

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ  
ПОЛЯРИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО  
РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ

I. ДЕКАРТОВЫЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ  
БАЗИС.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
**Федеральное государственное научное учреждение**  
**«Научно-исследовательский радиофизический институт»**  
**(ФГНУ НИРФИ)**

## **Препринт № 534**

Математическое описание  
поляризации космического радиоизлучения  
I. Декартовый поляризационный базис.

Е. Н. Виняйкин

**Нижний Новгород**

**2010**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ  
КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ.

I. ДЕКАРТОВЫЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ БАЗИС. //

Препринт № 534. – Нижний Новгород: ФГНУ НИРФИ, 2010. – с.66

УДК 524.6-77

Рассмотрены вопросы математического описания частично поляризованного космического радиоизлучения и воздействия на него. Применены определения ортогональных поляризационных базисов и знака параметра Стокса  $V$ , принятые в современной радиоастрономии. Дано определение коэффициента поляризации, соответствующее принятой ориентации декартовой системы координат (ось  $x$  снизу вверх (на север), ось  $y$  справа налево (к востоку)). Показано, что часто используемая в литературе формула для вычисления позиционного угла плоскости поляризации частично линейно-поляризованного радиоизлучения имеет ограниченную применимость. Изложена корректная процедура вычисления этой величины. Рассмотрено влияние эффекта Фарадея в космических средах на радиоинтерферометрические поляризационные измерения при помощи антенн с линейной поляризацией.

Первая часть данной работы посвящена описанию поляризации в декартовом (прямоугольном) базисе.

Может быть полезен студентам старших курсов и магистрантам астрономической специальности в качестве учебного пособия.

## 1. Введение

Радиоизлучение Галактики и многих других разнообразных по природе космических объектов в общем случае является частично поляризованным, то есть содержит наряду с хаотически поляризованной компонентой и поляризованную составляющую. Синхротронная составляющая радиоизлучения межзвездной среды Галактики и её структурных образований, других спиральных галактик, преобладающая на метровых и дециметровых волнах, содержит в себе линейно поляризованную компоненту [1-10]. Радиоизлучение остатков сверхновых в нашей и других галактиках, квазаров, радиогалактик и других активных внегалактических радиоисточников является преимущественно синхротронным и также содержит линейно-поляризованную компоненту [11-16]. Существенно более слабая циркулярно-поляризованная компонента в радиоизлучении внегалактических источников также интенсивно исследуется и является, как и линейная, важным источником информации о магнитных полях и физических параметрах как самих источников, так и сред, в которых распространяется генерируемое в них радиоизлучение [14, 17-19]. Большая степень поляризации свойственна радиоизлучению пульсаров, причем наблюдается как линейная, так и круговая поляризации [20-21]. Всплески радиоизлучения Солнца в микроволновом диапазоне и всплески III типа обладают частичной круговой поляризацией [22, 23]. Спорадическое радиоизлучение вспыхвающих звёзд на сантиметровых волнах также характеризуется круговой поляризацией, достигающей иногда до 100% [24]. Декаметровое спорадическое радиоизлучение Юпитера частично эллиптически поляризовано, а дециметровое радиоизлучение радиационных поясов этой планеты частично линейно поляризовано [22, 25]. Собственное тепловое радиоизлучение Луны, Меркурия и Марса является частично линейно поляризованным из-за различия коэффициентов отражения волн, поляризованных в плоскости падения и перпендикулярно ей на границе раздела грунт-вакуум [25, 26]. Тепловое субмиллиметровое и

инфракрасное излучение несферических пылинок в диффузной межзвездной среде, межзвездных облаках и их комплексах частично линейно поляризовано из-за упорядоченной ориентации пылинок в магнитных полях [27-29] (ориентация межзвездных пылинок приводит, также, к частичной линейной поляризации света звезд). Исследуется линейная поляризация реликтового радиоизлучения [30-35]. Кроме поляризационных исследований континуального радиоизлучения ведутся наблюдения поляризации в радиолиниях нейтрального водорода, гидроксила, водяного пара и многих других атомов и молекул в нашей и других галактиках [36-37].<sup>1</sup>

Приведенных примеров, перечень которых можно и продолжить, по-видимому, достаточно, чтобы утверждать, что поляризационные исследования радиоизлучения (и излучения в других диапазонах электромагнитных волн) являются важнейшим источником информации о магнитных полях в разнообразных космических объектах, механизмах излучения и физических параметрах космических источников, средах распространения радиоволн между источником и радиотелескопом (межгалактическая, межзвездная, межпланетная, ионосфера), космологических параметрах Вселенной и гравитационных волнах в ней. Измерений одной лишь интенсивности (яркостной температуры) излучения во многих случаях совершенно недостаточно для получения полной информации о космическом источнике.

В данной работе дано изложение математического аппарата, применяющегося для описания частично поляризованного излучения и воздействия на него [38-41]. В отличие от [38-40] в данной работе применены определения ортогональных поляризационных базисов и знака параметра Стокса  $V$ , принятые в современной астрономии [42-

---

<sup>1</sup> В работах [1-37] можно найти обширные списки публикаций по каждому из исследуемых в них видов фоновых радиоизлучений или космических радиоисточников.

45]. Соответственно принятой ориентации декартовой системы координат (ось  $x$  снизу вверх (на север), ось  $y$  справа налево (к востоку)), дано обратное обычно используемому определению коэффициента поляризации. Приводимые примеры и иллюстрации общих соотношений относятся к радиоастрономии. Показано, что часто используемая в литературе формула для вычисления позиционного угла плоскости поляризации, имеет ограниченную применимость. Приведена корректная процедура вычисления этой величины. Рассмотрено влияние эффекта Фарадея в космических средах на радиоинтерферометрические поляризационные измерения с помощью антенн, имеющих линейную поляризацию.

Первая часть данной работы посвящена описанию поляризации в прямоугольном (декартовом) базисе.

Рассмотрим совокупность однородных плоских волн, распространяющихся к наблюдателю от некоторого космического радиисточника с непрерывным частотным спектром, в бесконечно узком конусе с осью вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$  (по оси  $z$ ) и угловым раствором  $2\frac{\Delta k}{k} \ll 1$ , с частотами в узкой полосе  $\Delta\nu \ll \nu$ , формируемой приёмным устройством с частотной характеристикой  $K(\nu)$  ( $k = 2\pi\nu/c = |\mathbf{k}|$  – волновое число,  $\nu$  – центральная частота). Вектор электрического поля  $\mathbf{E}(t)$  этой совокупности плоских волн является случайным и может быть представлен в виде

$$\mathbf{E}(t) = E(t)e^{i(2\pi\nu t - kz)}\mathbf{e}(t), \quad (1)$$

где  $E(t) = E_0(t)e^{i\psi(t)}$  – комплексная амплитуда электрического поля,  $\mathbf{e}(t)$  – случайный комплексный единичный вектор,  $|\mathbf{e}(t)| = 1$

с проекциями  $e_x(t)$ ,  $e_y(t)$  на оси  $x$ ,  $y$ <sup>2, 3</sup>.

