прямых (зондовых), и дистанционных методов зондирования их с применением обработки принимаемых (измеряемых) сигналов методами МСФ и ММВП (ВП). Особо следует указать на необходимость таких прямых и дистанционных экспериментов для исследования мультифрактальной структуры ионосферной турбулентности.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 09-02-97026-р_поволжье_а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов А.И., Анищенко В.С.// УФН. 2007. Т. 177, № 8. С. 859.
2. Muz JJ.F. et al. //Phys Rev Lett. 1991. V. 67. P. 3515.
3. Bacry E et al. //J Statist. Phys. 1993. V. 70, № 3/4. P. 635.
4. Arheodo A et al. //Physica A. 1998. V. 254. P. 24.
5. Алимов В.А., Выборнов Ф.И., Рахлин А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 4. С. 287.
6. Рытов С. М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Т. II – М.: Наука, 1978.
7. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. – М.: ЛОГОС, 2002.
8. Алимов В.А., Выборнов Ф.И., Рахлин А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 4. С. 300.
9. Алимов В.А., Выборнов Ф.И., Рахлин А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 6. С. 485.
10. Алимов В.А., Выборнов Ф.И., Рахлин А.В. // Изв. вузов. Радиофизика. 2009. Т. 52, № 1. С. 3.
11. Денисов Н.Г. // Изв. вузов. Радиофизика. 1961. Т. 4, № 4. С. 630.
12. Денисов Н.Г. // Геомагнетизм и аэрономия. 1964. Т. 4, № 4. С. 675.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО НАУКЕ И ИННОВАЦИЯМ
федеральное государственное научное учреждение
«Научно-исследовательский радиофизический институт»
(ФГНУ НИРФИ)

Препринт № 528

Некоторые особенности перспективных исследований мультифрактальной структуры мелкомасштабной ионосферной турбулентности с использованием вейвлет-преобразования

В. А. Алимов
Ф. И. Выборнов
А. В. Рахлин

Нижний Новгород
2009

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ИОНОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

// Препринт №528. – Нижний Новгород: ФГНУ НИРФИ, 2009. – 30 с.

УДК 501

Рассмотрен вопрос о возможном использовании метода вейвлет-преобразования для дистанционного зондирования мелкомасштабной ионосферной турбулентности. Детально проанализирован метод максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП) как метод анализа сингулярных мер и сингулярных функций. Показано, что в исследованиях неоднородной структуры ионосферной плазмы, как и при аналогичных исследованиях неоднородной структуры турбулентности в других природных средах, понятие сингулярной функции может вводиться лишь как некоторая наглядная математическая абстракция для упрощенного описания наблюдаемого (исследуемого) мультифрактального процесса. Реально же мы имеем дело с непрерывными, гладкими, хотя и нестационарными, случайными (турбулентными) процессами. Для исследования их фрактальных свойств можно применять обработку сигналов с помощью метода многомерных структурных функций (МСФ) и ММВП. Предложена упрощенная модель сложного сигнала, в которой особые точки исследуемой функции перемежаются с квазислучайной непрерывно дифференцируемой структурой этой же функции в других точках на временном интервале обработки. Отмечается, что для такой обобщенной модели принимаемого сигнала при дистанционном зондировании мелкомасштабной ионосферной турбулентности метод ММВП практически не работоспособен из-за эффекта ”замывания” возможных резких квазирегулярных мелкомасштабных флуктуаций электронной концентрации в ионосфере. Необходимы комплексные синхронные исследования ионосферной турбулентности с применением мультифрактальных методов обработки сигналов при контактных (зондовых) измерениях структуры турбулентности непосредственно в ионосфере и при дистанционном зондировании ионосферной плазмы.

© Научно-исследовательский радиофизический институт, 2009

на таких малых (”точечных”) временных интервалах Δt_{ϕ} поведение сигнала можно приближенно считать ”сингулярным” и описывать его последними слагаемыми в соотношении (28) (или (1)). При этом для исследования мультифрактальной структуры таких быстрых временных флуктуаций сигнала с отчетливо выраженной ”квазисингулярной” структурой наиболее адекватна обработка его методом ММВП. Это наглядно было продемонстрировано при обработке прямых зондовых измерений сигнала скорости воздушных вихрей в турбулентном потоке [2]. Но при дистанционном зондировании мелкомасштабной ионосферной турбулентности диагностика таких ”сингулярных” флуктуаций сигнала, потенциально возможных непосредственно в ионосфере (быстрых флуктуаций фазы сигнала на выходе неоднородного ионосферного слоя), методом ММВП (ВП) становится проблематичной из-за указанного выше эффекта ”замывания” резких ”сингулярных” флуктуаций сигнала при дифракции его в свободном пространстве между слоем турбулентной ионосферной плазмы и плоскостью приема на Земле.

Итак, можно констатировать, что в целом на сегодняшний день концепции сингулярной меры и сингулярной функции в исследованиях турбулентности (атмосферной, ионосферной и т.д.) могут быть работоспособны в различных ситуациях для исследуемых турбулентных объектов. В настоящее время чистое разделение их (только сингулярная функция или только сингулярная мера для исследуемого сигнала) вряд ли возможно. Нужны дальнейшие теоретические и, прежде всего, экспериментальные исследования мультифрактальной структуры таких турбулентных объектов с использованием и дистанционно измеряемой записи амплитудных флуктуаций принимаемого сигнала $\Delta A(t)$ будет фактически невозможно.

В такой ситуации, очевидно, надо проводить прямые зондовые измерения флуктуаций электронной концентрации $\Delta N(\vec{l})$ непосредственно в ионосфере с обработкой этого сигнала $\Delta N(\vec{l})$ с помощью мультифрактального анализа его методами МСФ и ММВП (ВП) ($\vec{l}$ – направление движения зонда в ионосфере). Параллельно, естественно, следует вести и дистанционные измерения амплитуды (фазы) сигналов космических аппаратов на Земле, после просвечивания ими турбулентной структуры ионосферной плазмы. Такого рода синхронные эксперименты с одновременными исследованиями турбулентной структуры флуктуаций электронной концентрации $\Delta N(\vec{r})$ зондовым (прямым) методом диагностики в ионосфере и при наземном (дистанционном) приеме сигналов космических объектов с применением методов мультифрактальной обработки МСФ и ММВП должны дать достоверную информацию об истинной структуре ионосферной турбулентности.

