^{\star} = \hat{f}(\lambda)\, \hat{\zeta}_{\pm}^{\star}\, \hat{f}(\lambda)^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Big(\hat{a}(\lambda) - \hat{a}(\bar{\lambda})\Big) \hat{f}(\lambda)^{-1} \;\; = \;\; & (\hat{\xi}_1^{\#} - \hat{\zeta}_{+}^{\#} \hat{\xi}_2^{\#})(\hat{\xi}_2^{\star} + \hat{\xi}_1^{\star} \hat{\zeta}_{+}^{\star}) - \\ & - (\hat{\xi}_2^{\#} + \hat{\zeta}_{-}^{\#-1} \hat{\xi}_1^{\#})(\hat{\xi}_1^{\star} + \hat{\xi}_2^{\star} \hat{\zeta}_{-}^{\star-1}). \end{aligned}$$

Поэтому, если выбрать операторы $\hat{\xi}_j^{\#}$, $\zeta_{\pm}^{\#}$ в соответствии с соотношениями (79), (80), а именно

$$\hat{\xi}_j^{\#} = \hat{\xi}_j^{\star}, \quad \hat{\zeta}_{\pm}^{\#} = -\hat{\zeta}_{\pm}^{\star},$$

то, учитывая соотношения

$$\hat{\zeta}_{+}^{\#} = \hat{\xi}_1^{\#}\hat{\zeta}_{+}^{\#}\hat{\xi}_2^{\#}, \quad \hat{\zeta}_{-}^{\#} = \hat{\xi}_2^{\#}\hat{\zeta}_{-}^{\#}\hat{\xi}_1^{\#},$$

получим равенство

$$\left(\hat{a}(\lambda) - \hat{a}(\bar{\lambda})\right)\hat{f}(\lambda)^{-1} = -\hat{\zeta}_{+}^{\star}\xi_2^{\star} + \xi_1^{\star}\hat{\zeta}_{+}^{\star} - \hat{\zeta}_{-}^{\star^{-1}}\xi_1^{\star} + \xi_2^{\star}\hat{\zeta}_{-}^{\star^{-1}} = 0.$$

Таким образом, мы доказали равенство

$$\hat{G}(\lambda, \hat{\xi}^{\#}, \hat{\zeta}^{\#})\,\hat{G}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta})^{*} = \hat{G}(\bar{\lambda}, \hat{\xi}^{\#}, \hat{\zeta}^{\#})\,\hat{G}(\bar{\lambda}, \hat{\xi}, \hat{\zeta})^{*},$$

эквивалентное равенству

$$\hat{G}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta})^{*}\,\hat{G}(\bar{\lambda}, \hat{\xi}, \hat{\zeta})^{*^{-1}} = \hat{G}(\lambda, \hat{\xi}^{\#}, \hat{\zeta}^{\#})^{-1}\,\hat{G}(\bar{\lambda}, \hat{\xi}^{\#}, \hat{\zeta}^{\#}),$$

то есть равенству

$$\hat{V}(\lambda, \hat{\xi}, \hat{\zeta})^{*^{-1}} = \hat{V}(\lambda, \hat{\xi}^{\#}, \hat{\zeta}^{\#}).$$

Из последнего равенства в силу Предложения 5.1 следует равенство (78). Предложение доказано.

Теперь продолжим рассмотрение примеров из разд. 3.

Пример 3.1. Очевидно имеет место равенство

$$\hat{f}(\lambda) = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \lambda I.$$

Отсюда, если учесть, что в виду одномерности пространства $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$ имеют место равенства

$$\hat{\gamma} g = \gamma g, \quad \hat{\gamma}^{*} g = \bar{\gamma} g,$$

получим равенство для оператора трансмиссии $\hat{\gamma}^{\#}$:

$$\hat{\gamma}^{\#} g = \bar{\gamma}^{-1} g. \tag{81}$$

Пример 3.2. Найдем теперь оператор трансмиссии $\hat{\gamma}^{\#}$, отвечающий оператору, сопряженному к оператору $\hat{A}_{\hat{\gamma}}$. Сначала найдем оператор $\hat{\gamma}^*$, сопряженный к оператору $\hat{\gamma}$ в пространстве $\mathcal{B}_\lambda(\hat{A}, \mathfrak{S})$.