Проекции  $E_x(t)$ ,  $E_y(t)$  вектора  $\mathbf{E}(t)$  на оси  $x$  и  $y$  прямоугольной системы координат (рис.1) при  $z = 0$  выглядят следующим образом (при этом опускаем временной множитель  $e^{i2\pi\nu t}$ , понимая под  $E_x(t)$ ,  $E_y(t)$  комплексные амплитуды проекций вектора электрического поля при  $z = 0$ ; множитель  $e^{-ikz}$  при  $z \neq 0$  всегда можно восстановить)

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_0(t)e^{i\psi(t)}e_x(t) = E_{0x}(t)e^{i\psi_x(t)}, \\ E_y(t) &= E_0(t)e^{i\psi(t)}e_y(t) = E_{0y}(t)e^{i\psi_y(t)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $E_{0x}(t)$ ,  $E_{0y}(t)$  – амплитуды,  $\psi_x(t)$ ,  $\psi_y(t)$  – фазы соответственно  $x$  и  $y$  составляющих вектора  $\mathbf{E}(t)$ .

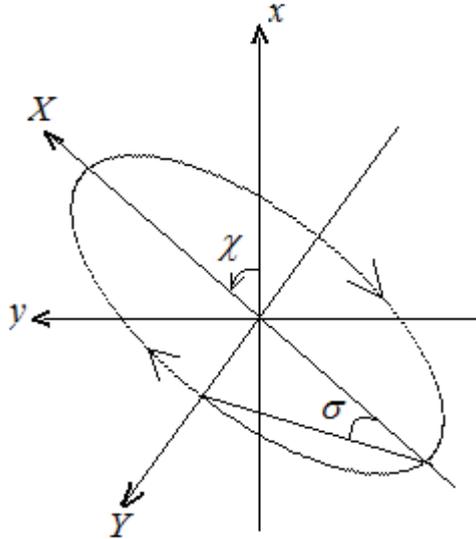
Амплитуды  $E_0(t)$ ,  $E_{0x}(t)$ ,  $E_{0y}(t)$ , проекции  $e_x(t)$ ,  $e_y(t)$  и фазы  $\psi(t)$ ,  $\psi_x(t)$ ,  $\psi_y(t)$  – случайные функции времени, медленно меняющиеся в масштабе периода  $1/\nu$ . Характерное время изменения этих величин порядка  $1/2\pi\Delta\nu$ . Электрический вектор  $\mathbf{E}(t)$  описывает в плоскости  $x$ ,  $y$  эллипс (см. рис.1) за период  $1/\nu$ , размеры, форма и ориентация этого эллипса существенно меняются за время  $\sim 1/2\pi\Delta\nu$  и практически постоянны в интервале времени  $\Delta t \ll 1/2\pi\Delta\nu$

---

<sup>2</sup> Если излучение полностью поляризовано, то  $\mathbf{e}$ -постоянный единичный комплексный (в частном случае действительный) вектор.

<sup>3</sup> Ориентация осей  $x$ ,  $y$  ( $x$  – вертикальная ось, направленная вверх на север,  $y$  – горизонтальная, направленная влево на восток) выбрана в согласии с определением Международного Астрономического союза (МАС) [42-45].

$(1/2\pi\Delta\nu - \text{длительность цуга когерентности})^4$ . При этом интервал  $\Delta t$  может быть много больше периода высокочастотных колебаний  $1/\nu$ .



**Рис.1.** Эллипс поляризации излучения в плоскости  $x, y$  с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и осью  $z$ , направленными на читателя. Направление вращения электрического вектора соответствует левой поляризации согласно определению, принятому в радиоастрономии [42-45]. Оси  $X, Y$  направлены вдоль осей эллипса поляризации;  $\sigma$  – угол эллиптичности, причем  $\text{tg}\sigma = \frac{-}{+}$  (длина малой оси/длина большой оси), причём знак « $-$ » берется для правой поляризации, знак « $+$ » для левой;  $\chi$  – угол ориентации большой оси эллипса или позиционный угол, отсчитываемый от оси  $x$  против часовой стрелки.

Как уже отмечалось, космическое радиоизлучение содержит в общем случае как неполяризованную, так и поляризованную (в общем случае эллиптически поляризованную) составляющие. Компоненты  $E_{\text{хпр}}(t), E_{\text{упр}}(t)$  неполяризованной составляющей некогерентны. Это

---

<sup>4</sup> Уравнение эллипса можно получить, восстановив в (2) временной множитель, взяв реальные части и исключив  $2\pi\nu t$ .

означает, что при любой ориентации прямоугольной системы координат  $x, y$  имеем  $\overline{E_{xnp}(t)E_{ynp}^*(t)} = 0$ , где черта означает усреднение по времени за интервал  $\gg 1/2\pi\Delta\nu$ , а звездочкой обозначено комплексное сопряжение. В поляризованной составляющей принимаемого радиоизлучения  $\overline{E_{xp}(t)E_{yp}^*(t)} \neq 0$ , если только не выполняются условия  $E_{xp} = 0$  или  $E_{yp} = 0$  (ниже индекс «р» у компонент поля поляризованной составляющей будем опускать, если заранее сказано, что речь идет о ней или о полностью поляризованном излучении). Это обусловлено тем, что отношение амплитуд  $E_{0x}/E_{0y}$  ( $E_{0x}/E_{0y} \geq 0$ ) и разность фаз  $\psi_{xy} = \psi_x - \psi_y$  ( $-\pi \leq \psi_{xy} \leq \pi$ ) поляризованной составляющей не зависят от времени. Форма (отношение длин осей), ориентация и направление обхода эллипса поляризации поляризованной составляющей, задаваемые единичным вектором  $\mathbf{e}(t)$ , постоянны во времени, флуктуирует лишь размер эллипса.

## 2. Вектор Джонса. Коэффициент поляризации

*Поляризованное* (в общем случае эллиптически поляризованное) излучение или поляризованная составляющая частично поляризованного квазимонохроматического излучения описывается тремя параметрами<sup>5</sup>:

**интенсивность** 
$$I_p = \frac{c}{4\pi} (\overline{E_{0x}(t)^2} + \overline{E_{0y}(t)^2}),$$

---

<sup>5</sup> В случае монохроматической волны добавляется четвертый параметр—фаза. В рассматриваемом случае квазимонохроматической волны фаза является случайной величиной с характерным временем изменения  $1/2\pi\Delta\nu$ .

отношением осей  $p = \operatorname{tg} \sigma = \mp \frac{\text{длина малой оси эллипса}}{\text{длина большой оси эллипса}}$

и

углом ориентации большой оси эллипса  $\chi$  (см. рис.1).

В выражении для интенсивности  $c$  – скорость света, в формуле для отношения длин осей эллипса поляризации знак «плюс» берётся для левой поляризации, у которой  $\sigma > 0$  (см. рис.1). Величина  $\sigma$  называется углом эллиптичности (или просто эллиптичностью) и изменяется в пределах  $-\frac{\pi}{4} \leq \sigma \leq +\frac{\pi}{4}$ . Угол ориентации большой оси эллипса  $\chi$  называют в радиоастрономии позиционным углом поляризации, причём видимые значения заключены в интервале  $0 \leq \chi < \pi$ .<sup>6</sup> Квазимонохроматическое излучение в течение времени, много меньшего времени когерентности, но много большего периода высокочастотных колебаний, может быть охарактеризовано также комплексным  $2 \times 1$  вектором Джонса, строящимся из комплексных амплитуд  $E_x, E_y$   $x, y$  – компонент электрического вектора

---

<sup>6</sup> Состояния поляризации, отличающиеся по величине позиционного угла на  $n\pi$  ( $n = \pm 1, \pm 2 \dots$ ) и одинаковые во всём остальном, физически неразличимы. Из-за эффекта Фарадея при квазипродольном распространении частично эллиптически (линейно) поляризованного радиоизлучения в магнитоактивной среде между областью генерации и радиотелескопом позиционный угол изменяется и это изменение может превысить по абсолютной величине  $\pi$  радиан. Поэтому существует неопределённость  $m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ) в значении измеренного позиционного угла плоскости поляризации, которая устраняется путём многочастотных поляризационных измерений, причём для выбора интервала между частотами используется независимая информация о среде распространения.