В заключение еще раз необходимо отметить, что модель регистрируемого сигнала $f(t)$ (28) (также как и (1)) является математической моделью. В ней последнее слагаемое приблизительно описывает наиболее резкие, но, в целом, гладкие вариации быстрых флуктуаций сигнала на сравнительно небольших временных интервалах $\Delta t_{ф}$. Характерный масштаб $\Delta t_{ф}$, как правило, заметно меньше конечного интервала τ анализа принимаемого сигнала при его мультифрактальной обработке методами ММВП и МСФ ($\Delta t_{ф} = \tau$). Именно поэтому

В последние годы, наряду с широко известным методом многомерных структурных функций (МСФ), в исследованиях мультифрактальной структуры различных случайных процессов стал применяться статистический метод вейвлет-преобразования (ВП) [1]. Благодаря работам [2–4] в исследованиях турбулентных атмосферных процессов довольно интенсивно использовался так называемый метод максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП). Он был ориентирован на исследование мультифрактальной структуры развитой турбулентности, непосредственно описываемой некоторой сингулярной функцией в отличие от традиционного мультифрактального подхода к анализу турбулентности как некоторой мультифрактальной меры случайного нестационарного процесса, характеризующей турбулентную структуру изучаемого сигнала [1]. Такой подход, несомненно, является оригинальным, но применительно к дистанционным исследованиям мультифрактальной структуры ионосферной плазмы он нуждается в некоторой модернизации.

Ниже проводится специальное рассмотрение вопроса о возможном использовании метода вейвлет-преобразования для дистанционного зондирования мелкомасштабной ионосферной турбулентности.

1. Метод ММВП: анализ сингулярных мер и сингулярных функций

В основе мультифрактального анализа сигналов с помощью метода ММВП лежит общий (математический) подход [2,3]. Он исходит из того, что анализируемый случайный процесс имеет сингулярную структуру. При этом, описывающая его функция $f(t)$ вблизи некоторой особой точки t_k может быть представлена в виде ряда Тейлора–Гельдера [2]:

$$f(t) \sim f(t_k)+\frac{(t-t_k)}{1!}f'(t_k)+\frac{(t-t_k)^2}{2!}f''(t_k)+\ldots+\frac{(t-t_k)^n}{n!}f^{(n)}(t_k)+c\cdot\left|t-t_k\right|^{\alpha(t_k)}, \quad (1)$$

где $n<\alpha(t_k)<n+1$.

Тогда ВП этой функции

$$W(\tau,t_k)=\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\frac{t-t_k}{\tau}\right)\cdot f(t)dt\,. \quad (2)$$

Здесь $\psi(t)$ – вейвлет-функция [1]. Например для MHAT-вейвлета $\psi(x)=\psi_2(x)$

$$W(\tau,t_k)=\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_2\left(\frac{t-t_k}{\tau}\right)\cdot\left[f(t_k)+\frac{(t-t_k)}{1!}f'(t_k)\right]dt\equiv 0 \quad (3)$$

и, соответственно, при малых τ ($\tau\to 0$)

$$W_2(\tau,t_k)=\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\frac{t-t_k}{\tau}\right)\cdot f(t)dt \sim \int_{-\infty}^{\infty}dx\cdot\psi_2\left(x\right)\cdot\left[\frac{\tau^2x^2}{2}f''(t_k)+c(\tau x)^{\alpha(t_k)}\right]. \quad (4)$$

Когда $c=0$, имеем регулярное ВП:

$$W_2(\tau,t_k)\sim\ \tau^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\cdot x^2\cdot\psi_2\left(x\right)\sim\ \tau^2. \quad (5)$$

Если $c\neq 0$ и $0<\alpha(t_k)<2$, то соотношение (4) приводит нас к ВП:

дифференцируемая функция с квазиоднородной статистикой флуктуаций, такой что дисперсия флуктуаций на локальном интервале наблюдений $T_{лок}$ $\overline{\left[\Delta f(t)\right]^2}\sim\ \left|t\right|^{2\alpha+1}$, тогда для метода ММВП (ВП) будет срабатывать концепция сингулярной меры (см. п. 2).

В общем случае может реализовываться ”перемешивание” точек t_k на оси $\vec{t}$ (для одних точек $c(t_k)\sim\ 0$, а рядом точки с $f'(t_k)=f''(t_k)=\ldots=f^{(n)}(t_k)\sim\ 0$ и $c(t_k)\neq 0$, а $0<\alpha(t_k)<2$). При прямых (контактных) измерениях такого сигнала (например при прямых зондовых измерениях турбулентности в воздушном потоке [2]) метод ММВП будет срабатывать как метод измеряемой сингулярной функции $f(t)$. А при дистанционном измерении, например амплитуды ионосферного сигнала $A(t)$, после дифракции его на турбулентном экране со смешанной структурой (случайные дифференцируемые флуктуации фазы волны в отдельных пространственных точках экрана и ”сингулярное” поведение их в других точках этого же экрана) можно ожидать, что ”сингулярные” особенности диагносцируемой функции (в нашем случае это пространственные флуктуации электронной концентрации ионосферной плазмы) будут ”замыты” в принимаемом сигнале $A(t)$ в зоне Фраунгофера относительно мелкомасштабных неоднородностей фазового экрана (неоднородного ионосферного слоя). Тогда определить реальную ”сингулярную” структуру флуктуаций электронной концентрации $\Delta N(\vec{r})$ в мелкомасштабных неоднородностях ионосферной плазмы по

($0<\alpha(t_k)<2$, см. [2]). Такая модель сигнала $f(t)$, по-видимому, все же является идеализированной.

