

Федеральное агентство по науке и инновациям
Федеральное государственное научное учреждение
«Научно-исследовательский радиофизический институт»

Препринт № 532

**РАССЕЯНИЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ НА
ПОДПОВЕРХНОСТНОМ ВКЛЮЧЕНИИ МАЛЫХ
РАЗМЕРОВ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ**

А. В. Разин

Нижний Новгород 2010

Разин А. В.

Рассеяние волны Рэлея на подповерхностном включении малых размеров в упругом полупространстве // Препринт № 532. — Нижний Новгород: ФГНУ НИРФИ, 2010. 31 с.

В борновском приближении метода возмущений решена задача о рассеянии гармонической поверхностной акустической волны Рэлея на слабоконтрастной неоднородности малых по сравнению с длиной волны размеров, находящейся в упругом полупространстве вблизи его границы (подповерхностном включении). Материал включения отличается от материала полупространства только плотностью. Получены выражения для полей смещений в рассеянных объемных продольной и поперечных (SV - и SH -поляризации) волнах. Детально исследовано рассеяние рэлеевской волны в рэлеевскую волну. Получены выражения для вертикальных и горизонтальных компонент вектора смещений в рассеянной волне, а также для ее мощности излучения. Установлено, что зависимость мощности излучения рассеянной рэлеевской волны, создаваемой вертикальными движениями включения в поле падающей волны, от глубины расположения включения, пропорциональна четвертой степени функции, описывающей известную зависимость вертикальных смещений в поверхностной волне Рэлея от глубины. Соответственно, зависимость мощности излучения рассеянной рэлеевской волны, возникающей из-за горизонтальных движений включения, от величины заглупления включения, пропорциональна четвертой степени зависимости горизонтальных смещений в поверхностной волне Рэлея от глубины. При этом рассеянное поле создается, главным образом, вертикальными колебаниями включения в поле падающей волны. Мощность излучения рассеянной волны резко падает с увеличением глубины расположения подповерхностного включения, поэтому рассеяние рэлеевской волны в рэлеевскую волну оказывается эффективным лишь в тех случаях, когда включение находится на глубине, не превышающей приблизительно одной третьей части длины поперечной волны в упругой среде.

Исследование рассеяния волн различной физической природы на локализованных неоднородностях среды представляет значительный теоретический и практический интерес. Данная тематика охватывает весьма широкий круг явлений, и ей посвящено большое количество литературы. Наряду с электромагнитными и акустическими волнами интенсивно изучается распространение поверхностных акустических волн. Это необходимо для решения задач сейсмологии и сейсморазведки [1, 2], а также твердотельной микроэлектроники [3, 4].

Простейшим видом поверхностных акустических волн является волна Рэлея, которая может распространяться вдоль границы однородного изотропного упругого полупространства с вакуумом. Её скорость составляет приблизительно от 87 до 96 процентов скорости поперечной волны в твердой среде в зависимости от соотношения между модулями упругости [5, с. 110]. Соответствующие рэлеевской волне возмущения захватывают приповерхностный слой толщиной порядка длины волны. В случае источника ограниченных размеров амплитуда рэлеевской волны убывает с горизонтальным расстоянием r как $r^{-1/2}$ [1, Т. I, с. 214], то есть по закону цилиндрической, а не сферической геометрической расходимости. Таким образом, волна данного типа может эффективно распространяться на значительные расстояния от источника.

К настоящему времени в ряде работ рассмотрено рассеяние волн Рэлея на неровностях поверхности упругой среды, причем как регулярных, так и случайных. Результаты этих исследований обобщены в монографии [4]. Между тем, при решении задач подповерхностной сейсмической локации и неразрушающего контроля материалов возникает необходимость исследования процессов распространения упругих волн вблизи границы твердого полупространства при наличии в нем подповерхностной неоднородности ограниченных размеров (подповерхностного включения). Представляет интерес рассмотрение процессов взаимодействия зондирующих сигналов с неоднородностью и возбуждения рас-

сеянных упругих волн. Для решения обратной задачи, т. е. определения местоположения и восстановления размеров, формы и физических характеристик неоднородности, необходимо предварительно детально проанализировать решение прямой задачи.

Рассеяние упругих волн в полубезграничных твердых средах изучено недостаточно полно. В частности, не решены задачи, связанные с расчетами полей и энергетических характеристик волн, рассеянных подповерхностными неоднородностями, находящимися на глубинах порядка длины поверхностной волны Рэлея и меньше, когда влияние границы среды наиболее существенно.

Важные для практики вопросы, связанные с обнаружением и идентификацией подповерхностных объектов, возникают уже в рамках наиболее простой модели, когда исследуемая “фооновая” среда моделируется однородным изотропным упругим полупространством, а лоцируемая неоднородность является слабоконтрастной, т. е. её акустические свойства мало отличаются от свойств “фооновой” среды. При этом целесообразно ограничиться первым (борновским) приближением метода возмущений (см., например, [4, 6]). Данное приближение позволяет считать, что рассеянное поле возбуждается силовыми источниками, распределенными по занятой неоднородностью области твердого тела, причем конфигурация источников и их зависимость от времени определяется формой и внутренним строением неоднородности, а также пространственным распределением поля падающей волны. Задача рассеяния, таким образом, сводится к задаче о возбуждении упругих волн в твердом полупространстве зависящими от времени силами, произвольно распределенными внутри твердого тела.

Распространение плоских продольной и поперечной волн в слабонеоднородной твердой среде в борновском приближении метода возмущений рассмотрено в [1, Т. 2].

При действии вибрационных источников на границу упругой среды сферические продольные и поперечные волны (объем-

ные волны) распространяются преимущественно вглубь [7, 8]. Их использование для зондирования целесообразно в тех случаях, когда предполагается, что неоднородность находится на значительных по сравнению с длинами волн удалениях от поверхности полупространства.

Если неоднородность располагается вблизи границы среды и на относительно больших горизонтальных расстояниях от источника, более эффективным представляется применение для сейсмолокации и неразрушающего контроля материалов поверхностных волн Рэлея.

При прохождении рэлеевской волны лоцируемая неоднородность совершает сложные колебания, то есть представляет собой некоторый подповерхностный источник упругих волн достаточно общего вида. Зондирующий сигнал (падающая волна Рэлея) при этом рассеивается как в рэлеевскую волну, так и в объемные продольные и поперечные (*SV*- и *SH*-поляризации) волны. Наибольший интерес представляют рассеянные рэлеевские волны, поскольку они могут быть легко зарегистрированы на поверхности упругой среды. В связи с этим основное внимание будет уделено рассеянию рэлеевской волны в рэлеевскую волну.

Наиболее эффективно волна Рэлея рассеивается, по-видимому, на протяженных по вертикали объектах (геологических разломах, основаниях фундаментов, поверхностях склейки двух материалов в микроэлектронике), которые тянутся от поверхности до глубин, значительно превышающих длину волны. Поскольку амплитуды вертикальных и горизонтальных смещений частиц среды в поверхностной волне имеют достаточно сложную зависимость от глубины [1, Т. I, с. 157; 9, с. 31; 10, с. 232], представляет интерес выяснить, какие именно участки неоднородности вносят определяющий вклад в формирование рассеянного поля. Для этого необходимо рассмотреть рассеиватель, вертикальные размеры которого много меньше длины волны Рэлея. Если и горизонтальные размеры рассеивателя малы, то его можно приближенно считать точечным объектом. Данное приближение яв-

ляется весьма удобным, поскольку позволяет сравнительно просто произвести все необходимые вычисления.