поперечной плоской электромагнитной волны в точке наблюдения ( $z=0$ ) следующим образом:<sup>7</sup>

$$\mathbf{E}_{x,y}(t) = \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x}(t)e^{i\psi_x(t)} \\ E_{0y}(t)e^{i\psi_y(t)} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Величины  $E_{0x}(t)/E_{0y}(t)$  и  $\psi_x(t) - \psi_y(t)$  полностью поляризованного излучения, как уже отмечалось, постоянны во времени. Поэтому, если отвлечься от флуктуаций амплитуды, состояние поляризации может быть охарактеризовано одним постоянным во времени комплексным числом, называемым *коэффициентом поляризации*<sup>8</sup>

$$K_{x,y} = \frac{E_x}{E_y} = \frac{E_{0x}}{E_{0y}} e^{i(\psi_x - \psi_y)}. \quad (4)$$

Вводится комплексная плоскость, по оси абсцисс которой откладывается реальная часть  $\text{Re} K_{x,y}$ , а по оси ординат мнимая  $\text{Im} K_{x,y}$ . Начало координат на плоскости  $\text{Re} K_{x,y}$ ,  $\text{Im} K_{x,y}$  соответствует горизонтальной линейной поляризации (параллельно оси  $y$ ), бесконечно удаленная точка соответствует вертикальной линейной

---

<sup>7</sup> Вектор Джонса является вектором в унитарном пространстве, образованном всеми векторами, получающимися при рассмотрении всех возможных пар комплексных чисел  $E_x, E_y$ . Описание квазимонохроматического излучения вектором Джонса ограничивается случаем полной поляризации.

<sup>8</sup> В [40] состояние поляризации описывается величиной  $\frac{E_y}{E_x}$ ; там принято противоположное определение правой (левой) поляризации и используется система декартовых прямоугольных координат  $x, y$ , повернутая относительно той, которая принята в данной работе (рис.1), на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке.

поляризации (параллельно оси  $x$ ), точкам оси абсцисс соответствуют поляризационные состояния с линейной поляризацией, причём точке с координатами  $(1, 0)$  соответствует линейная поляризация с позиционным углом  $45^\circ$ , а точке с координатами  $(-1, 0)$  соответствует линейная поляризация с позиционным углом  $135^\circ$ . Далее, точке  $(0, i)$  соответствует правая круговая поляризация, точке  $(0, -i)$  соответствует левая круговая поляризация. Всем остальным точкам комплексной плоскости соответствуют поляризационные состояния с эллиптической поляризацией: в верхней полуплоскости с правой, в нижней – с левой.

Как будет показано ниже, вектор Джонса полностью поляризованного излучения может быть выражен через эллиптичность и позиционный угол следующим образом<sup>9</sup>

$$\begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \cos \sigma \cos \chi - i \sin \sigma \sin \chi \\ \cos \sigma \sin \chi + i \sin \sigma \cos \chi \end{pmatrix}. \quad (5)$$

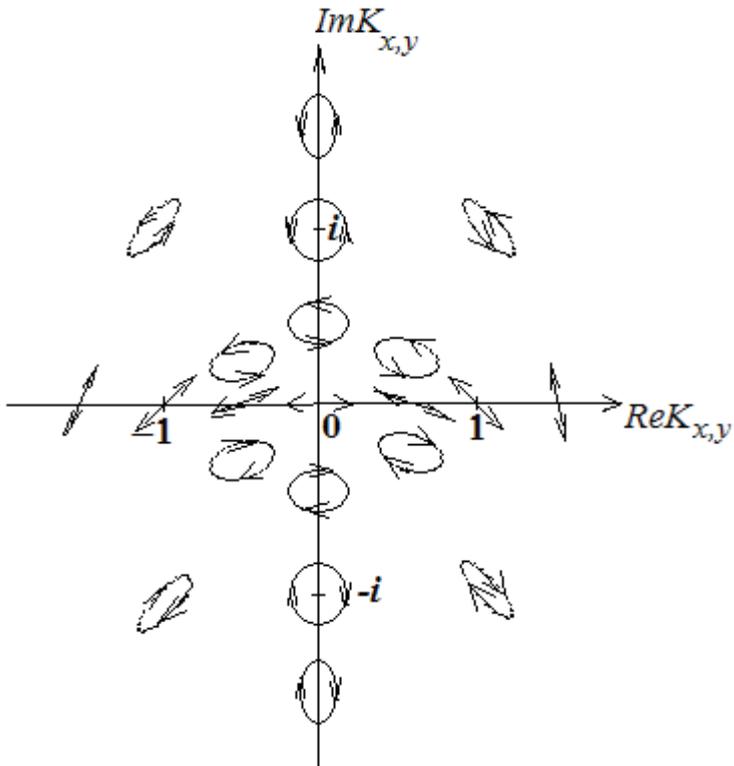
Пользуясь (4) и (5), можно получить выражения<sup>10</sup>

$$\operatorname{Re} K_{x,y} = \frac{\operatorname{tg} \chi (1 - \operatorname{tg}^2 \sigma)}{\operatorname{tg}^2 \chi + \operatorname{tg}^2 \sigma}, \quad \operatorname{Im} K_{x,y} = -\frac{\operatorname{tg} \sigma (1 + \operatorname{tg}^2 \chi)}{\operatorname{tg}^2 \chi + \operatorname{tg}^2 \sigma}. \quad (6)$$

---

<sup>9</sup> Из (5) видно, что вектор Джонса полностью поляризованного квазимонохроматического излучения для произвольного интервала времени является единичным по модулю постоянным комплексным вектором, помноженным на случайную комплексную амплитуду  $E(t)$  (см. (1)).

<sup>10</sup> Выражения (6), (8) отличаются от (I.84a), (I.84b), (I.86), (I.87) в [40] в силу другого определения коэффициента поляризации (см. сноску 8).



**Рис.2.** Комплексная декартовая плоскость коэффициента поляризации и состояния поляризации, соответствующие различным точкам этой плоскости.

Из (6) следует, что отношение амплитуд компонент электрического поля и их разность фаз можно определить, если известны позиционный угол  $\chi$  и эллиптичность  $\sigma$ , из соотношений

$$E_{0x}/E_{0y} = \left[ (1 + \cos(2\sigma) \cos(2\chi)) / (1 - \cos(2\sigma) \cos(2\chi)) \right]^{1/2}, \quad (7)$$

$$\text{tg}(\psi_x - \psi_y) = -\text{tg}(2\sigma) / \sin(2\chi),$$

и что позиционный угол и эллиптичность определяются по отношению амплитуд компонент электрического поля и их разности фаз по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2\chi) &= -2 \frac{\operatorname{Re} K_{x,y}}{1 - |K_{x,y}|^2} = -2 \frac{(E_{0x}/E_{0y}) \cos(\psi_x - \psi_y)}{1 - (E_{0x}/E_{0y})^2}, \\ \sin(2\sigma) &= -2 \frac{\operatorname{Im} K_{x,y}}{1 + |K_{x,y}|^2} = -2 \frac{(E_{0x}/E_{0y}) \sin(\psi_x - \psi_y)}{1 + (E_{0x}/E_{0y})^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Любой вектор Джонса вида (3) можно построить как линейную суперпозицию ортонормированных векторов Джонса  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  (декартовый базис D)

$$\mathbf{E}_{x,y} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

базисные поляризационные векторы, соответствующие декартовой системе координат  $x, y$ . Состояния поляризации, соответствующие базисным векторам, называются базисными состояниями поляризации. В данном случае это две ортогональные линейные поляризации единичной амплитуды, направленные, соответственно, вдоль осей  $x, y$ .