В более общем (вероятном) случае возможна несколько иная ситуация, когда особые точки функции $f(t)$ перемежаются с квазислучайной непрерывно дифференцируемой структурой этой же функции в других точках на оси времени $\vec{t}$ в пределах интервала обработки T. Другими словами, упрощенная модель сигнала $f(t)$ (вблизи любой точки t_k на временной оси $\vec{t}$) имеет вид (ср. (1))

$$f(t) \approx f(t_k)+\frac{(t-t_k)}{1!}f'(t_k)+\frac{(t-t_k)^2}{2!}f''(t_k)+\ldots \qquad (28)$$

$$+\frac{(t-t_k)^n}{n!}f^{(n)}(t_k)+c(t_k)(t-t_k)^{\alpha(t_k)},$$

где $n<\alpha(t_k)<n+1$.

При этом для разных точек t_k могут весьма значительно варьироваться значения параметров $f(t_k)$, $f'(t_k),\ldots f^{(n)}(t_k)$ и $c(t_k)$, $\alpha(t_k)$. Для некоторых t_k может быть $c(t_k)=0$, а для других – $f'(t_k)=f''(t_k)=\ldots=f^{(n)}(t_k)=0$. При этом $c(t_k)\neq 0$ и, например $0<\alpha(t_k)<2$. Тогда при обработке сигнала $f(t)$ методом ММВП выбираются именно такие особые точки t_k с минимальными значениями параметра $0<\alpha(t_k)<2$, где имеет место максимальный отклик ВП для малых значений параметра τ. Тогда фактически срабатывает концепция сингулярной функции $\Delta f(t) \approx c(t_k)(t-t_k)^{\alpha(t_k)}$. А если для многих точек функции $f(t)$ $c(t_k)=0$ и функция $f(t)$ – случайная непрерывно

$$W_2(\tau,t_k) \sim \tau^{\alpha(t_k)}\int_{-\infty}^{\infty}dx\cdot\psi_2(x)\left|x^{\alpha(t_k)}\right| \sim \tau^{\alpha(t_k)}. \qquad (6)$$

Для сингулярной функции $f(t)$ отклик ВП в локальной точке t_k : $|\tau|^{\alpha(t_k)}$. Эти отклики, вообще говоря, разные в разных точках t_k на всем интервале обработки T записи сигнала $f(t)$, так что суммарная частичная функция [2–4]:

$$Z(\tau,q)=\sum_{k=1}^{N}\left|W(\tau,t_k)\right|^q \sim \int d\alpha\cdot\tau^{\alpha_q}\cdot\tau^{-D(\alpha)} \sim \tau^{\varphi(q)}. \qquad (7)$$

Здесь $D(\alpha)$ – фрактальная размерность исследуемого процесса на пространстве α-параметров, $\varphi_f(q)$ – обобщенный показатель Гельдера для изучаемого мультифрактального процесса.

Дальнейший анализ соотношения (7) с использованием стандартного мультифрактального формализма приводит к известным соотношениям для мультифрактального спектра исследуемого процесса $D_f(\alpha_q)$ и соответствующего показателя Гельдера α_q [2–4]:

$$\begin{cases} D_f(\alpha_q)=\alpha_q\cdot q-\varphi_f(q) \\ \alpha_q=\dfrac{d\varphi_f(q)}{dq} \end{cases}. \qquad (8)$$

Итак, если метод ММВП дает положительный ответ для исследуемой функции $f(t)$ (дает мультифрактальный спектр, например с $0<\alpha_q<2$), то, согласно [2–4], считается, что функция $f(t)$ (точнее ее флуктуации $\Delta f(t)$, см. (3)) – сингулярная.

Это – строгий математический результат (при $\tau \to 0$). Но реально (физически) τ – конечно и уже само локальное ВП дает усредненный (на интервале τ) результат при обработке функции $f(t)$. Возникает вопрос: в какой степени указанный выше математический результат метода ММВП (при $\tau \to 0$) может быть применен в реальных условиях натурного эксперимента?

Вообще говоря, для мультифрактального анализа случайных сигналов используют представление этих сигналов как сингулярных мер или как сингулярных функций [1]. В первом случае речь идет об усреднении локальных статистических характеристик, определенных на ”малых” локальных интервалах $T_{лок} \approx T_{стац}$, на всем интервале обработки сигнала T ? $T_{лок}$. Во втором случае носителем информации является сама измеряемая функция, которая, как предполагается, имеет гельдеровские особенности в отдельных точках t_k. Усреднение отдельных локальных откликов в этих экстремальных точках на всей записи T приводит также к мультифрактальному спектру исследуемого процесса [1].

Для исследований ионосферы с помощью дистанционного зондирования в нашем распоряжении имеется запись амплитуды сигнала $A(t)$ или фазы сигнала $s(t)$ [5]. Она может обладать мультифрактальными свойствами. При анализе $A(t)$ с помощью интегрального метода МСФ мы определяем мультифрактальный спектр этой записи $D_A(\alpha_q)$ на интервале T. При этом носителем сингулярной меры является локальная структурная функция 2-го порядка $\sigma_A^2(\tau)$, определяемая на локальном временном интервале $T_{лок}$; $T_{стац}$ [5]. Но потенциально $A(t)$ или $s(t)$ могут

использованием метода ММВП (или ВП). Но в условиях квазистационарного поведения случайного процесса на локальном интервале ($\overline{\Delta A^2(t)} = const$) такая обработка принимаемого сигнала практически невозможна. В то же время в этих условиях оказывается вполне работоспособной мультифрактальная обработка сигнала $\Delta A(t)$ с помощью метода МСФ [8 –10].*

Вместе с тем обработка результатов прямых (зондовых) измерений сигнала скорости движения турбулентного потока $\upsilon(t)$ в работе [2] показала идентичность методов МСФ и ММВП. При этом авторы [2] оперируют концепцией сингулярной функции $\upsilon(t)$. И действительно, для теории сингулярной функции $\upsilon(t)$, когда $\left|\upsilon(t_k+\tau)-\upsilon(t_k)\right| : \tau^{\alpha(t_k)}$ и $\left|W(\tau,t_k)_{\max}\right| : \tau^{\alpha(t_k)}$, методы МСФ и ММВП дают одинаковый результат, поскольку фактический вклад в измеряемые мультифрактальные спектры принимаемого сигнала $\upsilon(t)$ вносят именно значения сигнала в особых точках t_k, одинаковые для $\upsilon(t)$ и при обработке по методу МСФ и по методу ММВП.