В связи с использованием приближения точечного рассеивателя необходимо сделать следующее замечание. Точечный объект не может эффективно рассеивать акустические волны. Хорошо известна задача о рассеянии звука на диске малых размеров [11]. Если волновой вектор падающей волны перпендикулярен плоскости диска, то в случае жесткого диска амплитуда рассеянного поля A_s пропорциональна $(ka)^3$, где a — радиус диска, и k — волновое число падающей волны [11, с. 44]. В случае акустически мягкого диска имеем $A_s \sim (ka)$ [11, с. 46]. Если же указанный волновой вектор параллелен плоскости диска, то акустическая волна не рассеивается. Учитывая связь между задачами излучения и рассеяния можно представить рассеивающий диск как силовой источник, действующий в среде. Направленное действие сосредоточенной силы на какую-либо точку, находящуюся на поверхности или внутри идеальной жидкости, не приводит к возбуждению акустических волн. Эффективно возбуждать акустические волны в жидкости или в газе может только точечный источник типа центра расширения (центра давления). Если же сила приложена к какой-либо точке в упругой среде, то возбуждаются продольные и поперечные сферические волны (объемные волны), и, если точка приложения силы находится вблизи поверхности упругой среды (или на самой поверхности), то и поверхностную волну Рэлея [12, 13]. В связи с этим можно предположить, что объект малых по сравнению с длинами упругих волн размеров в твердой среде будет достаточно эффективным рассеивателем.

В настоящей работе в борновском приближении решена задача о рассеянии гармонической поверхностной волны Рэлея на слабоконтрастной подповерхностной неоднородности малых по сравнению с длиной волны размеров (подповерхностном включении). Для точек наблюдения, находящихся на больших расстояниях от рассеивателя, получены приближенные аналитические

выражения для полей смещений рассеянных продольной, поперечных (SV - и SH -поляризации) и рэлеевской волн. Подробно исследована мощность излучения рассеянной волны Рэлея.

Пусть плоскость $z = 0$ декартовой системы координат совпадает с поверхностью изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z \geq 0$ и характеризуемого плотностью ρ , модулем всестороннего сжатия κ и модулем чистого сдвига μ . Скорости продольной c_l и поперечной c_t волн выражаются через плотность и параметры упругости твердого тела формулами [14]:

$$c_l = [(\kappa + 4\mu/3)/\rho]^{1/2}, \quad c_t = (\mu/\rho)^{1/2}. \quad (1)$$

Внутри твердого тела находится неоднородность (подповерхностное включение), геометрический центр которой располагается на глубине $z = h$ под началом координат.

Иногда вместо модуля всестороннего сжатия κ вводится параметр Ламэ $\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu$ (отметим, что модуль чистого сдвига μ также называется параметром Ламэ).

В общем случае лоцируемая неоднородность отличается от фоновой среды плотностью, а также модулями упругости, которые являются функциями пространственных координат.

Уравнение, описывающее гармонические волновые возмущения с циклической частотой ω в неоднородной упругой среде [1, Т. II, с. 685; 10, с. 24], после некоторых преобразований можно представить в виде (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен):

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 u_j + \left(\kappa + \frac{1}{3}\mu\right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \\ - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) = -fv_j. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) индексы j и k принимают значения 1, 2, 3, которые нумеруют соответственно декартовы координаты x , y , z , причем по дважды повторяющимся индексам производится суммирование

от 1 до 3. В правой части (2) стоит соответствующая компонента периодической силы $\vec{f}_V(x, y, z)$, действующей на единицу объема твердого тела. Уравнение (2) необходимо решать с учетом условий излучения [15] и граничных условий на поверхности полупространства, которые будут указаны ниже.

Плотность среды и модули сжатия и сдвига представим в виде:

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x, y, z) \quad \kappa = \kappa_0 + \kappa'(x, y, z), \quad \mu = \mu_0 + \mu'(x, y, z). \quad (3)$$

Здесь ρ_0 , κ_0 и μ_0 — постоянные “фоновые” значения параметров твердого тела, а ρ' , κ' и μ' — малые по сравнению с фоновыми значениями величины (слабоконтрастные неоднородности):

$$|\rho'| \ll \rho_0, \quad |\kappa'| \ll \kappa_0, \quad |\mu'| \ll \mu_0.$$

Смещения частиц среды \vec{u} представим суммой некоторого поля \vec{u}_0 , которое существовало бы в однородной упругой среде с параметрами ρ_0 , κ_0 и μ_0 (поле падающей зондирующей волны), и рассеянного поля \vec{u}_1 , связанного с наличием в среде неоднородностей:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1.$$

Учитывая малость изменения параметров среды будем считать, что $|\vec{u}_1| \ll |\vec{u}_0|$. Для зондирующего волнового поля \vec{u}_0 справедливо уравнение Ламэ

$$\rho_0 \omega^2 u_{0j} + \left(\kappa_0 + \frac{1}{3} \mu_0 \right) \frac{\partial^2 u_{0k}}{\partial x_j \partial x_k} + \mu_0 \frac{\partial^2 u_{0j}}{\partial x_k \partial x_k} = -f_{Vj}. \quad (4)$$

Уравнение для рассеянного поля \vec{u}_1 получим вычитая (4) из (2) с учетом (3) и пренебрегая затем в соответствии с борновским приближением [4, 6] членами второго порядка малости:

$$\rho_0 \omega^2 u_{1j} + \left(\kappa_0 + \frac{1}{3} \mu_0 \right) \frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial x_j \partial x_k} + \mu_0 \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial x_k \partial x_k} = -f_{Vj}^{\text{eff}}, \quad (5)$$

где

$$f_{V_j}^{\text{eff}} = \rho' \omega^2 u_{0j} + \left(\kappa' + \frac{1}{3} \mu' \right) \frac{\partial^2 u_{0k}}{\partial x_j \partial x_k} + \mu' \frac{\partial^2 u_{0j}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial \kappa'}{\partial x_j} \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu'}{\partial x_j} \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu'}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_{0k}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_k} \right). \quad (6)$$

Для рассеянного поля \vec{u}_1 на поверхности упругого полупространства выполняются условия, соответствующие свободной границе, то есть условия отсутствия касательных и нормальных напряжений:

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = 0, \quad (7)$$

где $\sigma_{ij}^{(1)}$ — тензор напряжений, соответствующий смещениям \vec{u}_1 . Компоненты тензора напряжений связаны со смещениями формулой:

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \lambda_0 \operatorname{div} \vec{u}_1 \delta_{ij} + \mu_0 \left(\frac{\partial u_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{1j}}{\partial x_i} \right), \quad (8)$$

где $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Правая часть (6) уравнения (5) имеет размерность силы, отнесенной к единице объема, и представляет собой некоторый эффективный силовой источник, параметры которого определяются характеристиками неоднородности ρ', κ' и μ' и конфигурацией падающего поля \vec{u}_0 . Указанная правая часть оказывается довольно громоздкой, поэтому в дальнейшем рассмотрении ограничимся случаем, когда имеют место только неоднородности плотности, $\rho'(x, y, z) \neq 0$, а модули упругости среды постоянны: $\kappa' = \mu' = 0$. Данное предположение позволяет значительно упростить расчеты, поскольку производные плотности по координатам не входят (в отличие от производных модулей упругости) в уравнение (2), описывающее волновые движения упругой среды, и, в то же время, проанализировать основные закономерности процесса рассеяния, в частности, детально исследовать поля и энергетические характеристики рассеянных сигналов.