Два вектора Джонса  $\mathbf{E}_{x,y}, \mathbf{E}_{x,y}^{\text{ort}}$  поляризованного квазимонохроматического излучения являются ортогональными, если

$\mathbf{E}_{x,y} + \mathbf{E}_{x,y}^{\text{ort}} = \mathbf{E}_{x,y}^{\text{ort}} + \mathbf{E}_{x,y} = 0$  (знак  $+$  означает эрмитово-сопряженный вектор, то есть  $\mathbf{E}_{x,y} + = (E_x^*, E_y^*)$ ); соответственно для

ортогональных векторов  $K_{x,y} K_{x,y}^{\text{ort}*} = K_{x,y}^* K_{x,y}^{\text{ort}} = -1$ ,

$$\chi_{\text{ort}} = \chi \pm \pi/2, \quad \sigma_{\text{ort}} = -\sigma.$$

Что же касается неполяризованной составляющей, то у неё хаотически меняется ориентация, отношение осей и направление обхода эллипса. Неполяризованное излучение характеризуется только одним параметром, а именно интенсивностью

$$I_{\text{нр}} = \frac{c}{4\pi} \left( \overline{|E_{\text{хнр}}|^2} + \overline{|E_{\text{ynp}}|^2} \right). \quad \text{Вектор Джонса} \quad \text{частично}$$

поляризованного излучения, если его ввести по аналогии с полностью поляризованным излучением, уже не характеризуется постоянными значениями величин  $E_{0x}(t)/E_{0y}(t)$ ,  $\psi_x(t) - \psi_y(t)$ . Отношение амплитуд проекций  $E_{0x}(t)/E_{0y}(t)$  и разность фаз проекций  $\psi_x(t) - \psi_y(t)$  и, следовательно, коэффициент поляризации  $K_{x,y}$  являются при этом случайными функциями с некоторыми наиболее вероятными значениями. На плоскости рис.2 коэффициенту  $K_{x,y}$  соответствует уже не одна точка, как для полностью поляризованного излучения, а некоторая область вероятных значений.

### 3. Параметры Стокса

Частично поляризованное квазимонохроматическое излучение, являющееся суммой поляризованной и неполяризованной составляющих и распространяющееся в направлении волнового вектора  $\mathbf{k}$ , характеризуется *четырьмя* параметрами:

*полной интенсивностью*  $I = I_p + I_{\text{нр}}$ ,

*степенью поляризации*  $P_E = I_p / I$ ,

*отношением осей эллипса поляризованной составляющей*  $p$ ,

*углом ориентации* большой оси этого эллипса  $\chi$ .

С этими четырьмя параметрами связаны другие четыре параметра, введённые Стоксом в 1852 г. Параметры Стокса  $I, Q, U, V$  связаны с  $I, P_E, \sigma$  и  $\chi$  следующими соотношениями, которые можно рассматривать в качестве их определения:

$$\begin{aligned} I &= I, \\ Q &= P_E I \cos(2\sigma) \cos(2\chi), \\ U &= P_E I \cos(2\sigma) \sin(2\chi), \\ V &= -P_E I \sin(2\sigma). \end{aligned} \tag{11}$$

Знак « $-$ » в выражении для  $V$  в (11) взят для того, чтобы для правой эллиптической (в частном случае круговой) поляризации ( $\sigma < 0$ ) иметь  $V > 0$  в соответствии с определением МАС [42-45]. Параметры Стокса имеют одинаковую размерность ( $\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1} \cdot \text{стерад}^{-1}$  или  $\text{эрг} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{Гц}^{-1} \cdot \text{стерад}^{-1}$ ), аддитивны для некогерентных составляющих суммарного излучения, измеримы с помощью поляриметров и являются действительными величинами. Из (11) следует, что:

$$\begin{aligned} P_E &= \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}, \\ \sin(2\sigma) &= -\frac{V}{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}, \\ \text{tg}(2\chi) &= \frac{U}{Q}. \end{aligned} \tag{12}$$

Полностью поляризованное квазимонохроматическое излучение или поляризованная составляющая частично поляризованного квазимонохроматического радиоизлучения описываются, как уже отмечалось, тремя параметрами. Этими параметрами могут быть

интенсивность  $I_p$ , эллиптичность  $\sigma$  и угол ориентации большой оси эллипса  $\chi$ . Поскольку для полностью поляризованного излучения  $P_E=1$ , то, как видно из (12), для его описания достаточно только трёх параметров Стокса  $Q$ ,  $U$  и  $V$ . Можно использовать и безразмерные параметры  $Q/I$ ,  $U/I$ ,  $V/I$ . Последние могут рассматриваться в качестве декартовых прямоугольных координат некоторой точки Р на сфере с единичным радиусом, носящей название сферы Пуанкаре.<sup>11</sup> Угол между радиус-вектором ОР, проведенным из начала координат О в точку Р на этой сфере, и плоскостью  $Q/I$ ,  $U/I$  равен  $2\sigma$ , а угол между проекцией ОР' того же вектора на плоскость  $Q/I$ ,  $U/I$  и осью  $Q/I$  равен  $2\chi$ . Северный полюс сферы Пуанкаре ( $Q=U=0$ ,  $V>0$ ,  $\sigma = -\pi/4$ ) соответствует состоянию поляризации с правой круговой поляризацией, южный полюс ( $Q=U=0$ ,  $V<0$ ,  $\sigma = \pi/4$ ) соответствует состоянию с левой круговой поляризацией. Окружность  $V = 0$ ,  $\sigma = 0$  соответствует линейной поляризации, для описания которой достаточно двух параметров Стокса  $Q$  и  $U$ . Точки северной полусферы ( $V>0$ ,  $\sigma < 0$ ) соответствуют правой эллиптической поляризации, южной ( $V < 0$ ,  $\sigma > 0$ ) – левой эллиптической поляризации.

Точки внутри рассматриваемой сферы соответствуют частично поляризованному излучению. Длина радиус-вектора ОР точки внутри сферы равна степени поляризации  $P_E$ , угол между этим радиус-вектором и плоскостью  $Q/I$ ,  $U/I$  равен  $2\sigma$  поляризованной компоненты, а угол между проекцией ОР' того же радиус-вектора на плоскость  $Q/I$ ,  $U/I$  и осью  $Q/I$  равен  $2\chi$  поляризованной

---

<sup>11</sup> Существует другое определение сферы Пуанкаре, а именно через круговую комплексную плоскость коэффициента поляризации [40].

компоненты (рис.3). Начало координат  $O$  соответствует неполяризованному излучению:  $P_E = 0$ .