Здесь речь идет фактически о моносингулярной функции $f(t)$ (в случае [2] – $\upsilon(t)$), когда практически в любой точке t_k эта функция $f(t)$ имеет особые точки низшего порядка

---

* Этот результат нашел свое отражение при мультифрактальной обработке принимаемого сигнала $A(t)$ в сеансе связи с орбитальным ИСЗ 29.03.06 методом МСФ (см. [5]) и ММВП (ВП). В первом случае получен характерный мультифрактальный спектр $D_A(\alpha_q)$ [5], а во втором обработка этой же части записи сигнала с использованием метода ММВП (ВП) дал отрицательный результат.

дистанционного зондируемого объекта – это отдельный непростой вопрос, а точнее, по-видимому, достаточно сложная самостоятельная радиофизическая задача.

Так что в физических исследованиях фрактальной структуры ионосферной плазмы целесообразно ориентироваться на простой метод ВП подобно соответствующим исследованиям ее с помощью метода МСФ [8–10]. Хотя и тот и другой методы работают лишь в ограниченной области положительных значений параметра $q \geq 0$.

В заключение заметим, что квазиоднородная структура корреляционной функции слабых амплитудных флуктуаций принимаемых сигналов (см. (19)) при дистанционном зондировании ионосферы сигналами ИСЗ воспроизводит такую же структуру слабых фазовых флуктуаций этих сигналов на выходе неоднородного ионосферного слоя [11,12]. А поскольку быстрые фазовые флуктуации сигналов ИСЗ в ионосфере обусловлены мелкомасштабной неоднородной структурой ионосферной плазмы, то, исследуя мультифрактальную структуру амплитудных флуктуаций принимаемых на Земле сигналов, мы фактически изучаем соответствующую структуру мелкомасштабной ионосферной турбулентности.

3. Об одной особенности дистанционного зондирования ионосферной турбулентности

Выше было показано, что, вообще говоря, для исследуемого квазиоднородного случайного процесса $\Delta A(t)$ на локальном интервале наблюдений $T_{лок}$ в рамках концепции сингулярной меры возможно применение стандартной схемы мультифрактальной обработки принимаемого сигнала с

быть сингулярными функциями, так что, например, $\left|A(t+\tau)-A(t)\right| : \tau^{\alpha}$ (где $0<\alpha<1$) и тогда интегральный метод МСФ даст тот же результат для измеряемого мультифрактального спектра. Так что различить случаи интегральной меры или сингулярной функции при обработке записей сигналов по методу МСФ не представляется возможным.

Но можно применить метод ММВП [1]. Этот метод, хотя номинально и является дифференциальным (измеряются отклики ВП в ”отдельных” экстремальных точках с разрешением $\tau = T$), фактически является также интегральным, поскольку дает мультифрактальный спектр сигнала при анализе всей записи сигнала на интервале T.

Тем не менее, в принципе, для отдельных экстремальных фиксированных точек t_k на записи $A(t)$ может быть получена теоретическая зависимость локального отклика ВП (6). Если для некоторых ”сингулярных” точек t_k такая зависимость будет получена при соответствующей обработке методом локального ВП функции $A(t)$, то тогда можно будет утверждать, что исследуемая случайная функция $A(t)$ – это действительно сингулярная функция. Но поскольку она порождена неоднородной структурой электронной концентрации в ионосфере, то значит и эта структура (в форме флуктуаций фазы сигнала на выходе ионосферного слоя) также имеет сингулярную структуру. Тогда возникает фундаментальная задача дистанционного зондирования таких сингулярных объектов, поскольку до сего времени для таких расчетов служило волновое уравнение распространения радиоволн в свободном пространстве за экраном или в самом слое [6]. А это уравнение, как следствие уравнений Максвелла, предполагает, как минимум, дифференцируемость полей и диэлектрических проницаемостей исследуемых сред 1-го и 2-го порядка. Следствие этого уравнения, например решение краевой задачи для фазового экрана с помощью функции Грина [6]. Оно работает только для таких гармонических (дифференцируемых) функций. Для корректного решения задач дифракции излучения на случайных объектах с сингулярной структурой необходима будет разработка принципиально новых методов уже на уровне модифицированных уравнений Максвелла!

Учитывая важность затронутой проблемы описания потенциально возможных сингулярных структур в ионосферной плазме, был выполнен тест-поиск особых точек на записях амплитуды $A(t)$, полученных в экспериментах по зондированию ионосферы сигналами орбитальных ИСЗ [5]. Для выборочных фиксированных точек t_k на этих записях проводился расчет модуля ВП:

$$\left|W(\tau,t_k)\right| = \left|\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_2(\frac{t-t_k}{\tau})A(t)dt\right|, \qquad (9)$$

где $\psi\left(\frac{t-t_k}{\tau}\right)$ – MHAT-вейвлет [1], а параметр τ брался в диапазоне τ ; $(5\cdot10^{-2}\div2)$ секунд.

Далее для каждой точки t_k в двойном логарифмическом масштабе строилась зависимость $\lg\left|W(\tau,t_k)\right|$ от параметра $\lg\tau$. На этом графике отмечалось наличие линейного участка,

$\overline{\left[W(\tau)\right]^2} = \frac{E(\tau)}{\tau} = \overline{\varepsilon(\tau)}$ – плотность энергии флуктуаций исследуемого случайного процесса на интервале измерений ВП порядка τ .

Для простого метода ВП работает стандартная методика мультифрактального анализа сигналов, как и для метода ММВП, но лишь при $q\geq0$ (см. (15) и (16)).