Обозначая $\bar{\hat{\gamma}}^T$ — матрицу, эрмитово-сопряженную к матрице $\hat{\gamma}$, получим равенства

$$\begin{aligned}(\hat{\gamma}^* g, h)_{\mathcal{B}_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})} &= (g, \hat{\gamma} h)_{\mathcal{B}_\lambda(\hat{A},\mathfrak{S})} = \left(\hat{\rho}(\lambda) g, \hat{\gamma} h\right) = \\ &= \left(\bar{\hat{\gamma}}^T \hat{\rho}(\lambda) g, h\right) = \left(\hat{\rho}(\lambda)\, \hat{\rho}(\lambda)^{-1} \bar{\hat{\gamma}}^T \hat{\rho}(\lambda) g, h\right),\end{aligned}$$

из которых следует соотношение

$$\hat{\gamma}^* = \hat{\rho}(\lambda)^{-1}\, \bar{\hat{\gamma}}^T \hat{\rho}(\lambda).$$

Но

$$\hat{f}(\lambda) = i \operatorname{Re}\sqrt{\lambda} \operatorname{sgn} \operatorname{Im}\sqrt{\lambda} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -|\lambda|^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

и поэтому имеет место равенство

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) \hat{\gamma}^* \hat{f}(\lambda)^{-1} &= \hat{f}(\lambda)\, \hat{\rho}(\lambda)^{-1}\, \bar{\hat{\gamma}}^T \hat{\rho}(\lambda)\, \hat{f}(\lambda)^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\hat{\gamma}}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{82}$$

Отсюда следует равенство

$$\hat{\gamma}^* = \det \bar{\hat{\gamma}}\, \bar{\hat{\gamma}}^{-1}$$

и поэтому в силу соотношения (72) справедливо равенство

$$\hat{\gamma}^{\#} = \det \bar{\hat{\gamma}}^{-1} \quad \bar{\hat{\gamma}}. \tag{83}$$

Из этого равенства следует, что оператор $\hat{A}_{\hat{\gamma}}$ является симметрическим тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$\bar{\hat{\gamma}} = \hat{\gamma}, \quad \det \hat{\gamma} = 1. \tag{84}$$

Пример 3.3. Из соотношения (82) следуют соотношения для операторов $\hat{\xi}_1^{\#}$, $\hat{\xi}_2^{\#}$, $\hat{\zeta}_1^{\#}$, $\hat{\zeta}_2^{\#}$, отвечающих оператору, сопряженному к $\hat{A}_{\hat{\xi},\hat{\zeta}}$,

$$\hat{\xi}_1^{\#} = \hat{\xi}_1, \quad \hat{\xi}_2^{\#} = \hat{\xi}_2, \quad \hat{\zeta}_+^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\zeta}_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\zeta}_-^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\zeta}_- \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.4. Поскольку и в этом случае для симметричности оператора $\hat{A}$ необходимо и достаточно выполнение соотношений (84), то для матрицы γ, удовлетворяющей этим условиям, достаточным условием самосопряженности оператора $\hat{A}_\gamma$ является неравенство

$$\sqrt{(1+\gamma_{11})^2 + (1+\gamma_{22})^2} < 1. \tag{85}$$

6. СЛЕДЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Вычисление следов требует дифференцирования обобщенных функций вида $u\theta(F)$. Ниже мы применяем для этого метод Гельфанда – Шилова, основанный на использовании дифференциальных форм.