Остановимся подробнее на важном частном случае частично линейно-поляризованного излучения ( $V = 0$ ). Интенсивность линейно поляризованной компоненты равна

$$I_L = \sqrt{Q^2 + U^2}, \quad (13)$$

степень линейной поляризации равна <sup>12</sup>

$$P_L = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I} = \frac{I_L}{I}, \quad (14)$$

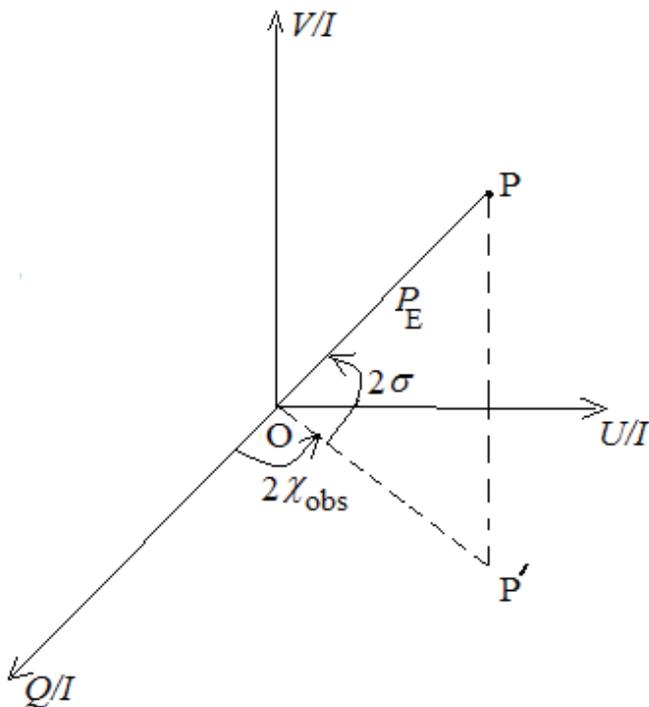
наблюдаемое значение позиционного угла плоскости поляризации (плоскости, содержащей электрический вектор поляризованной компоненты и волновой вектор), заключённое в пределах  $[0 \div \pi)$ , равно [46]

$$\chi_{\text{obs}} = \frac{1}{2} \text{angle}(Q, U), \quad (15)$$

где функция  $\text{angle}(Q, U)$  даёт значение угла  $2\chi_{\text{obs}}$  ( $0 \leq 2\chi_{\text{obs}} < 2\pi$ ) на плоскости  $Q, U$  между осью  $Q$  и вектором  $OP$ , проведённым из

---

<sup>12</sup> В качестве одного из параметров частично циркулярно-поляризованного излучения используется степень круговой поляризации  $P_C = \frac{|V|}{I} = \frac{I_C}{I}$ . Как видно из (12) и (14),  $P_E^2 = P_L^2 + P_C^2$ .



**Рис.3.** Представление частично поляризованного излучения точкой P в координатном пространстве относительных параметров Стокса  $Q/I, U/I, V/I$ .

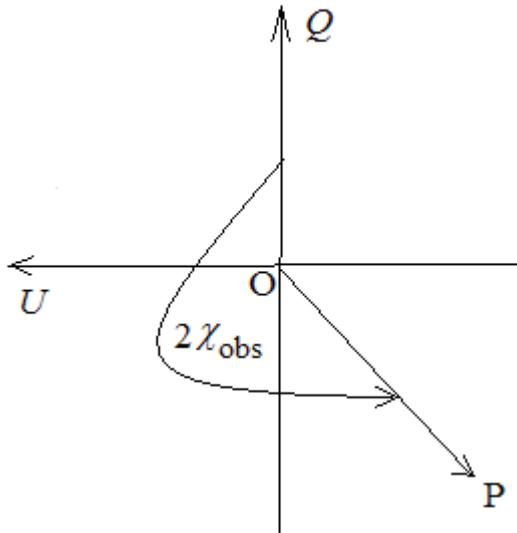
начала координат в точку P с координатами  $Q, U$  (рис.4)<sup>13</sup>. Формула (15) соответствует третьей из формул (12) и, по существу, является

<sup>13</sup> Вектор OP на плоскости  $Q, U$  (рис.4) не является вектором на плоскости  $x, y$ . Это видно из вида его преобразования при вращении системы координат  $\begin{pmatrix} Q' \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ U \end{pmatrix}$  (сравните с преобразованием вектора

Джонса (46), приведенным ниже). Вместе с тем, в случае сложения  $N$  некогерентных потоков излучения векторы, соответствующие отдельным составляющим суммарного потока, складываются на плоскости  $Q, U$  именно

как векторы:  $Q_\Sigma = \sum_{i=1}^N Q_i, U_\Sigma = \sum_{i=1}^N U_i$ .

обозначением следующего порядка вычисления наблюдаемого значения позиционного угла:



**Рис.4.** Угол между вектором  $OP$  с координатами  $Q, U$  и осью  $Q$  является удвоенным наблюдаемым позиционным углом  $2\chi_{\text{obs}}$  плоскости поляризации линейно-поляризованного излучения.

1. Вектор поляризации  $OP$  находится в первой четверти на плоскости  $Q, U$ , то есть  $Q \geq 0, U \geq 0$  ( $0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}$ ). В этом случае <sup>14</sup>

$$\chi = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{U}{Q}\right), \quad (16)$$

<sup>14</sup> В литературе часто (см., например, [14], [47], [48]) употребляется именно формула (16) вместо (15). Однако, формула (16) справедлива лишь для первой четверти на плоскости  $Q, U$  или только для верхней полуплоскости плоскости  $Q, U$ , если определить наблюдаемое значение позиционного угла плоскости поляризации в интервале  $[-\pi/2 \div \pi/2]$ , поскольку  $-\pi/2 < (\arctg x) < \pi/2$ . На это обстоятельство автором было обращено внимание авторов работы [49]. Это замечание было учтено в окончательном тексте статьи (см. сноску на с. 1033 [49]).

2. Вектор поляризации находится во второй или третьей четвертях на плоскости  $Q, U$ , то есть  $Q \leq 0$  ( $\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{3\pi}{4}$ ). В этом случае

$$\chi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{U}{Q} \right), \quad (17)$$

3. Вектор поляризации находится в четвертой четверти, то есть  $Q \geq 0, U < 0$  ( $\frac{3\pi}{4} \leq \chi < \pi$ ). В этом случае

$$\chi = \pi + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{U}{Q}. \quad (18)$$

Поскольку поляризационные состояния линейно-поляризованного излучения, отличающиеся только позиционными углами плоскости поляризации на величину  $n\pi$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ ), физически неразличимы (им на плоскости  $Q, U$  соответствует одна и та же точка), то истинное значение позиционного угла плоскости поляризации радиоволны на входе радиотелескопа может отличаться (например, из-за фарадеевского вращения плоскости поляризации на пути распространения волны) от наблюдаемого на  $n\pi$ . Необходимы многочастотные поляризационные измерения, в том числе на достаточно близких частотах, чтобы разрешить эту неопределенность и получить правильное значение меры вращения  $RM$  в среде между источником генерации волны и радиотелескопом и значение позиционного угла плоскости поляризации в самом источнике (см. сноску 6).