Хотя простой метод ВП и работает лишь при $q\geq0$, но по сравнению с методом ММВП он имеет определенные физические преимущества.

Он работает с прямыми измерениями ВП $W(\tau,t_i)$, которые непосредственно связаны с экспериментальными данными $\Delta A(t)$. Причем эти измерения ВП берутся непосредственно на всем интервале обработки T, т.к. потенциально характеризуют весь непрерывный массив данных $\Delta A(t)$ на этом интервале. Последнее особенно важно при дистанционном зондировании исследуемых случайных объектов, когда непрерывный массив данных $\Delta A(t)$ формируется соответствующим непрерывным массивом данных самого объекта (например в ионосферных исследованиях это фазовый экран с флуктуациями электронной концентрации мелкомасштабных неоднородностей ионосферы [6]).

А для метода ММВП используется выборочный набор данных $\Delta A(t_k)$ из всего массива данных на T, поскольку измерения $\left|W(\tau,t_l)\right|_{\max}$ берутся выборочно из всего массива измерений. И как этот выборочный набор данных $\Delta A(t_l)$ связан с соответствующим непрерывным массивом данных

$$W(\tau,t_i)=\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{t'-t_i}{\tau}\right)A(t')dt'\ ;\ \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi\left(\frac{t'-t_i}{\tau}\right)\Delta A(t')dt'\,. \quad (22)$$

Здесь учтено, что $A(t)=A_{тренд}(t)+\Delta A(t)$. Очевидно, что на локальном интервале $T_{лок}$

$$\overline{W(\tau,t_i)}\ ;\ 0\,. \quad (23)$$

На эксперименте вычисляется частичная сумма (при $q>0$) (см. (2)):

$$Z(q,\tau)=\sum_{i=1}^{N}\left|W(\tau,t_i)\right|^q=\sum_{l=1}^{N_l}\left[\sum_{k=1}^{N_k}\left|W(\tau,t_{l_k})\right|^q\right]. \quad (24)$$

Тогда, при условии $\tau\ ?\ \tau_{быстр.фл.\Delta A(t)}$, мгновенный отклик ВП имеет нормальное распределение с нулевым средним $\overline{W(\tau,t)}=0$ и дисперсией $\sigma_W^2=\overline{W^2(\tau)}$:

$$w(W)\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_W^2}}\exp\left(-\frac{W^2}{2\sigma_W^2}\right). \quad (25)$$

Соответственно при $q>0$ (ср. [5])

$$\overline{|W|^q}=\int_0^{\infty}\left[|W|\right]^q w(|W|)d\,|W|_{\max}\ :\ \left[\sqrt{\sigma_W^2}\right]^q. \quad (26)$$

Здесь, согласно соотношения (20),

$$\sigma_W^2=\overline{W^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int d\bar{x}d\xi\cdot\psi(\bar{x}-\frac{\xi}{2})\psi(\bar{x}+\frac{\xi}{2})\overline{\Delta A^2(\bar{x}\tau)}\rho_A(\xi\tau)\ : \quad (27)$$

$$:\ \frac{\tau_{коррфл}}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}d\bar{x}\cdot\psi^2(\bar{x})\overline{\Delta A^2(\bar{x}\tau)}\,.$$

Если $\overline{\left[\Delta A(\bar{x}\tau)\right]^2}\ :\ \left[\bar{x}\tau\right]^{2\alpha+1}$, то $\overline{\left[W(\tau)\right]^2}\ :\ \tau^{2\alpha}$. И также как в методе ММВП, носитель мультифрактальной меры

который соответствует зависимости $\left|W(\tau,t_k)\right|\ :\ \tau^{\alpha(t_m)}$ с постоянным (для данной точки t_m, $m\le k$) значением $\alpha(t_m)$.

Если бы такие точки существовали ($m\ne 0$), то, согласно теоретическим представлениям (см. ниже), это – особые точки функции $A(t)$ с гельдеровскими экспонентами $\alpha(t_m)$ в этих точках, а сама функция $A(t)$ – сингулярная. Но если этих точек нет ($m=0$), то нельзя достоверно утверждать, что функция $A(t)$ – сингулярная.

Тест-поиск особых точек функции $A(t)$ дал отрицательный результат ($m=0$). Он лишь подтвердил результаты многочисленных исследований подобного рода для непосредственных измерений сигнала скорости $\upsilon(x)$ в атмосферном турбулентном потоке [1–4]. Эти эксперименты показали, что линейная аппроксимация в локальных откликах ВП ($\left|W(\tau,t_k)\right|\ :\ \tau^{\alpha(t_m)}$) или при измерении локального значения меры (разности скоростей $\left|\upsilon(x_0+l)-\upsilon(x_0)\right|\ :\ e^{\alpha(x_0)}$ при малых l) фактически невозможна.

Достоверная информация о мультифрактальном спектре измеряемой неоднородной структуры атмосферной турбулентности (турбулентной скорости вихрей в потоке) оказалось возможной, лишь когда проводили интегральную обработку сигнала скорости по методу МСФ или по методу ММВП на достаточно большом массиве исходных данных с использованием так называемых частичных сумм локальных откликов (см. (7) и [2,3]).

Этот результат находится в хорошем соответствии с общими теоретическими представлениями о мультифрактальной структуре природных образований. Действительно, фрактальные свойства для турбулентной среды проявляются лишь в области инерционного интервала турбулентности (на масштабах $L_0 ? \ l ? \ l_0$, где l_0, L_0 – внутренний и внешний масштабы турбулентности), т.е. реально речь идет о конечных значениях даже самых малых масштабов турбулентности вихрей $l_{\min} \ ; \ l_0$. При этом говорить о сингулярном поведении измеряемой функции (в данном случае $\upsilon(x)$) нельзя, поскольку при конечных l речь о производных исследуемой функции идти не может.