Таким образом, для определения рассеянного поля \vec{u}_1 необходимо задать падающее зондирующее поле (на практике это поле определяется имеющимися в наличии сейсмовибраторами), а также указать сейсмоакустические свойства неоднородности.

Если вертикальные размеры неоднородности малы по сравнению с длиной волны, то добавочную плотность $\rho'(x, y, z)$ можно представить в виде

$$\rho'(x, y, z) = m(x, y) \delta(z - h), \quad (9)$$

где $m(x, y)$ — избыточная масса неоднородности, приходящаяся на единицу площади плоскости $z = h$, и δ — символ дельта-функции Дирака.

Пусть зондирующий сигнал представляет собой гармоническую поверхностную волну Рэлея циклической частоты ω , распространяющуюся вдоль границы упругого полупространства в направлении оси x . Глубина расположения лоцируемой неоднородности h не должна превышать длины λ_R рэлеевской волны (в противном случае рассеянный сигнал будет экспоненциально малым). При этом рассеянные волновые поля будут возбуждаться эффективным гармоническим источником, действующим на единицу площади плоскости $z = h$ с силой

$$\vec{f}^{\text{eff}} = m(x, y) \omega^2 \vec{u}_0(x, y, h). \quad (10)$$

В формуле (10) $\vec{u}_0(x, y, h)$ представляет собой вектор смещений в зондирующей поверхностной волне Рэлея. Выражения для компонент этого вектора будут приведены ниже.

Таким образом, для решения задачи рассеяния необходимо предварительно решить задачу о возбуждении упругих волн в твердом полупространстве со свободной границей гармоническими силами, произвольно распределенными по плоскости $z = h$.

Решение задачи о возбуждении упругих волн в твердом полупространстве подповерхностными источниками, распределенными по плоскости $z = h$, следует рассматривать в двух областях:

$0 \leq z \leq h$ и $z \geq h$. На горизонте приложения силы $z = h$ выполняются условия равенства трех компонент вектора смещений (условие отсутствия разрывов в среде):

$$u_{2x} = u_{3x}, \quad u_{2y} = u_{3y}, \quad u_{2z} = u_{3z}, \quad z = h, \quad (11)$$

(индексы "2" и "3" относятся соответственно к слою $0 \leq z \leq h$ и к полупространству $z \geq h$). Условия для тангенциальных и нормальных компонент тензора напряжений на горизонте приложения силы $z = h$ имеют вид [16]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2)} - \sigma_{xz}^{(3)} &= f_x(x, y), \\ \sigma_{yz}^{(2)} - \sigma_{yz}^{(3)} &= f_y(x, y), \\ \sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{zz}^{(3)} &= f_z(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

На свободной поверхности упругой среды $z = 0$ выполняются условия отсутствия напряжений:

$$\sigma_{zz}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(2)} = 0, \quad z = 0. \quad (13)$$

При этом смещения в твердом теле будут описываться однородным уравнением Ламэ:

$$\rho_0 \omega^2 \vec{u}_{2,3} + (\lambda_0 + \mu_0) \text{grad div } \vec{u}_{2,3} + \mu_0 \Delta \vec{u}_{2,3} = 0. \quad (14)$$

При решении уравнения (14) с граничными условиями (11)–(13) необходимо также учесть условия излучения при $z \rightarrow \infty$ [15].

Волновые возмущения удобно описывать с помощью скалярных $\psi_{2,3}$ и векторных $\vec{A}_{2,3}$ потенциалов, которые связаны со смещениями соотношениями:

$$\vec{u}_{2,3} = \text{grad } \psi_{2,3} + \text{rot } \vec{A}_{2,3}. \quad (15)$$

Для потенциалов справедливы уравнения

$$\Delta \psi_{2,3} + k_l^2 \psi_{2,3} = 0, \quad (16)$$

$$\Delta \vec{A}_{2,3} + k_t^2 \vec{A}_{2,3} = 0, \quad (17)$$

где $k_{l,t} = \omega/c_{l,t}$ — волновые числа продольной и поперечной волн. Уравнения (16), (17) необходимо решать совместно с граничными условиями (11)–(13) и условиями излучения.

В области $z \geq h$ существуют продольная волна и поперечные SV - и SH -волны, распространяющиеся вглубь полупространства (в положительном направлении оси z). В слое $0 \leq z \leq h$ указанные три типа волн распространяются как от источника к границе (против оси z), так и от границы по оси z , поэтому потенциалы представим в виде

$$\psi_2 = \psi_2^{(+)} + \psi_2^{(-)}, \quad \vec{A}_2 = \vec{A}_2^{(+)} + \vec{A}_2^{(-)}, \quad (18)$$

где верхний индекс “(+)” означает, что волна распространяется в сторону возрастающих значений z , а индекс “(–)” означает, что волна распространяется в сторону убывающих значений z .

Для решения уравнений (16), (17) воспользуемся методом преобразований Фурье. Введем интегральное представление гармонических источников

$$\vec{f}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \quad (19)$$

с формулой обращения

$$\vec{F}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}. \quad (20)$$

В (19), (20) $\vec{F}(\vec{k})$ — пространственный спектр функции $\vec{f}(\vec{r})$, $\vec{r} = (x, y)$ — двумерный радиус-вектор, а $\vec{k} = (k_x, k_y)$ — двумерный волновой вектор в плоскости xOy , $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y$, $d\vec{k} = dk_x dk_y$, $d\vec{r} = dx dy$. Решения уравнений (16), (17) будем искать в виде:

– слой $0 \leq z \leq h$:

$$\psi_2^{(+)}(\vec{r}, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_2^{(+)}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r} + i\kappa_l z} d\vec{k}, \quad (21)$$

$$\vec{A}_2(\vec{r}, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{\tilde{A}}_2^{(+)}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r} + i\kappa_l z} d\vec{k}, \quad (22)$$

$$\psi_2^{(-)}(\vec{r}, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_2^{(-)}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\kappa_l(z-h)} d\vec{k}, \quad (23)$$

$$\vec{A}_2^{(-)}(\vec{r}, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{\tilde{A}}_2^{(-)}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r} - i\kappa_l(z-h)} d\vec{k}; \quad (24)$$

– полупространство $z \geq h$:

$$\psi_3(\vec{r}, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_3(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r} + i\kappa_l(z-h)} d\vec{k}, \quad (25)$$

$$\vec{A}_3(\vec{r}, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{\tilde{A}}_3(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r} + i\kappa_l(z-h)} d\vec{k}. \quad (26)$$

В (21)–(26) $\kappa_{l,t} = (k_{l,t}^2 - k^2)^{1/2}$, $k = |\vec{k}|$. Для сходимости интегралов (25), (26) при $z \rightarrow \infty$ необходимо определить аналитические функции κ_l и κ_t на комплексной плоскости k следующим образом:

$$(k_{l,t}^2 - k^2)^{1/2} = i \left| (k^2 - k_{l,t}^2)^{1/2} \right| \quad \text{при } k > k_{l,t}.$$