Предположим, что граница $\mathfrak{S}$ является гладкой поверхностью, определенной уравнением

$$F(x) = 0,$$

где бесконечно дифференцируемая функция F, заданная на R^n, удовлетворяет условию $\operatorname{grad} F \neq 0$, причем области $\mathfrak{D}_+$, $\mathfrak{D}_-$, определенные неравенствами $F(x) > 0$, $F(x) < 0$, удовлетворяют соотношению

$$\mathfrak{D}_+ \cup \mathfrak{D}_- \cup \mathfrak{S} = R^n.$$

Тогда, очевидно, выполняются соотношения

$$[\hat{\theta}_\pm u](x) = \theta\Big(\pm F(x)\Big) u(x).$$

Воспользуемся введенными в монографии Гельфанда и Шилова [5] обобщенными функциями

$$\delta(F),\ \delta^{(1)}(F),\dots,\delta^{(k)}(F),\dots,$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,\theta(F)=\frac{\partial F}{\partial x_j}\,\delta(F),\ \ \frac{\partial}{\partial x_j}\,\delta^{(k)}(F)=\frac{\partial F}{\partial x_j}\,\delta^{(k+1)}(F),\ \ \delta^{(0)}(F)\equiv\delta(F). \tag{86}$$

Мы воспользуемся следующим утверждением, доказанным в этой монографии.

Теорема. *Пусть функция F бесконечно дифференцируема в окрестности поверхности $\mathfrak{S}$ и в этой окрестности $\nabla F\neq 0$. При этом пусть для каждой основной функции φ с компактным носителем дифференциальные формы $\omega,\omega^0(\varphi),\omega^1(\varphi),\dots$ $\dots,\omega^k(\varphi),\dots$ порядка $n-1$ удовлетворяют соотношениям*

$$dF\wedge\omega=dx_1\wedge\dots\wedge dx_n, \tag{87}$$

$$\begin{aligned}&\omega^0(\varphi)=\varphi\omega,\\ &d\omega^{k-1}(\varphi)=dF\wedge\omega^k(\varphi),\quad k=1,2,3,\dots\end{aligned} \tag{88}$$

Тогда:

1. обобщенная функция $\delta(F)$, определенная на произвольной основной функции φ с компактным носителем с помощью соотношения

$$\langle\delta(F),\varphi\rangle=\int\limits_{F=0}\omega^0(\varphi),$$

не зависит от выбора дифференциальной формы ω, удовлетворяющей соотношению (87), и удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,\theta(F)=\frac{\partial F}{\partial x_j}\,\delta(F),\quad j=1,\dots,n;$$

2. обобщенные функции $\delta^{(k)}(F)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, *определенные соотношениями*

$$\langle \delta^{(k)}(F), \varphi \rangle = \int\limits_{F=0} \omega^k(\varphi),$$

не зависят от выбора дифференциальных форм $\omega^k(\varphi)$, *удовлетворяющих соотношениям* (88), *и удовлетворяют соотношениям*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\, \delta^{(k-1)}(F) = \frac{\partial F}{\partial x_j}\, \delta^{(k)}(F), \quad j = 1, \ldots, n; \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $\delta^{(0)}(F) \equiv \delta(F)$.

В монографии [5] построены формы $\omega^k(\varphi)$, удовлетворяющие условиям теоремы. Однако нам будет удобнее другой выбор этих форм. Начнем с построения формы $\omega_{\mathfrak{S}}$, аналогичной форме ω. Любая форма порядка $n-1$ в декартовых координатах имеет вид

$$\omega = \omega_1 \epsilon_1 + \ldots + \omega_n \epsilon_n,$$

где ω_j — коэффициенты, а дифференциальная форма ϵ_j получается из формы объема $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ вычеркиванием дифференциала dx_j. Подставляя выражение для формы ω в соотношение (87), получим соотношение, связывающее коэффициенты ω_j,

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\, \frac{\partial F}{\partial x_j}\, \omega_j = 1.$$

Из всего многообразия наборов коэффициентов ω_j, удовлетворяющих этому соотношению, мы выберем набор $\{\omega_{\mathfrak{S}j}\}$, являющийся симметричным относительно перестановок декартовых координат

$$\omega_{\mathfrak{S}j} = (-1)^{j-1}\, |\nabla F|^{-2}\, \frac{\partial F}{\partial x_j}\,.$$

Таким образом получим

$$\omega_{\mathfrak{S}} = |\nabla F|^{-2} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\, \frac{\partial F}{\partial x_j}\, \epsilon_j. \tag{89}$$