Можно говорить о мультифрактальной (самоподобной) неоднородной структуре исследуемой турбулентности в интервале $L_0 ? \ l ? \ l_0$ с использованием понятия мультифрактальной меры (например, фрактальной меры типа локальной структурной функции $\overline{|\Delta\upsilon(\tau)|^q}$ на интервале $L_{лок} \ ; \ L_{стац} ? \ l_0$ с использованием усреднения ее на всем измеряемом интервале $L ? \ L_{лок}$ (аналогичная ситуация имела место у нас при анализе на интервале $T ? \ T_{стац}$ мультифрактальной структуры ионосферного сигнала $A(t)$ [5]). В результате такой интегральной обработки получают сведения о мультифрактальном спектре неоднородной турбулентной структуры.

Локальная структурная функция $\overline{|\Delta\upsilon(\tau)|^q}$ (в методе МСФ) является носителем мультифрактальной меры на интервале $L_{лок}$, а после усреднения ее на всем анализируемом интервале записи ($L ? \ L_{лок}$) мы получаем информацию о мультифрактальном

А в общем случае квазиоднородного случайного процесса $\Delta A(t)$, когда $\overline{\Delta A^2(\tau)} : \ \tau^{2\alpha+1}$, имеем $E(\tau) \ ; \ \overline{(\Delta A(\tau))^2} \cdot \tau_{коррфл} \ : \ \tau^{2\alpha+1}$ и $\overline{\varepsilon(\tau)} : \ \tau^{2\alpha}$.

Таким образом, вообще говоря, в зависимости от вида квазиоднородного случайного процесса $\Delta A(t)$ на интервале $T_{лок}$ возможны различные зависимости дисперсии флуктуаций $\overline{\Delta A^2(\tau)}$ этого процесса от длительности интервала измерений τ и, соответственно, различный характер измеряемой плотности энергии флуктуаций исследуемого процесса $\overline{\varepsilon(\tau)} : \ \overline{W(\tau)^2}$ на этом же интервале измерений.

При этом для общего случая перемежаемости амплитудных флуктуаций случайного процесса на интервале $T_{лок}$ с дисперсией $\overline{\Delta A^2(\tau)} : \ \tau^{2\alpha+1}$ носитель фрактальной меры для исследуемого процесса $\Delta A(t)$ – $\overline{\varepsilon(\tau)} : \ \overline{W(\tau)^2} \ : \ \tau^{2\alpha}$. Соответственно $\overline{|W(\tau)|^q} \ : \ \left[\overline{[W(\tau)]^2}\right]^{q/2} \ : \ \tau^{\alpha q}$ и, следуя соотношению (15), приходим к искомым соотношениям (16) для мультифрактального спектра исследуемого случайного процесса.

Напомним, что метод ММВП пригоден в случае $q \neq 0$. При $q \geq 0$ возможно применение более простого метода ВП. Для него берется массив данных $W(\tau, t_i)$ из расчетов ВП в точках t_i, взятых с шагом $\Delta t_{отсчет} \geq \tau_{быстр.фл.}$ (независимые отсчеты для $\Delta A(t)$), на всем интервале анализа T:

$\left|\xi\right|_k \tau < \tau_{коррфл}$, а параметр $\tau ? \tau_{коррфл}$ (см. выше), то из соотношений (18), (19) имеем следующее приближенное соотношение ($\xi = x_1 - x_2$, $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$):

$$\overline{\left|W(\tau)\right|^2} : \int\limits_{-\xi_k}^{+\xi_k} d\xi \rho_A(\xi\tau) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x} \cdot \psi^2(\bar{x}) \overline{\Delta A^2(x\tau)} : \frac{\tau_{коррфл}}{\tau} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x} \cdot \psi^2(\bar{x}) \overline{\Delta A^2(x\tau)} \cdot \quad (20)$$

Из соотношения (20) следует, что если $\overline{\Delta A^2(x\tau)} : \left|x\tau\right|^{2\alpha+1}$, то соответственно $\overline{\left|W(\tau)\right|^2} : \tau^{2\alpha}$.

Таким образом, $\overline{\left|W(\tau)\right|^2} : \dfrac{\tau_{коррфл}}{\tau} \overline{\Delta A^2(\tau)} = \dfrac{E(\tau)}{\tau} = \varepsilon(\tau)$. Здесь $\varepsilon(\tau)$ – плотность потока энергии E флуктуаций исследуемого случайного процесса на интервале измерений ВП порядка τ. Если $\overline{\Delta A^2(\tau)} : \tau^{2\alpha+1}$, то носитель мультифрактальной меры в методе ММВП – среднее значение плотности энергии $E(\tau)$ флуктуаций сигнала на локальном интервале $T_{лок}$:

$$\overline{\varepsilon(\tau)} : \tau^{2\alpha}. \quad (21)$$

Для статистически однородного локального процесса $\overline{\Delta A^2(\tau)} = const$ и $E(\tau) = const$. В этом случае $E(\tau)$ определяется флуктуациями сигнала на интервале $\tau_{коррфл}$ и не зависит от τ. Тогда $\varepsilon(\tau) : \tau^{-1}$.

Для неоднородного случайного процесса $\Delta A(t)$ типа броуновского движения с дисперсией $\overline{\Delta A^2(\tau)} = \tau$ (при $\alpha = 0$) $E(\varepsilon) = \tau$ и $\overline{\varepsilon(\tau)} = const$.

спектре этого нестационарного случайного процесса $\upsilon(x)$. То же касается и локального отклика ВП ($\left|W(\tau, t_k)\right|$. Здесь уже локальное усреднение имеет место на интервале τ в единичном отклике ВП. Конечно, оно может быть более нерегулярным, чем соответствующая локальная структурная функция в МСФ из-за того, что обычно $\tau = T_{лок}$; $T_{стац}$. Но после полного усреднения максимумов модулей этих локальных откликов ВП мы все равно приходим, практически, к тому же мультифрактальному спектру нестационарного случайного процесса $\upsilon(x)$, что и при обработке сигнала МСФ (см. [2]).