Из результатов работы [16] следует, что выражения для фурье-образов волновых полей имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_2^{(+)}(\vec{k}) &= -\frac{1}{2\rho_0 c_t^2 k_t^2 \kappa_l R_0(k)} \times \\ &\times \left\{ \left[R_m(k) e^{i\kappa_l h} - 4\kappa_l \kappa_t (k_t^2 - 2k^2) e^{i\kappa_t h} \right] (\vec{k}\vec{F}) - \right. \\ &\left. - \kappa_l \left[R_m(k) e^{i\kappa_l h} + 4k^2 (k_t^2 - 2k^2) e^{i\kappa_t h} \right] F_z \right\}, \quad (27)\end{aligned}$$

$$\tilde{A}_2^{(+)} = \tilde{A}_{2SV}^{(+)} + \tilde{A}_{2SH}^{(+)}, \quad (28)$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_{2SV}^{(+)}(\vec{k}) &= \frac{(\vec{k} \times \vec{e}_z)}{2\rho_0 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_l R_0(k)} \times \\ &\times \left\{ \kappa_t \left[4k^2 (k_t^2 - 2k^2) e^{i\kappa_l h} + R_m(k) e^{i\kappa_t h} \right] (\vec{k}\vec{F}) - \right. \\ &\left. - k^2 \left[4\kappa_l \kappa_t (k_t^2 - 2k^2) e^{i\kappa_l h} - R_m(k) e^{i\kappa_t h} \right] F_z \right\}, \quad (29)\end{aligned}$$

$$\tilde{A}_{2SH}^{(+)}(\vec{k}) = \frac{\kappa_t \vec{k} - k^2 \vec{e}_z}{2\rho_0 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_l} (k_x F_y - k_y F_x) e^{i\kappa_t h}, \quad (30)$$

$$\tilde{\psi}_2^{(-)}(\vec{k}) = \frac{(\vec{k}\vec{F}) - \kappa_l F_z}{2\rho_0 c_t^2 k_t^2 \kappa_l}, \quad (31)$$

$$\tilde{A}_2^{(-)} = \tilde{A}_{2SV}^{(-)} + \tilde{A}_{2SH}^{(-)}, \quad (32)$$

$$\tilde{A}_{2SV}^{(-)}(\vec{k}) = -\frac{\kappa_t (\vec{k}\vec{F}) + k^2 F_z}{2\rho_0 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_l} (\vec{k} \times \vec{e}_z), \quad (33)$$

$$\tilde{A}_{2SH}^{(-)}(\vec{k}) = -\frac{\kappa_t \vec{k} + k^2 \vec{e}_z}{2\rho_0 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_l} (k_x F_y - k_y F_x), \quad (34)$$

$$\tilde{\psi}_3(\vec{k}) = \frac{(\vec{k}\vec{F}) + \kappa_l F_z}{2\rho_0 c_t^2 k_t^2 \kappa_l} + \tilde{\psi}_2^{(+)}(\vec{k}) e^{i\kappa_l h}, \quad (35)$$

$$\tilde{A}_3 = \tilde{A}_{3SV} + \tilde{A}_{3SH}, \quad (36)$$

$$\tilde{A}_{3SV}(\vec{k}) = \frac{\kappa_t (\vec{k}\vec{F}) - k^2 F_z}{2\rho_0 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_l} (\vec{k} \times \vec{e}_z) + \tilde{A}_{2SV}^{(+)}(\vec{k}) e^{i\kappa_t h}, \quad (37)$$

$$\vec{A}_{3SH}(\vec{k}) = \frac{\kappa_t \vec{k} - k^2 \vec{e}_z}{2\rho_0 c_t^2 k^2 \kappa_l^2 \kappa_t} (k_x F_y - k_y F_x) + \vec{A}_{2SH}^{(+)}(\vec{k}) e^{i\kappa_t h}. \quad (38)$$

В (28), (32), (36) учтено, что при наличии в среде плоских границ поперечную волну с произвольным направлением вектора смещений удобно представить в виде суммы волны, в которой вектор смещений параллелен границе (SH -волна), и волны, в которой вектор смещений имеет перпендикулярную к границе составляющую (SV -волна) [9].

В (27), (29) введены обозначения

$$R_0(k) = (k_l^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 \kappa_l \kappa_t,$$

$$R_m(k) = (k_l^2 - 2k^2)^2 - 4k^2 \kappa_l \kappa_t,$$

$\vec{k} \times \vec{e}_z = k_y \vec{e}_x - k_x \vec{e}_y$, $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ — орты координатных осей:

Подстановка выражений (27)–(38) в соответствующие интегралы Фурье (21)–(26) позволяет получить решение рассматриваемой задачи излучения гармонических упругих волн в интегральном виде.

Остановимся на вычислении интегралов Фурье (21)–(26), описывающих волновые поля. Для решения задач, обладающих цилиндрической симметрией, используется преобразование Фурье – Бесселя, позволяющее получить выражения для полей гармонических волн в виде однократных интегралов по модулю волнового числа k в пределах от нуля до бесконечности [1, 5, 9, 10, 17]. В этих интегралах следует заменить функции Бесселя на соответствующие функции Ханкеля (это позволяет производить интегрирование в пределах $-\infty < k < \infty$), причем для последних берется асимптотика при больших значениях аргумента. Для точек наблюдения, расположенных на больших по сравнению с длинами волн расстояниях от источника, при вычислении полей объемных волн следует перейти под интегралами к сферической системе координат и воспользоваться методом стационарной фазы. При вычислении полей поверхностных волн Рэлея необходи-

мо вычислить вычет в соответствующем полюсе подынтегрального выражения.

Двойные интегралы Фурье (21)–(26) можно также приближенно вычислить для точек наблюдения, находящихся в волновой зоне. Для этого под интегралами (21)–(26) следует перейти к полярным координатам (r, φ) на плоскости xOy и (k, φ') на плоскости k_xOk_y :

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \quad k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}, \quad \varphi' = \operatorname{arctg}\left(\frac{k_y}{k_x}\right).$$

Интеграл по полярному углу φ' приближенно вычисляется методом стационарной фазы. Это приводит к выражениям для потенциалов в виде однократных интегралов по модулю волнового вектора. Данное преобразование имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k_x, k_y) e^{i(\kappa_l, z + \vec{k}\vec{r})} dk_x dk_y \approx \\ & \approx \sqrt{\frac{2\pi}{r}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty} \Phi(k \cos \varphi, k \sin \varphi) e^{i(\kappa_l, z + kr)} \sqrt{k} dk, \quad (39) \end{aligned}$$

где величина Φ обозначает соответствующую часть подынтегральной функции.

Отметим, что точность вычисления интегралов по углу φ' методом стационарной фазы соответствует точности вычисления асимптотики функции Бесселя нулевого порядка $J_0(kr)$ при больших значениях аргумента, $kr \gg 1$. Действительно, известно [18, с. 303], что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\varphi' - \varphi)} d\varphi' = J_0(kr). \quad (40)$$

Соотношение (40) следует также из формулы (2.5.27.19) на с. 440

в [19]. Вычисляя интеграл в левой части (40) методом стационарной фазы при $kr \gg 1$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\varphi' - \varphi)} d\varphi' \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right). \quad (41)$$

Выражение в правой части (41) представляет собой асимптотику функции Бесселя нулевого порядка $J_0(kr)$ при больших значениях аргумента, $kr \gg 1$ (см., например, формулу (9.2.1) на с. 185 в [20], а также [18, с. 302]).

Таким образом, преобразование (39) двойного интеграла Фурье в однократный соответствует по точности стандартной процедуре, используемой для оценок однократных интегралов Фурье – Бесселя, описывающих поля осесимметричных источников.

Для вычисления полей объемных волн в оставшемся однократном интеграле по модулю волнового вектора k (см. правую часть (39)) следует перейти к сферическим координатам (R, θ, φ) :

$$R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \theta = \arccos(z/R), \quad \varphi = \arctg(y/x).$$

Данный интеграл также следует вычислять методом стационарной фазы. Выражения для смещений получаются с помощью соотношения (15).