#### 4. Матрица и вектор когерентности

Частично поляризованное излучение, можно описывать не только с помощью параметров Стокса. Перейдем теперь к другому способу описания, а именно с помощью матрицы когерентности<sup>15</sup>. Будем предполагать, что  $E_x(t)$  и  $E_y(t)$  это стационарные и стационарно связанные случайные гауссовы функции времени [50]. Полное совместное описание  $E_x(t)$  и  $E_y(t)$  в рамках корреляционной теории, достаточной в этом случае [50], даётся корреляционной матрицей  $2 \times 2$

$$\mathbf{R}_{x,y}(\tau) = \frac{c}{4\pi} \begin{pmatrix} \overline{E_x(t) \cdot E_x^*(t+\tau)} & \overline{E_x(t) \cdot E_y^*(t+\tau)} \\ \overline{E_y(t) \cdot E_x^*(t+\tau)} & \overline{E_y(t) \cdot E_y^*(t+\tau)} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

которая характеризует как средние поляризационные свойства электрического вектора  $\mathbf{E}(t)$  принимаемой волны, так и спектр (матрица спектральных плотностей [50]). В (19) черта, как обычно, означает усреднение по интервалу времени  $\gg 1/2\pi\Delta\nu$ , значения временной задержки  $\tau$  произвольны. Если же интерес представляют прежде всего поляризационные свойства (что и имеет место в рассматриваемом случае квазимонохроматического излучения), то можно ограничиться временными задержками много меньшими длительности цуга когерентности  $\tau \ll 1/2\pi\Delta\nu$ . За столь короткое время можно в первом приближении пренебречь изменениями  $E_x(t)$

---

<sup>15</sup> В литературе матрица когерентности называется также матрицей поляризации, матрицей плотности, тензором поляризации, поляризационной матрицей.

и  $E_y(t)$  и описывать поляризацию матрицей (19) при  $\tau = 0$ . Матрица (19) при  $\tau = 0$  называется матрицей когерентности  $\mathbf{I}_{x,y}$  [38-41, 50]

$$\mathbf{I}_{x,y} \equiv \mathbf{I}_D = \frac{c}{4\pi} \begin{pmatrix} \overline{E_x(t) \cdot E_x^*(t)} & \overline{E_x(t) \cdot E_y^*(t)} \\ \overline{E_y(t) \cdot E_x^*(t)} & \overline{E_y(t) \cdot E_y^*(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Матрица когерентности может быть выражена также как среднее простого матричного произведения вектора Джонса, формально введённого для частично поляризованного излучения (см. выше), на его эрмитово-сопряжённый вектор

$$\mathbf{I}_D = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E}_{x,y}(t) \mathbf{E}_{x,y}^+(t)} = \frac{c}{4\pi} \overline{\begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^*(t) & E_y^*(t) \end{pmatrix}}. \quad (21)$$

Из (20) и (21) видно, что матрица когерентности является эрмитовой или самосопряженной  $\mathbf{I} = \mathbf{I}^+$  ( $I_{xy} = I_{yx}^*$ ). Матрицу когерентности полностью определяют 4 действительные величины:  $I_{xx} \geq 0$ ,  $I_{yy} \geq 0$ ,  $\text{Re}I_{xy}$ ,  $\text{Im}I_{xy}$ . Через них можно выразить коэффициент взаимной корреляции  $r_{x,y}$  ( $0 \leq r_{x,y} \leq 1$ ) ортогональных компонент вектора электрического поля [51]

$$r_{x,y} = \sqrt{\frac{\overline{E_x(t)E_y^*(t)} \overline{E_y(t)E_x^*(t)}}{\overline{E_x(t)E_x^*(t)} \overline{E_y(t)E_y^*(t)}}} = \sqrt{\frac{I_{xy}I_{yx}}{I_{xx}I_{yy}}} = \sqrt{\frac{(\text{Re}I_{xy})^2 + (\text{Im}I_{xy})^2}{I_{xx}I_{yy}}} \quad (22)$$

Сумма диагональных элементов (след матрицы когерентности) равен интенсивности электромагнитной волны

$$\text{Sp}\mathbf{I}_D = I_{xx} + I_{yy} = \frac{c}{4\pi} \left( \overline{|E_x|^2} + \overline{|E_y|^2} \right) = I. \quad (23)$$

Детерминант матрицы  $\mathbf{I}_D$  есть неотрицательное вещественное число<sup>16</sup>

$$\det \mathbf{I}_D = I_{xx}I_{yy} - |I_{xy}|^2 = I_{xx}I_{yy} (1 - r_{x,y}^2) \geq 0. \quad (24)$$

У полностью поляризованного излучения коэффициент  $r_{x,y}(P_E = 1) = 1$  и определитель  $\det \mathbf{I}_D(P_E = 1) = 0$ , у полностью неполяризованного излучения  $r_{x,y}(P_E = 0) = 0$ ,  $I_{xx} = I_{yy} = I/2$  и  $\det \mathbf{I}_D(P_E = 0) = I^2/4$  (см., также, ниже сноску 20). Промежуточные значения  $r_{x,y}$  соответствуют частично поляризованному излучению. Если же ортогональные компоненты поля некогерентны и  $r_{x,y} = 0$ , то излучение может быть частично линейно поляризовано, если  $I_{xx} \neq I_{yy}$ , или полностью неполяризовано, если  $I_{xx} = I_{yy}$ . Наконец условие  $r_{x,y} = 0$  может быть выполнено в случае полностью линейно поляризованного излучения просто потому, что электрический вектор направлен вдоль оси  $x$  (тогда  $I_{yy} = 0$ ) или вдоль оси  $y$  (при этом  $I_{xx} = 0$ ).

---

<sup>16</sup> Доказательство этого следует из неравенства Шварца-Буняковского для двух комплексных функций одного и того же действительного аргумента  $t$ :

$\left| \int_0^T E_x(t)E_y^*(t)dt \right|^2 \leq \int_0^T E_x(t)E_x^*(t)dt \cdot \int_0^T E_y(t)E_y^*(t)dt$  и из (22) и второго из равенств в (24).

Коэффициент поляризации полностью поляризованного излучения можно выразить через элементы матрицы когерентности следующим образом (см. (4), (20))

$$K_{x,y}(P_E = 1) = \frac{I_{xy}}{I_{yy}}. \quad (25)$$

Коэффициент поляризации поляризованной части частично поляризованного излучения можно вычислить, учитывая то, что матрица когерентности такого излучения может быть представлена в виде суммы двух матриц, соответствующих неполяризованной и поляризованной компонентам

$$\mathbf{I}_D = \frac{1-P_E}{2} \begin{pmatrix} I_{xx} + I_{yy} & 0 \\ 0 & I_{xx} + I_{yy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1+P_E}{2} I_{xx} - \frac{1-P_E}{2} I_{yy} & I_{xy} \\ I_{yx} & \frac{1+P_E}{2} I_{yy} - \frac{1-P_E}{2} I_{xx} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Подставляя в числитель (25)  $I_{xy}$ , а в знаменатель  $[(1+P_E)/2]I_{yy} - [(1-P_E)/2]I_{xx}$  - нижний правый элемент матрицы когерентности поляризованной части излучения (вторая матрица в правой части (26)), получим коэффициент поляризации поляризованной части частично поляризованного излучения, выраженный через элементы матрицы когерентности последнего

$$(K_{x,y})_P = \frac{2I_{xy}}{(1+P_E)I_{yy} - (1-P_E)I_{xx}}. \quad (27)$$

При  $P_E = 1$  (27) переходит в (25).