Что же касается трактовки конечных результатов мультифрактальной обработки сигнала скорости в турбулентном потоке, как обработки сигнала с сингулярной структурой (типа $\left|\upsilon(x_0 + l) - \upsilon(x_0)\right| : e^{\alpha(x_0)}$ в любой точке x при $l \to 0$) [1,2], также как и интерпретация фрактальных функций, как сингулярных недифференцируемых функций [7], то это, строго говоря, математическая абстракция. Поскольку конечный результат (мультифрактальный спектр исследуемого нестационарного случайного процесса) имеет такую же структуру, как и соответствующий спектр действительно сингулярной функции, то его можно трактовать, с чисто математической точки зрения, как результат фрактальной обработки соответствующей сингулярной функции $\upsilon(x)$. Именно это имеет место в упомянутых работах [1–4]. Но физически мы имеем дело не с сингулярной функцией, описывающей наблюдаемый процесс (например с сигналом турбулентной скорости $\upsilon(x)$), а с вполне дифференцируемой гладкой случайной функцией, имеющей, однако, в инерциальном интервале турбулентности мультифрактальные свойства, которые реально и выявляются при статистической обработке (усреднении) измеряемых сигналов на достаточно больших временных (пространственных) интервалах наблюдений.

Это же в полной мере относится и к ионосферному сигналу $A(t)$ (или $s(t)$). И здесь работает наша мультифрактальная модель сигнала [5] для нестационарного случайного процесса $\Delta A(t)$ (или $\Delta s(t)$) с турбулентной самоподобной (фрактальной) структурой. Ни о какой сингулярной функции $A(t)$ (или $s(t)$) в [5] речь не идет. Сам процесс дифракции излучения на турбулентных неоднородностях ионосферы ограничен относительно большими размерами неоднородностей (l ? λ и L_0 ? l ? l_0, где λ – длина волны излучения, l_0, L_0 – внутренний и внешний масштабы турбулентности ионосферной плазмы). Мы имеем дело с гармоническими функциями (напряженностями полей $E(t)$ со случайными амплитудой $A(t)$ и фазой $s(t)$), для которых вполне работоспособны уравнения Максвелла. А в инерционном интервале $l_0 = l = L_0$ работает наша мультифрактальная модель принимаемого сигнала (и модель неоднородной ионосферной плазмы), для которой самоподобная (фрактальная) структура проявлялась также, как для случая геометрических фракталов с соответствующей сингулярной функцией [7].

Таким образом, при строгом математическом подходе к конечному результату мультифрактальной обработки турбулентного сигнала (будь это атмосферный сигнал $\upsilon(t)$ или ионосферный сигнал $A(t)$) можно говорить об этих функциях ($\upsilon(t)$ или $A(t)$) как о сингулярных функциях. Но это всего лишь

Основополагающим моментом в этих расчетах является соотношение (14) для квазистационарных условий записи флуктуаций сигнала на интервале $T_{лок}$:

$$\overline{|W(\tau,t_l)|_{\max}} = \overline{\left|\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\frac{t'-t_l}{\tau}\right)A(t')dt'\right|_{\max}} \; ; \; \overline{\left|\frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\left(\frac{t'-t_l}{\tau}\right)\Delta A(t')dt'\right|_{\max}} \; ; \qquad (17)$$

$$; \; \left|\int_{-\infty}^{\infty} dx\psi\left(x\right)\Delta A(x\tau)\right|_{\max} .$$

Здесь учтено, что при вейвлет-преобразовании ”убирается” регулярный тренд в анализируемой функции $A(t)$ (см. (3)).

Учитывая соотношения (10) и (13), далее удобно перейти от соотношения (17) к анализу поведения второго момента для модуля вейвлет-преобразования на квазистационарном локальном интервале $T_{лок}$:

$$\overline{|W(\tau)|^2} \; ; \; \int_{-\infty}^{+\infty}\int dx_1 dx_2 \psi(x_1)\psi(x_2)\overline{\Delta A(x_1\tau)\Delta A(x_2\tau)} . \qquad (18)$$

Для общего случая квазиоднородного случайного процесса $\Delta A(t)$ на интервале $T_{лок}$ [6]

$$\overline{\Delta A(x_1,\tau)\Delta A(x_2,\tau)} \; ; \; \overline{(\Delta A)^2\left[\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\tau\right]}\cdot\rho_A\left[(x_1-x_2)\tau\right], \qquad (19)$$

где $\overline{(\Delta A)^2}$, ρ_A – дисперсия и коэффициент корреляции флуктуаций $\Delta A(t)$. В соотношении (19) имеется ввиду, что характерный масштаб временных изменений функции $\overline{(\Delta A)^2}$ много больше соответствующего радиуса корреляций быстрых флуктуаций исследуемого процесса $\Delta A(t)$.

Если теперь учесть, что коэффициент корреляции $\rho_A\left[(x_1-x_2)\tau\right] \equiv \rho_A(\xi\tau)$ отличен от нуля лишь в области значений

$$\overline{\left[|W|_{\max}\right]^q} = \int_0^{\infty} \left[|W|_{\max}\right]^q w(|W|_{\max}) d|W|_{\max} = \qquad (13)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\overline{W}_{\max}}^{\infty} dx \left| x + \overline{W_{\max}} \right|^q \cdot \frac{1}{\sigma^2_{W_{\max}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2_{W_{\max}}} \right) \sim \left|\overline{W_{\max}}\right|^q .$$

Таким образом, если на локальном l-м интервале $T_{лок}$

$$\overline{|W(\tau, t_l)|_{\max}} \sim \sum_{k=1}^{N_k} \left| W(\tau, t_{k_l}) \right|_{\max} \sim \tau^{\alpha(t_l)}, \qquad (14)$$

то на всем интервале обработки T соотношение (2) принимает вид (ср. [5])

$$Z(q,\tau) \sim \int \left|\overline{W_{\max}}\right|^q \cdot \tau^{-D_A(\alpha)} d\alpha \sim \int d\alpha \tau^{\alpha q} \cdot \tau^{-D_A(\alpha)} \sim \tau^{\varphi_A(q)} . \quad (15)$$

Здесь $W(\tau) \sim \tau^{-D_A(\alpha)}$ – число локальных интервалов обработки с заданным (фиксированным) значением параметра α на всем интервале записи T; $D_A(\alpha)$ – фрактальная размерность исследуемого процесса на пространстве α-параметров; $\varphi_A(q)$ – обобщенный показатель Гельдера для изучаемого мультифрактального процесса.