Отметим, что при вычислении полей объемных волн интегралы Фурье вида (27)-(38) могут быть приближенно оценены двумерным методом стационарной фазы [21].

Расчет показывает, что, как и следовало ожидать, в волновой зоне смещения в продольной волне (P -волне) имеют только радиальную R -компоненту, а вектора смещений в поперечной волне вертикальной поляризации (SV -волне) и в поперечной волне горизонтальной поляризации (SH -волне) — соответственно лишь

θ - и φ -компоненты:

$$u_P^{(R)} = \frac{\pi}{\rho_0 c_t^2 R_0(k_l \sin \theta)} \frac{e^{ik_l R}}{R} \left\{ \left[R_0(k_l \sin \theta) e^{-ik_l h \cos \theta} - R_m(k_l \sin \theta) e^{ik_l h \cos \theta} + 4k_l \cos \theta (k_t^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta) \times \sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta} e^{ih\sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta}} \right] F_r(\vec{k}_l^{(s)}) \sin \theta + \left[R_0(k_l \sin \theta) e^{-ik_l h \cos \theta} + R_m(k_l \sin \theta) e^{ik_l h \cos \theta} + 4k_l^2 \sin^2 \theta (k_t^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta) e^{ih\sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta}} \right] F_z(\vec{k}_l^{(s)}) \cos \theta \right\}, \quad (42)$$

$$u_{SV}^{(\theta)} = -\frac{\pi}{\rho_0 c_t^2 R_0(k_t \sin \theta)} \frac{e^{ik_t R}}{R} \left\{ \left[R_0(k_t \sin \theta) e^{-ik_t h \cos \theta} + R_m(k_t \sin \theta) e^{ik_t h \cos \theta} + 4k_t^4 \sin^2 \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \times e^{ih\sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta}} \right] F_r(\vec{k}_t^{(s)}) \cos \theta - \left[R_0(k_t \sin \theta) e^{-ik_t h \cos \theta} - R_m(k_t \sin \theta) e^{ik_t h \cos \theta} + 4k_t^3 \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \times \sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta} e^{ih\sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta}} \right] F_z(\vec{k}_t^{(s)}) \sin \theta \right\}, \quad (43)$$

$$u_{SH}^{(\varphi)} = \frac{2\pi}{\rho_0 c_t^2} \frac{e^{ik_t R}}{R} F_\varphi(\vec{k}_t^{(s)}) \cos(k_t h \cos \theta). \quad (44)$$

В (42)–(44) введены обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{k}_l^{(s)} &= (k_l \sin \theta \cos \varphi, k_l \sin \theta \sin \varphi), \\ \vec{k}_t^{(s)} &= (k_t \sin \theta \cos \varphi, k_t \sin \theta \sin \varphi) \end{aligned}$$

— волновые вектора, соответствующие точкам стационарной фазы,

$$F_r(\vec{k}_{l,t}^{(s)}) = F_x(\vec{k}_{l,t}^{(s)}) \cos \varphi + F_y(\vec{k}_{l,t}^{(s)}) \sin \varphi \quad (45)$$

и

$$F_\varphi(\vec{k}_t^{(s)}) = F_y(\vec{k}_t^{(s)}) \cos \varphi - F_x(\vec{k}_t^{(s)}) \sin \varphi \quad (46)$$

— соответственно горизонтальная радиальная и азимутальная составляющие пространственного спектра вектора силы, R — расстояние до точки наблюдения.

Для вычисления поля поверхностной волны Рэлея следует взять вычеты в полюсах $k = k_R$ подынтегральных выражений в соответствующих интегралах вида (39). Волновое число k_R рэлеевской волны определяется из решения уравнения $R_0(k) = 0$. Выражения для смещений получаются с помощью соотношения (15). В результате для горизонтальной $u_{Rr}(r, \varphi, z)$ и вертикальной $u_{Rz}(r, \varphi, z)$ компонент смещений в поверхностной волне Рэлея получаем (в цилиндрических координатах):

$$u_{Rr}(r, \varphi, z) = \frac{1}{q_l} D [i(k_t^2 - 2k_R^2) \nu_x(h) F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) + 2k_R q_l \nu_z(h) F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)] \nu_x(z) e^{ik_R r}, \quad (47)$$

$$u_{Rz}(r, \varphi, z) = -\frac{1}{q_t} D [2k_R q_t \nu_x(h) F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) - i(k_t^2 - 2k_R^2) \nu_z(h) F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)] \nu_z(z) e^{ik_R r}. \quad (48)$$

В (47), (48) использованы обозначения:

$$F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) = F_x(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) \cos \varphi + F_y(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) \sin \varphi, \quad (49)$$

$$\nu_x(\eta) = 2\xi^2 e^{-k_t \eta \sqrt{\xi^2 - n^2}} + (1 - 2\xi^2) e^{-k_t \eta \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (50)$$

$$\nu_z(\eta) = (1 - 2\xi^2) e^{-k_t \eta \sqrt{\xi^2 - n^2}} + 2\xi^2 e^{-k_t \eta \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (51)$$

$$D = \frac{\pi k_t^2 (2k_R^2 - k_t^2)}{2\rho_0 c_t^2 k_R R'_0(k_R)} \sqrt{\frac{2\pi}{k_R r}} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad (52)$$

$$q_l = \sqrt{k_R^2 - k_t^2}, \quad q_t = \sqrt{k_R^2 - k_t^2}, \quad (53)$$

$$R'_0(k_R) = \left. \frac{dR_0}{dk} \right|_{k=k_R} = \frac{2}{k_R (2k_R^2 - k_t^2)^2} [k_t^6 (4k_R^2 - k_t^2) - 8k_R^6 (k_t^2 - k_t^2)], \quad (54)$$

$$\xi = \frac{k_R}{k_t} = \frac{c_t}{c_R}$$

— отношение скоростей поперечной и рэлеевской волн, $n = c_t/c_l$
 — отношение скоростей поперечной и продольной волн в твердой среде.

Выражения (42)–(44), (47), (48) позволяют вычислять поля смещений продольных, поперечных и поверхностных рэлеевских волн, возбуждаемых в упругом полупространстве гармоническими силовыми источниками, произвольно распределенными по плоскости $z = h$. В частном случае $h = 0$ из формул (42)–(44), (47), (48) следуют известные [22] выражения, описывающие смещения в продольной, поперечных (*SV*- и *SH*-поляризации) и рэлеевской волнах, возбуждаемых в упругом полупространстве гармоническими силовыми источниками, произвольно распределенными по его поверхности.