Выражения для параметров Стокса частично поляризованного излучения через элементы тензора поляризации в базисе  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{c}{4\pi} \left( \overline{E_{0x}^2} + \overline{E_{0y}^2} \right) = I_{xx} + I_{yy}, \\
 Q &= \frac{c}{4\pi} \left( \overline{E_{0x}^2} - \overline{E_{0y}^2} \right) = I_{xx} - I_{yy}, \\
 U &= \frac{c}{2\pi} \overline{E_{0x} E_{0y} \cos(\psi_x - \psi_y)} = 2\text{Re}(I_{xy}) = I_{xy} + I_{yx}, \\
 V &= \frac{c}{2\pi} \overline{E_{0x} E_{0y} \sin(\psi_x - \psi_y)} = 2\text{Im}(I_{xy}) = -i(I_{xy} - I_{yx}).
 \end{aligned} \tag{28}$$

Преобразование (28) может быть записано в матричном виде следующим образом

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{V}_{\text{ID}}, \tag{29}$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \tag{30}$$

есть вектор Стокса<sup>17</sup>,

---

<sup>17</sup> Вектор Стокса частично поляризованного излучения можно представить в виде суммы векторов неполяризованной и поляризованной компонент

следующим образом: 
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2} \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{V}_{\text{ID}} = \begin{pmatrix} I_{xx} \\ I_{xy} \\ I_{yx} \\ I_{yy} \end{pmatrix} \quad (31)$$

есть вектор когерентности, составленный из элементов матрицы когерентности  $\mathbf{I}_D$  в декартовом базисе,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \end{pmatrix} \quad (32)$$

$4 \times 4$ -матрица, связывающая вектор Стокса и вектор когерентности в декартовом базисе<sup>18</sup>. Соотношение (29) можно рассматривать и как преобразование, посредством воздействия матрицы  $\mathbf{D}$ , вектора когерентности из представления в пространстве когерентностей  $xx$ ,  $xу$ ,  $yx$ ,  $yy$  в представление в пространстве параметров Стокса. Вектор когерентности можно формально ввести и как среднее прямого произведения вектора Джонса, введённого для частично поляризованного излучения (см. выше), на его комплексно сопряжённый вектор

$$\mathbf{V}_{\text{ID}} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{x,y} \otimes \overline{\mathbf{E}_{x,y}^*}, \quad (33)$$

---

<sup>18</sup> Матрица (32) связывает обобщённые вектор Стокса и вектор когерентности в любом ортогональном (унитарном) базисе [40]. Матрица  $\mathbf{D}$  унитарна с точностью до коэффициента:  $\mathbf{D}^{-1} = (1/2)\mathbf{D}^+$ .

где символ  $\otimes$  обозначает прямое произведение двух матриц (его называют ещё внешним, тензорным, кронекеровским произведением)<sup>19</sup>. Использование вектора когерентности вместо матрицы когерентности удобнее с математической точки зрения в интерференционной поляриметрии (см. ниже).

Прежде чем перейти к доказательству выражений (28), (29) выразим из них элементы матрицы когерентности через параметры Стокса:

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \frac{1}{2}(I + Q), \\
 I_{xy} &= \frac{1}{2}(U + iV), \\
 I_{yx} &= \frac{1}{2}(U - iV), \\
 I_{yy} &= \frac{1}{2}(I - Q).
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

В матричном виде (34) запишется следующим образом:

$$\mathbf{V}_{\text{ID}} = \begin{pmatrix} I_{xx} \\ I_{xy} \\ I_{yx} \\ I_{yy} \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}.
 \tag{35}$$

---

<sup>19</sup> Прямым произведением  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  является матрица, получаемая из матрицы  $\mathbf{A}$ , заменой в ней элемента  $A_{ij}$  на матричный блок  $A_{ij} \mathbf{B}$ .

Пользуясь (34), можно выразить матрицу когерентности в виде разложения по матрицам Паули, коэффициентами которого являются параметры Стокса, поделённые на два<sup>20</sup>

$$\mathbf{I}_D = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{yx} & I_{yy} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + V \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (36)$$

Для доказательства (28) введем систему координат  $X, Y$ , повернутую относительно системы координат  $x, y$  на угол  $\chi$  такой, что оси  $X, Y$  направлены вдоль осей эллипса поляризации поляризованной компоненты излучения (см. рис.1). Компоненты электрического вектора поляризованной части излучения по осям

$X, Y$  (компоненты вектора Джонса  $\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$  в системе координат  $X, Y$ )

имеют вид

$$E_x(t) = E(t)\cos\sigma, \quad E_y(t) = iE(t)\sin\sigma. \quad (37)$$

Величина  $E(t)$  флуктуирует с характерным временем  $1/2\pi\Delta\nu$ . Далее, компоненты электрического поля поляризованной части

излучения по осям  $x, y$  (компоненты вектора Джонса  $\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$  в системе

---

<sup>20</sup> Из (36) видно, что определитель матрицы когерентности равен  $\det \mathbf{I}_D = \frac{1}{4}(I^2 - Q^2 - U^2 - V^2) = \frac{I^2}{4}(1 - P_E^2)$ . Матрица когерентности частично или полностью линейно поляризованного излучения равна  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} I+Q & U \\ U & I-Q \end{pmatrix}$ .

координат  $x, y$ ) выразим через компоненты по осям эллипса поляризации (компоненты вектора Джонса  $\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$ ):

$$\begin{aligned} E_x &= E_x \cos \chi - E_y \sin \chi = E(\cos \sigma \cos \chi - i \sin \sigma \sin \chi), \\ E_y &= E_x \sin \chi + E_y \cos \chi = E(\cos \sigma \sin \chi + i \sin \sigma \cos \chi). \end{aligned} \quad (38)$$

Сопоставляя (38) и (2), получим следующие выражения для амплитуд и фаз компонент электрического поля по осям  $x, y$ :

$$\begin{aligned} E_{0x} &= E_0(\cos^2 \sigma \cos^2 \chi + \sin^2 \sigma \sin^2 \chi)^{1/2}, \\ E_{0y} &= E_0(\cos^2 \sigma \sin^2 \chi + \sin^2 \sigma \cos^2 \chi)^{1/2}, \\ \sin \psi_x &= -\sin \sigma \sin \chi(\cos^2 \sigma \cos^2 \chi + \sin^2 \sigma \sin^2 \chi)^{-1/2}, \\ \cos \psi_x &= \cos \sigma \cos \chi(\cos^2 \sigma \cos^2 \chi + \sin^2 \sigma \sin^2 \chi)^{-1/2}, \\ \sin \psi_y &= \sin \sigma \cos \chi(\cos^2 \sigma \sin^2 \chi + \sin^2 \sigma \cos^2 \chi)^{-1/2}, \\ \cos \psi_y &= \cos \sigma \sin \chi(\cos^2 \sigma \sin^2 \chi + \sin^2 \sigma \cos^2 \chi)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Учитывая (11), (20) и (39), получим выражения (28) для параметров Стокса в базисе  $D$ .