Для формы $\omega_{\mathfrak{S}}$ и произвольной гладкой функции Φ имеют место соотношения

$$d\omega_{\mathfrak{S}} = \Big(\big(\nabla|\nabla F|^{-2}, \nabla F\big)_{R^n} + |\nabla F|^{-2}\Delta F\Big)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n, \quad (90)$$

$$d\Phi \wedge \omega_{\mathfrak{S}} = |\nabla F|^{-2}(\nabla\Phi, \nabla F)_{R^n}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \quad (91)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathfrak{S}} &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_l}\left((-1)^{j-1}\,|\nabla F|^{-2}\,\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) dx_l \wedge \epsilon_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(|\nabla F|^{-2}\,\frac{\partial F}{\partial x_j}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} d\Phi \wedge \omega_{\mathfrak{S}} &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial x_l}\, dx_l \wedge |\nabla F|^{-2} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\,\frac{\partial F}{\partial x_j}\,\epsilon_j = \\ &= |\nabla F|^{-2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\,\frac{\partial F}{\partial x_j}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Формы $\omega_{\mathfrak{S}}^k(\varphi)$ выберем пропорциональными форме $\omega_{\mathfrak{S}}$, то есть

$$\omega_{\mathfrak{S}}^k(\varphi) = \Phi^k(\varphi)\,\omega_{\mathfrak{S}}.$$

Из соотношений (88) следует равенство

$$\Phi^0(\varphi) = \varphi,$$

а из (90), (91) следует соотношение

$$\begin{aligned} d\omega_{\mathfrak{S}}^{k-1}(\varphi) &= d\Phi^{k-1}(\varphi) \wedge \omega_{\mathfrak{S}} + \Phi^{k-1}(\varphi)\, d\omega_{\mathfrak{S}} = \\ &= \Big(|\nabla F|^{-2}\big(\nabla\Phi^{k-1}(\varphi), \nabla F\big)_{R^n} + \\ &+ \Phi^{k-1}(\varphi)\Big((\nabla|\nabla F|^{-2}, \nabla F)_{R^n} + |\nabla F|^{-2}\Delta F\Big)\Big)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

А так как из соотношений (88), (90) следует, что

$$dF \wedge \omega^k(\varphi) = \Phi^k(\varphi)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

то в итоге получаем соотношение

$$\begin{aligned} \Phi^k(\varphi) \; &= \; |\nabla F|^{-2}\Big(\nabla F, \nabla \Phi^{k-1}(\varphi)\Big)_{R^n} + \\ &+ \Big((\nabla\,|\nabla F|^{-2}, \nabla F)_{R^n} + |\nabla F|^{-2}\Delta F\Big)\,\Phi^{k-1}(\varphi) \end{aligned} \tag{92}$$

и, в частности,

$$\begin{aligned} \Phi^1(\varphi) \; &= \; |\nabla F|^{-2}(\nabla F, \nabla\varphi)_{R^n} + \\ &+ \Big((\nabla|\nabla F|^{-2}, \nabla F)_{R^n} + |\nabla F|^{-2}\Delta F\Big)\,\varphi. \end{aligned} \tag{93}$$

Введем вектор ν нормали к поверхности $\mathfrak{S}$, положив

$$\nu = |\nabla F|^{-1}\nabla F,$$

и обозначим

$$g_1(F) = |\nabla F|^{-1}, \quad g_0(F) = \Big((\nabla|\nabla F|^{-2}, \nabla F)_{R^n} + |\nabla F|^{-2}\Delta F\Big)\,.$$

В этих обозначениях получим

$$\omega^1_{\mathfrak{S}}(\varphi) = \Big(g_1(F)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + g_0(F)\varphi\Big)\omega_{\mathfrak{S}},$$

и, следовательно,

$$\langle\delta^{(1)}(F), \varphi\rangle = \int\limits_{F=0} \Big(g_1(F)\,\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} + g_0(F)\varphi\Big)\,\omega_{\mathfrak{S}} \tag{94}$$

и, как было установлено ранее,

$$\langle\delta(F), \varphi\rangle = \int\limits_{F=0} \varphi\,\omega_{\mathfrak{S}}. \tag{95}$$