Для получения выражений для смещений в упругих волнах, рассеянных неоднородностью вида (9), в выражения (42)–(44), (47), (48) необходимо подставить пространственный спектр эффективного силового источника

$$\vec{F}^{\text{eff}}(\vec{k}) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} m(x, y) \vec{u}_0(x, y, h) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}. \quad (55)$$

Если и горизонтальные размеры неоднородности малы, то в (9) можно приближенно считать, что

$$m(x, y) = \Delta m \delta(x) \delta(y), \quad (56)$$

где Δm — избыточная масса неоднородности (точечная неоднородность). Из (10), (55), (56) следует, что в случае точечной неоднородности компоненты вектора пространственного спектра эффективного силового источника имеют вид:

$$F_x(k_x, k_y) = \frac{\omega^2}{(2\pi^2)^2} \Delta m u_{0x}(0, 0, h), \quad (57)$$

$$F_z(k_x, k_y) = \frac{\omega^2}{(2\pi^2)^2} \Delta m u_{0z}(0, 0, h). \quad (58)$$

Из геометрии задачи очевидно, что при распространении зондирующей волны вдоль оси x в области неоднородности y -компонента вектора смещений в падающей волне равна нулю, и согласно (45), (49)

$$F_r(\vec{k}_{l,t}^{(s)}) = F_x(\vec{k}_{l,t}^{(s)}) \cos \varphi, \quad (59)$$

$$F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) = F_x(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) \cos \varphi. \quad (60)$$

Для того, чтобы конкретизировать вид спектров (57), (58), необходимо задать конфигурацию падающей волны.

Остановимся подробнее на выборе зондирующего сигнала. Пусть для определенности падающая на неоднородность рэлеевская волна возбуждается точечным гармоническим поверхностным силовым источником, действующим по нормали к поверхности упругой среды. Источник расположен в точке с координатами $(-x_0, 0, 0)$ и имеет амплитуду силы f_0 . Как следует из общих выражений (47), (48) (см. также [7, 8]) в точке расположения неоднородности $(0, 0, h)$ компоненты вектора смещений в зондирующей волне Рэлея имеют вид:

$$u_x(0, 0, h) = D_0 \frac{k_t^2 - 2k_R^2}{2k_R} \nu_x(h) e^{ik_R x_0}, \quad (61)$$

$$u_z(0, 0, h) = D_0 \sqrt{k_R^2 - k_t^2} \nu_z(h) e^{i(k_R x_0 + \pi/2)}, \quad (62)$$

где

$$D_0 = \frac{f_0}{\rho_0 c_t^2} \sqrt{\frac{k_R}{2\pi x_0}} \frac{k_t^2}{R'_0(k_R)} e^{i3\pi/4}. \quad (63)$$

Подставляя в формулы (42)–(44), (47), (48) пространственные спектры эффективных силовых источников (57)–(60) с учетом (61), (62) получаем выражения для полей рассеянных объемных и поверхностной рэлеевской волн.

Аналитическое исследование выражений для смещений (42)–(44) не представляется возможным из-за их громоздкости. Относительно простыми являются выражения для горизонтальной и вертикальной компонент вектора смещений в рассеянной волне Рэлея. Из выражений (47), (48), (57), (58), (60)–(62) получаем:

$$U_{Rr}^{\text{scat}}(r, \varphi, z) = -\frac{2k_R^2 - k_t^2}{4\pi\rho_0^2 c_t^2 q^2(\xi)} \Delta m f_0 \frac{e^{ik_R x_0}}{\sqrt{x_0}} \times \\ \times \left[\sqrt{k_R^2 - k_t^2} \nu_x^2(h) \cos \varphi + \sqrt{k_R^2 - k_l^2} \nu_z^2(h) \right] \nu_x(z) \frac{e^{ik_R r}}{\sqrt{r}}, \quad (64)$$

$$U_{Rz}^{\text{scat}}(r, \varphi, z) = \frac{k_R \sqrt{k_R^2 - k_l^2}}{2\pi\rho_0^2 c_t^2 q^2(\xi)} \Delta m f_0 \frac{e^{ik_R x_0}}{\sqrt{x_0}} \times \\ \times \left[\sqrt{k_R^2 - k_t^2} \nu_x^2(h) \cos \varphi + \sqrt{k_R^2 - k_l^2} \nu_z^2(h) \right] \nu_z(z) \frac{e^{i(k_R r + \pi/2)}}{\sqrt{r}}, \quad (65)$$

где

$$q(\xi) = \frac{R'_0(k_R)}{k_t^3} = \frac{2}{\xi(2\xi^2 - 1)^2} [4\xi^2 - 1 - 8\xi^6(1 - n^2)]. \quad (66)$$

Воспользовавшись соотношением

$$2k_R^2 - k_t^2 = 2k_R \sqrt{q_l} \sqrt{q_t},$$

выражения (64), (65) можно переписать в виде:

$$U_{Rr}^{\text{scat}}(r, \varphi, t) = -Q \sqrt{q_t} \nu_x(z) \frac{e^{ik_R r}}{\sqrt{r}}, \quad (67)$$

$$U_{Rz}^{\text{scat}}(r, \varphi, z) = Q \sqrt{q_l} \nu_z(z) \frac{e^{i(k_R r + \pi/2)}}{\sqrt{r}}, \quad (68)$$

где

$$Q = \frac{k_R \sqrt{q_l}}{2\pi\rho_0^2 c_t^2 q^2(\xi)} \Delta m f_0 \frac{e^{ik_R x_0}}{\sqrt{x_0}} [q_t \nu_x^2(h) \cos \varphi + q_l \nu_z^2(h)]. \quad (69)$$

Входящие в (47), (48), (61), (62), (64), (65) и (67), (68) функции $\nu_x(z)$ (50) и $\nu_z(z)$ (51) описывают зависимости соответствующих компонент смещений в волне Рэля от вертикальной координаты. Эти зависимости хорошо известны (см., например, рис. 6.5 на с. 31 в [9] и рис. 16 на с. 57 в [23]).

Первое слагаемое в квадратных скобках в (64), (65) описывает те части смещений в рассеянной волне Рэля, которые связаны с горизонтальными движениями неоднородности в поле зондирующей волны. Наличие в данном слагаемом множителя $\cos \varphi$ показывает, что величина этой части смещений зависит от направления в горизонтальной плоскости. Второе слагаемое в указанных квадратных скобках определяется вертикальными колебаниями неоднородности. Соответствующая им часть смещений в поле рассеянной волны Рэля обладает цилиндрической симметрией в горизонтальной плоскости.

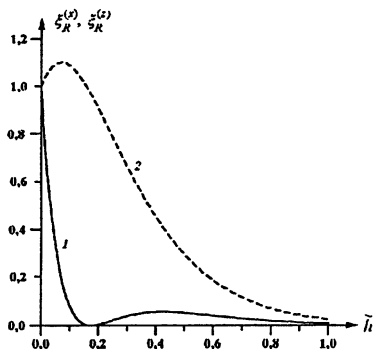


Рис. 1. Зависимости величин $\zeta_x(h)$ (1) и $\zeta_z(h)$ (2) от приведенной глубины расположения неоднородности $\tilde{h} = h/\lambda_t$ (λ_t — длина поперечной волны) при $n = 1/\sqrt{3}$

Функции $\nu_x^2(h) = \zeta_x(h)$ и $\nu_z^2(h) = \zeta_z(h)$ описывают зависимости амплитуд частей смещений, связанных соответственно с горизонтальными и вертикальными движениями неоднородности в поле зондирующей волны, от глубины расположения этой неоднородности (рис. 1). Из рассмотрения рис. 1 следует, что всегда

$\zeta_z(h) > \zeta_x(h)$; кроме того, $q_l > q_t$, и, следовательно, определяющий вклад в поле рассеянной волны Рэлея дают вертикальные колебания неоднородности. Функции $\zeta_{x,z}(h)$ подробно исследованы в [16].