Из соотношения (15) следуют известные соотношения для мультифрактального спектра исследуемого процесса $D_A(\alpha_q)$ и соответствующего показателя Гельдера α_q [5]:

$$\begin{cases} D_A(\alpha_q) = \alpha_q \cdot q - \varphi_A(q) \\ \alpha_q = \dfrac{d\varphi_A(q)}{dq} \end{cases} . \qquad (16)$$

Таким образом, метод ММВП может быть применен для мультифрактального анализа записи сигнала $A(t)$ при $q \geq 0$.

математическая абстракция. Реально речь идет о нестационарных гладких (дифференцируемых) функциях $A(t)$, $\upsilon(t)$, но со случайной структурой, которая в некотором инерционном интервале параметров исследуемого процесса имеет самоподобную (фрактальную) структуру. Носителем мультифрактальной меры этих процессов являются либо локальные структурные функции 2-го порядка $\overline{|\Delta\upsilon(\tau)|^2}$ или локальные отклики ВП на ограниченных локальных интервалах обработки τ – $|W(\tau, t_k)|$. Именно с учетом этого обстоятельства многие авторы (см. монографию [7]) при распространении волн в средах с фрактальной структурой или за фазовым экраном с такой же структурой работают с решением волнового уравнения Максвелла (т.е. с гармоническими функциями), адаптируя его к диапазонно-ограниченным процессам (фактически к инерционным интервалам турбулентности) при аппроксимации случайных процессов в виде, например функции Вейерштрасса для конечного числа $n < N$ локальных сумм показателя преломления среды, т.е. для гладкого (дифференцируемого) непрерывного процесса в отличие от сингулярной функции Вейерштрасса (при $N \to \infty$), которая имеет место для чисто математического (абстрактного) описания фрактальной структуры исследуемого процесса [7].

Итак, в исследованиях неоднородной структуры ионосферной плазмы, равно как и при аналогичных исследованиях неоднородной структуры турбулентности в других природных средах, понятие сингулярной функции может вводиться лишь как некоторая наглядная математическая абстракция для упрощенного описания наблюдаемого (исследуемого) мультифрактального процесса. В действительности же мы имеем дело с непрерывными гладкими, хотя и нестационарными случайными (турбулентными) процессами. В инерционных интервалах этих процессов проявляются их самоподобные (фрактальные) свойства. Мультифрактальный анализ этих процессов с применением обработки сигналов методами МСФ и ММВП позволяют получить искомую информацию о мультистепенных и обобщенном мультифрактальном спектрах этих нестационарных случайных процессов (см. [5,8,10]). Ни о каких реальных сингулярных функциях $A(t)$, $s(t)$, $\upsilon(t)$ и т. п. речи не идет. Для получения отдельных реализаций этих случайных турбулентных процессов при дистанционном зондировании соответствующих сред вполне работоспособны методы уравнений Максвелла, пригодные для гармонических сигналов. А при статистической фрактальной обработке принимаемых сигналов (с применением методов МСФ или ММВП) выявляется истинная мультифрактальная структура исследуемых нестационарных случайных процессов в пределах соответствующих инерционных интервалов этих турбулентных структур.

2. Мультифрактальный анализ сигналов с использованием ВП

Рассмотрим некоторые особенности применения ВП как локальной сингулярной меры при анализе сложных сигналов.

В методе ММВП из всей записи сигнала $A(t)$ синтезируется запись из набора максимальных модулей

локальных откликов ВП в точках t_k – $\left|W(\tau,t_k)\right|_{\max}$. При этом на локальном интервале обработки $T_{лок}$:

$$\left|W_{лок}(\tau,t_l)\right|_{\max}^q = \left[\sum_{k=1}^{N_k}\left|W(\tau,t_{l_k})\right|^q\right] > 0 . \qquad (10)$$

Здесь l_k - линия для ”мгновенных” максимумов $\left|W(\tau,t_{l_k})\right|$ на l-м интервале $T_л$.

Далее рассчитывается частичная сумма на всем интервале T (T ? $T_л$):

$$Z(q,\tau) = \sum_{i=1}^{N}\left|W(\tau,t_i)\right|_{\max}^q = \sum_{l=1}^{N_l}\left[\sum_{k=1}^{N_k}\left|W(\tau,t_{l_k})\right|_{\max}^q\right] = \sum_{l=1}^{N_l}\left|W_{лок}(\tau,t_l)\right|_{\max}^q . \qquad (11)$$

Для полного набора данных $N = N_l + N_k$ – суммарное число ”мгновенных” i-х откликов максимумов модулей ВП на всем интервале T.

При длительности вейвлета τ много больше длительности быстрых флуктуаций $\tau_{фл}$ сигнала $\Delta A(t)$ ”мгновенный” отклик ВП $\left|W(\tau,t_k)\right|_{\max}$ имеет квазинормальное распределение флуктуаций на интервале $T_{лок}$ (ср. [5]):

$$w(\left|W\right|_{\max}) ; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{W_{\max}}^2}\exp\left(-\frac{\left[\left|W\right|_{\max}-\overline{\left|W\right|_{\max}}\right]^2}{2\sigma_{W_{\max}}^2}\right). \qquad (12)$$

Здесь $\overline{\left|W\right|_{\max}}$, $\sigma_{W_{\max}}^2$ – среднее значение и дисперсия флуктуаций максимальных модулей откликов ВП.

В случае слабых флуктуаций ($\sigma_{W_{\max}}^2 = \overline{\left|W\right|_{\max}}^2$) [10]