Пример 6.1. Пусть

$$\hat{A} = i\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} = i(b, \nabla)_{R^n}.$$

Тогда

$$\mathrm{Tr}_{+}^{\mathfrak{S}} u = (b, \nabla F)_{R^n}\, u\, \delta(F).$$

Пример 6.2. Пусть

$$\hat{A} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j\, \partial x_k},$$

где a — вещественнозначная симметрическая матрица. Тогда, очевидно,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sing}_{\mathfrak{S}} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \theta(F)\, u(x) = \\
&\quad = \mathrm{sing}_{\mathfrak{S}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} u(x)\, \delta(F) + \theta(F) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right) = \\
&\quad = \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_j\, \partial x_k} u(x) \delta(F) + \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \frac{\partial F(x)}{\partial x_k} u(x)\, \delta^{(1)}(F) + \\
&\quad + \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial F(x)}{\partial x_k} \delta(F) + \frac{\partial F(x)}{\partial x_j} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \delta(F)
\end{aligned}$$

и поэтому имеют место равенства

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}_{+}^{\mathfrak{S}} u \quad = \quad & \Big(\mathrm{Trace}\, (a \nabla^2 F)\, u + 2(a\nabla F, \nabla u)_{R^n} \Big)\, \delta(F) \; + \\
& + (a\nabla F, \nabla F)_{R^n}\, u\, \delta^{(1)}(F)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{Tr}_{+}^{\mathfrak{S}} u, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathfrak{S}} l_1(u)\, \varphi\, \omega_{\mathfrak{S}} + \int\limits_{\mathfrak{S}} l_2(u) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \omega_{\mathfrak{S}}, \\
&l_1(u) = \Big(\mathrm{Trace}\, (a\nabla^2 F)\, u + 2(a\nabla F, \nabla u)_{R^n} + g_0 (a\nabla F, \nabla F)_{R^n} \Big), \\
&l_2(u) = g_1 (a\nabla F, \nabla F)_{R^n}\, u.
\end{aligned} \tag{96}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. — М.: Мир, 1965.

2. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. — М.: Мир, 1987.

3. Calderon A. P. Boundary value problems for elliptic equations. Outlines of the joint Soviet – American Symposium on partial differential equations. — Novosibirsk, 1963. P. 303–304.

4. Seely R. T. Singular integrals and boundary problems // Am. J. of Math. 1966. V. 88. P. 781–809.

5. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Вып. 1. — М.: ГИФМЛ, 1958.

6. Антонец М. А. Алгебра символов Вейля и задача Коши для регулярных символов // Матем. сб. 1978. Т. 107(149), №1(9). С. 20–32.
   Antonets M. A. The algebra of Weyl symbols and the Cauchy problem for regular symbols // Math. USSR Sb. 1979. V. 35. P. 317–332.

7. Антонец М. А. Задача с начальными данными для псевдодифференциальных операторов // Проблемы математического анализа. Вып. 18. Нелинейные уравнения с частными производными и теория функций. — СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1998. С. 3–42.
   Antonets M. A. Initial value problem for pseudodifferential operators // J. of Math. Sci. March 2000. V. 98, №6. P. 629–653.

8. Антонец М. А. Начально-краевые задачи для эволюционных уравнений с условием трансмиссии на неограниченной поверхности // ДАН. 1993. Т. 332, №3. С. 227–279.

Antonets M. A. Initial-boundary value problems for evolution equation with transmission condition on an unbounded surface // Russian Acad. Sci. Dokl. Math. 1994. V.48, №2. P. 286–290.

9. Antonets M. A., Ponomareva L. V. Impedance boundary condition and extension of the Maxwell operator // Proceedings of international seminar "DAYS ON DIFFRACTION 2005", June 28–July 1, p. 7–18, St. Petersburg. — Saint Petersburg, 2005.

Антонец Михаил Александрович

Анализ дифференциальных операторов, отвечающих краевым задачам

Подписано в печать 11.12.06 г. Формат 60 × 84/16.
Бумага писчая. Объем 4.43 усл. п. л.
Тираж 50. Заказ 5563.

Отпечатано в НИРФИ
Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25