Наряду с вычислением волновых полей значительный интерес представляют также расчеты энергетических характеристик различных типов рассеянных волн — плотностей потоков энергии излучения и мощностей излучения. Выражения для смещений (42)–(44), (47), (48) позволяют вычислить потоки энергии излучения. Мощности излучения получаются путем интегрирования этих потоков через поверхность полусферы большого радиуса с центром в начале координат для объемных волн и через поверхность полубесконечного цилиндра с осью, совпадающей с координатной осью z , для поверхностной волны Рэлея. Однако для рэлеевской волны мощность излучения можно получить более удобным способом, называемым методом реакции излучения [24]. Для произвольного распределения гармонических сил по плоскости $z = h$ мощность излучения волны Рэлея дается выражением [16]:

$$W_R = -\frac{2\pi^3 k_R}{\rho_0 \omega R'_0(k_R)} \left\{ \alpha_0^2 \int_0^{2\pi} |F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)|^2 d\varphi + \right. \\ \left. + \beta_0^2 \int_0^{2\pi} |F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)|^2 d\varphi + 2\alpha_0 \beta_0 \times \right. \\ \left. \times \int_0^{2\pi} \text{Im} [F_r^*(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)] d\varphi \right\}, \quad (70)$$

где

$$\alpha_0 = k_t^2 \sqrt{q_t} \nu_x(h), \quad (71)$$

$$\beta_0 = -k_t^2 \sqrt{q_l} \nu_z(h). \quad (72)$$

Подставляя в (70) пространственные спектры эффективных силовых источников (57), (58), (60) получаем выражение для

мощности излучения рассеянной поверхностной волны Рэлея:

$$W_R^{\text{scat}} = -\frac{\Delta m^2 \omega^3 f_0^2 k_t^8 k_R^2 q_l}{16\pi \rho_0^3 c_t^4 [R'_0(k_R)]^3 x_0} [q_t^2 \nu_x^4(h) + 2q_l^2 \nu_z^4(h)]. \quad (73)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести отношение γ_R мощности излучения рассеянной волны W_R^{scat} к мощности излучения зондирующей рэлеевской волны $W_R^{(z)}(0)$, которая дается выражением [13, 25]

$$W_R^{(z)}(0) = -\frac{f_0^2 \omega^3 k_R \sqrt{k_R^2 - k_t^2}}{4\rho_0 c_t^4 R'_0(k_R)}. \quad (74)$$

Для γ_R из (73), (74) получаем формулу:

$$\gamma_R = \frac{\Delta m^2 \omega^5 \xi(\xi^2 - n^2)}{\rho_0^2 c_t^5 x_0} \frac{1}{2\pi q^2(\xi)} \left[\frac{\xi^2 - 1}{2(\xi^2 - n^2)} \nu_x^4(h) + \nu_z^4(h) \right]. \quad (75)$$

Отметим, что величина γ_R , которая характеризует эффективность рассеяния рэлеевской волны в рэлеевскую волну на точечном подповерхностном включении, пропорциональна пятой степени частоты, $\gamma_R \sim \omega^5$. Такая частотная зависимость характерна для коэффициента затухания поверхностной волны Рэлея вследствие рассеяния на мелкомасштабных трехмерных шероховатостях поверхности упругого полупространства [26, 27] (см. также [4, § 13.4]).

В выражение (75) для γ_R входит горизонтальное расстояние x_0 между источником зондирующей волны и неоднородностью. Если в качестве падающего поля рассмотреть плоскую волну (такая идеализация широко используется в задачах, связанных с рассеянием волн различной физической природы), то величина γ_R не будет зависеть от взаимного расположения источника волн и рассеивателя.

Выражения (64), (65), (73) для полей смещений и мощности излучения, соответствующих рассеянной поверхностной волне

Рэлея, можно обобщить на случаи неоднородностей в виде лежащих в горизонтальной плоскости отрезка нити, прямоугольника или круга. Для этого необходимо вычислить пространственный спектр эффективного силового источника с помощью формулы (55). Полученные результаты применимы также для случая, когда неоднородность находится на поверхности упругого полупространства. Частный случай рассеяния рэлеевской волны на тонком диске, который находится на поверхности твердой среды, рассмотрен в работе [28].

Если выразить расстояние x_0 в единицах длины поперечной волны λ_t , то величину γ_R можно также записать в виде:

$$\gamma_R = \left(\frac{\Delta m}{\rho_0 \lambda_t^3} \right)^2 \frac{\lambda_t}{x_0} \frac{(2\pi)^4 \xi (\xi^2 - n^2)}{q^2(\xi)} \left[\frac{\xi^2 - 1}{2(\xi^2 - n^2)} \nu_x^4(h) + \nu_z^4(h) \right]. \quad (76)$$

Далее, если считать, что подповерхностное включение представляет собой однородный шар весьма малого радиуса $L \ll \lambda_t$, то

$$\gamma_R = \gamma_1 \cdot \gamma_2, \quad (77)$$

где

$$\gamma_1 = (2\pi)^4 \left(\frac{4}{3} \pi \right)^2 \left(\frac{\rho'}{\rho_0} \right)^2 \left(\frac{L}{\lambda_t} \right)^6 \frac{\lambda_t}{x_0}, \quad (78)$$

$$\gamma_2 = \frac{\xi (\xi^2 - n^2)}{q^2(\xi)} \gamma_3, \quad (79)$$

$$\gamma_3 = \tilde{\sigma}_x(h) + \sigma_z(h), \quad (80)$$

$$\tilde{\sigma}_x(h) = \frac{\xi^2 - 1}{2(\xi^2 - n^2)} \sigma_x(h), \quad (81)$$

$$\sigma_{x,z}(h) = \zeta_{x,z}^2(h) = \nu_{x,z}^4(h). \quad (82)$$

Перейдем к количественным оценкам. Пусть радиус включения L в десять раз меньше длины поперечной волны λ_t , ρ' составляет двадцать процентов от величины ρ_0 , а включение находится на расстоянии $x_0 = 10 \lambda_t$ от сейсмодвибратора. Тогда по

порядку величины $\gamma_1 \approx 10^{-4}$. Данная оценка является “оптимистической”, поскольку коэффициент γ_1 существенным образом зависит от избыточной плотности включения и весьма существенным — от его характерного размера (напомним, что полученный результат справедлив при $|\rho'| \ll \rho_0$ и $L \ll \lambda_t$). При уменьшении значений ρ' и L величина γ_1 может уменьшиться на несколько порядков. Действительно, если $\rho'/\rho = 0,1$, $L/\lambda_t = 0,05$, то $\gamma_1 \approx 4 \cdot 10^{-7}$.

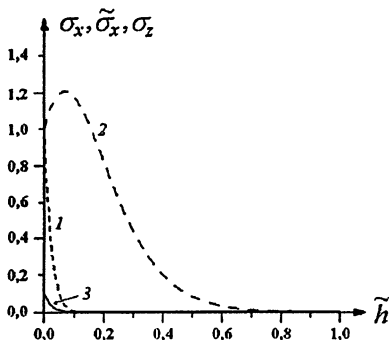


Рис. 2. Зависимости величин σ_x (1), σ_z (2) и $\tilde{\sigma}_x$ (3) от приведенной глубины расположения рассеивателя $\tilde{h} = h/\lambda_t$ при $n = c_t/c_l = 1/\sqrt{3}$

В выражении (80) для γ_3 первое и второе слагаемые связаны соответственно с горизонтальными и вертикальными движениями неоднородности в поле падающей волны. Каждое из этих слагаемых пропорционально четвертой степени функций, описывающих зависимости соответствующих компонент вектора смещений в рэлеевской волне от глубины (см. (82), (47), (48)). Зависимости величин σ_x , σ_z и $\tilde{\sigma}_x$ от приведенной глубины расположения рассеивателя при $n = 1/\sqrt{3}$ представлены на рис. 2. Из рассмотрения рис. 2 следует, что определяющий вклад в мощность излучения рассеянной волны Рэлея дают вертикальные колебания малой неоднородности в поле зондирующего сигнала. Связанная

с горизонтальными колебаниями неоднородности мощность излучения рэлеевской волны резко падает при увеличении глубины расположения рассеивателя.

Зависимости величины γ_2 (79) от приведенной глубины расположения рассеивателя $\tilde{h} = h/\lambda_t$ при различных значениях параметра $n = c_t/c_l$ представлены на рис. 3. Из рассмотрения рис. 3 следует, что при относительно малых значениях величины n функция $\gamma_2(\tilde{h})$ имеет максимум при $\tilde{h} \gtrsim 0,1$ (кривая 2).

С ростом n этот максимум становится всё менее выраженным, и, затем, функция $\gamma_2(\tilde{h})$ становится монотонно убывающей (см. кривую 3). Численное значение величины γ_2 всегда существенно меньше единицы. Таким образом, отношение мощностей рассеянной и падающей волн Рэля для случаев неоднородности малых размеров, плотность которой незначительно отличается от плотности фоновой (“вмещающей”) среды имеет порядок величины 10^{-6} и менее. Рассеяние рэлеевской волны в рэлеевскую волну оказывается относительно эффективным лишь в тех случаях, когда рассеиватель находится на глубине, не превышающей приблизительно одной третьей части длины поперечной волны.

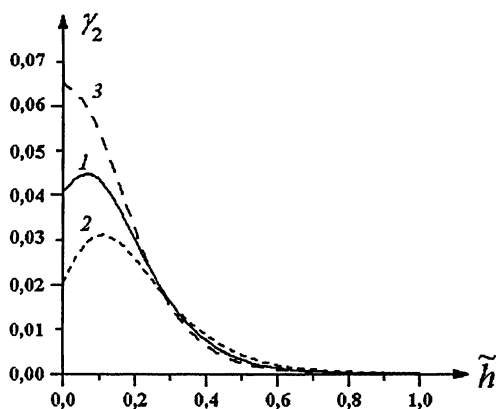


Рис. 3. Зависимости величин $\gamma_2(\tilde{h})$ при различных значениях параметра $n = c_t/c_l$: 1 — $n = 1/\sqrt{3}$; 2 — $n = 0,4$; 3 — $n = 0,65$

Данные рис. 3 для γ_2 и выражение (78) для γ_1 позволяют выполнять практические оценки мощности излучения рэлеевской волны, рассеянной подповерхностным включением малых размеров.

Таким образом, в работе получены выражения для поля смещений и мощности излучения рассеянной поверхностной акустической волны Рэлея, возникающей при взаимодействии зондирующей волны Рэлея с подповерхностной неоднородностью малых размеров. Выполнены количественные оценки мощности излучения рассеянной рэлеевской волны, позволяющие оценить возможность использования волны данного типа для локации неоднородностей, находящихся вблизи поверхности упругой среды. Самостоятельный интерес представляют полученные в работе выражения для полей смещений гармонических продольной и поперечной (*SV*- и *SH*-поляризаций) сферических волн, а также выражения для поля смещений и мощности излучения волны Рэлея, возбуждаемых распределенными подповерхностными силовыми источниками.

Список литературы

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Т. 1, 2 / Пер. с англ. Левшина А. Л. (Т. 1), Калинина А. В. (Т. 2). — М.: Мир, 1983. 520 с. (Т. 1), 360 с. (Т. 2).
2. Шерифф Р. Е., Гелдарт Л. П. Сейсморазведка. Т. 1, 2 / Пер. с англ. Ефимовой Е. А. (Т. 1), Ефимовой Е. А. и Стор М. А. (Т. 2) под ред. Калинина А. В. — М.: Мир, 1987. 448 с. (Т. 1), 400 с. (Т. 2).
3. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. — М.: Наука, 1981. 288 с.
4. Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. — М.: Наука, 1991. 416 с.
5. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989. 416 с.

6. Чернов Л. А. Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975. 171 с.
7. Miller G. F., Pursey H. On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1955. V. 233, № 1192. P. 55–69.
8. Гущин В. В., Докучаев В. П., Заславский Ю. М., Конюхова И. Д. О распределении мощности между различными типами излучаемых волн в полубезграничной упругой среде. В кн.: Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками / Под ред. Николаева А. В. — М.: Наука, 1981. С. 113–118.
9. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. 343 с.
10. Петрашень Г. И. Основы математической теории распространения упругих волн. В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 18. — Л.: Наука (ленинград. отд-е), 1978. С. 1–248.
11. Шендеров Е. Л. Излучение и рассеяние звука. — Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
12. Johnson L. R. Green's function for Lamb's problem // Geophys. Journ. Roy. Astr. Soc. 1974. V. 37, № 1. P. 99–131.
13. Разин А. В. Мощность излучения упругих волн, возбуждаемых в твердом полупространстве подповерхностным гармоническим источником // Акуст. журн. 2009. Т. 55, № 2. С. 226–231.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1987. 248 с.
15. Фелсен С., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т. 1. / Пер. с англ. под ред. М. Л. Левина. — М.: Мир, 1978, 551 с.
16. Разин А. В. Излучение волн Рэлея и Стонели распределенными подповерхностными силовыми источниками // Препринт № 530. — Нижний Новгород: ФГНУ НИРФИ, 2009. 51 с.
17. Чичинин И. С. Вибрационное излучение сейсмических волн. — М.: Недра, 1984. 224 с.
18. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. / Пер. с англ. под ред. Адлилуева С. П., Кошлякова Н. С., Мышкица А. Д., Свешникова А. Г. — М.: Изд-во Иностранной литературы, 1960. 886 с.

19. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1981. 800 с.
20. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. / Пер с англ. под ред. Диткина В. А. и Кармазиной Л. Н. — М.: Наука, 1979. 832 с.
21. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977. 368 с.
22. Докучаев В. П., Разин А. В. Возбуждение упругих волн в однородном полупространстве поверхностными источниками // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 10. С. 81–87.
23. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. — Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
24. Докучаев В. П. Энергетические характеристики излучения упругих волн сейсмическими силовыми источниками // Изв. РАН. Физика Земли. 1996. № 1. С. 75–80.
25. Разин А. В. Об излучении волн Стоунли нормальным к границе газ–твердое тело гармоническим силовым источником // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. № 12. С. 100–104.
26. Уразаков Е. И., Фальковский Л. А. О распространении рэлеевской волны по шероховатой поверхности // ЖЭТФ. 1972. Т. 63, вып. 6 (12). С. 2297–2303.
27. Maradudin A. A., Mills D. L. Attenuation of Rayleigh surface waves by surface roughness // Appl. Phys. Lett. 1976. V. 28, № 10. P. 573–575.
28. Заславский Ю. М. Энергетика рассеянных упругих полей, возникающих при дифракции волны Рэлея на поверхностном возмущении полуограниченной среды // Препринт № 267. — Горький: Н.-и. радиофиз. ин-т, 1989. 15 с.

Разин Андрей Владимирович

**Рассеяние волны Рэлея на подповерхностном включении
малых размеров в упругом полупространстве**

Подписано в печать 29.04.2010 г. Формат 60 × 84/16.

Бумага писчая. Объем 1,99 усл. п. л.

Тираж 50. Заказ 5596

Отпечатано в НИРФИ
Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25