Пользуясь выражением (12) для степени поляризации через параметры Стокса, формулами (23), (24), (28), получим следующее выражение для степени поляризации через след и детерминант матрицы когерентности<sup>21</sup>

---

<sup>21</sup>Формулу (40) можно получить и из условия равенства нулю детерминанта матрицы когерентности поляризованной части частично поляризованного излучения (см. (26)) и из формулы в сноске 20, поскольку след матрицы когерентности равен полной интенсивности.

$$P_E = \sqrt{1 - 4 \frac{\det \mathbf{I}_D}{(\text{Sp} \mathbf{I}_D)^2}}. \quad (40)$$

Поскольку детерминант и след матрицы (тензора) поляризации инвариантны относительно вращения прямоугольной системы координат (см. ниже), то, следовательно, и степень поляризации также не зависит от ориентации осей  $x, y$ . Матрица когерентности полностью поляризованного излучения в системе координат осей эллипса поляризации  $X, Y$  (базис  $D_0$ ) равна (см. (21) и (37))

$$\mathbf{I}_{D_0}(P_E = 1) = I_p \begin{pmatrix} \cos^2 \sigma & -\frac{1}{2} i \sin 2\sigma \\ \frac{1}{2} i \sin 2\sigma & \sin^2 \sigma \end{pmatrix}. \quad (41)$$

В (41)  $I_p = \frac{c}{4\pi} \overline{E_{0p}^2(t)}$  – интенсивность полностью поляризованного излучения. Из (41) видно, что определитель матрицы когерентности полностью поляризованного сигнала равен 0 в системе эллипса поляризации, а в силу инвариантности и в любой другой системе  $x, y$   $\det \mathbf{I}_D(P_E = 1) = 0$ . Из равенства нулю определителя матрицы  $\mathbf{I}_D(P_E = 1)$  следует равенство

$$|I_{xy}(P_E = 1)|^2 = I_{xx}(P_E = 1) \cdot I_{yy}(P_E = 1), \quad (42)$$

которое означает существование лишь трёх независимых вещественных чисел, характеризующих матрицу когерентности полностью поляризованного сигнала.

Матрица когерентности полностью неполяризованного излучения в любой системе ортогональных координат равна

$$\mathbf{I}_D(P_E = 0) = \begin{pmatrix} I/2 & 0 \\ 0 & I/2 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Из (40) и (43) следует, что  $\det \mathbf{I}_D(P_E = 0) = I^2/4$ , как это уже отмечалось выше.

С помощью (12) и (28) получим выражения для позиционного угла большой оси эллипса поляризации и эллиптичности (угла эллиптичности) через элементы матрицы когерентности

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2\chi) &= \frac{I_{xy} + I_{yx}}{I_{xx} - I_{yy}}, \\ \sin(2\sigma) &= \frac{i(I_{xy} - I_{yx})}{P_E(I_{xx} + I_{yy})}. \end{aligned} \quad (44)$$

Выразим коэффициент  $r_{x,y}$  (22) через степень поляризации и элементы матрицы когерентности. Для этого воспользуемся (23), (24) и (40). Из этих выражений получим искомую связь

$$1 - P_E^2 = \left( \frac{2\sqrt{I_{xx}I_{yy}}}{I_{xx} + I_{yy}} \right)^2 (1 - r_{x,y}^2). \quad (45)$$

Из (45) следует, что  $P_E \geq r_{x,y}$ . Равенство  $P_E = r_{x,y}$  имеет место, если  $I_{xx} = I_{yy}$ . Ниже будет найдена такая система координат  $x', y'$ , в которой имеет место равенство  $P_E = r_{x',y'}$  степени поляризации и коэффициента взаимной корреляции ортогональных компонент вектора электрического поля.

## 5. Матрица преобразования вектора Джонса (матрица Джонса)

Рассмотрим преобразование вектора Джонса при переходе к системе координат  $x', y'$  (базис  $D'$ ), повернутой относительно системы координат  $x, y$  против часовой стрелки на угол  $\varphi > 0$ . Компоненты вектора Джонса для этих двух систем координат связаны между собой матричным соотношением:

$$\begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Матрица  $2 \times 2$  в (46)

$$\mathbf{T}_R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (47)$$

называется матрицей поворота  $\mathbf{T}_R(\varphi) \equiv \mathbf{T}_{D'D}(\varphi)$ , описывающей преобразование вектора Джонса при переходе от системы координат  $x, y$  (базис  $D$ ) к системе  $x', y'$  (базис  $D'$ ).

Существует такая система координат  $x', y'$ , в которой степень поляризации равна коэффициенту взаимной корреляции ортогональных компонент электрического поля<sup>22</sup>. В этой, повернутой относительно исходной, системе координат  $x', y'$ , как видно из (45),  $I_{x'x'} = I_{y'y'}$ . Из последнего условия, определения матрицы

---

<sup>22</sup> Это обстоятельство можно использовать для измерения степени поляризации [51].

когерентности (20) для системы координат  $x', y'$  и (46) следует, что угол  $\varphi_p$  между осями  $x'$  и  $x$  ( $y'$  и  $y$ ) равен

$$\operatorname{tg}(2\varphi_p) = \frac{I_{yy'} - I_{xx}}{I_{xy'} + I_{yx}}. \quad (48)$$

Умножая (46) слева на матрицу  $\mathbf{T}_R(-\varphi)$ , получим

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \mathbf{T}_R(-\varphi) \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Соотношение (49) совпадает с (38), где осями  $x', y'$  являются оси  $X, Y$ , а угол  $\varphi = \chi$ . Перепишем (49) в следующем виде:

$$\mathbf{E}_{x,y} = E_{x'} \mathbf{e}_{x'} + E_{y'} \mathbf{e}_{y'}, \quad (50)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{x'} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_{y'} &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (51)$$

базисные поляризационные векторы в системе координат  $x', y'$ . Если  $\varphi = 0$ , то (50) переходит в (9), а (51) переходит в (10).

Соотношения, описывающие преобразования вектора Джонса и ортов при вращении системы прямоугольных координат (46), (49) и (51) можно записать в следующем компактном виде, справедливом при переходе от прямоугольного базиса  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  к любому другому ортогональному (унитарному) базису (повёрнутому прямоугольному,

круговому или эллиптическому) с ортонормированными базисными в общем случае комплексными векторами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \mathbf{T}^+ \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

где учтено, что матрица  $\mathbf{T}$  перехода от одного унитарного (ортогонального) базиса к другому, также унитарному (ортогональному), является унитарной  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^+$  (ортогональной  $\mathbf{T}^{-1} = \widetilde{\mathbf{T}}$ ) матрицей, равной  $\mathbf{T}_R(\varphi)$  при преобразовании, заключающемся в повороте прямоугольных координат на угол  $\varphi$ ; при этом  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{x'}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{y'}$ . Отметим, что  $(\mathbf{T}_R(\varphi))^{-1} = \widetilde{\mathbf{T}_R(\varphi)} = \mathbf{T}_R(-\varphi)$ .

Матрица вращения  $\mathbf{T}_R(\varphi)$  описывает также такое воздействие среды или оптического ротатора на падающую волну, которое приводит к повороту плоскости поляризации линейно поляризованного излучения на угол  $-\varphi$ <sup>23</sup>. Это частный случай  $2 \times 2$  матрицы Джонса  $\mathbf{J}$ , связывающей вектор Джонса  $\mathbf{E}_{\text{out}}$  на выходе некоторого недеполяризующего физического устройства<sup>24</sup> со значением вектора Джонса  $\mathbf{E}_{\text{in}}$  на входе этого же устройства

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{J} \mathbf{E}_{\text{in}}. \quad (53)$$

<sup>23</sup> Имеется в виду, что вектор Джонса на входе ротатора и на его выходе отнесены к одной и той же системе координат  $x, y$ .

<sup>24</sup> Недеполяризующим, согласно [43], [52], является устройство, преобразующее полностью поляризованное излучение на входе в полностью поляризованное же излучение на выходе.

Ещё одним примером матрицы Джонса является матрица идеального линейного поляризатора  $\mathbf{J}_{\text{ЛП}}(\chi)$ , то есть устройства, свободно пропускающего линейно-поляризованную волну при условии, что направление поляризации параллельно оси пропускания поляризатора, и полностью гасящего падающую на него волну, если это направление перпендикулярно оси пропускания. Если ось пропускания расположена в плоскости  $x, y$ , а угол между её направлением и осью  $x$  равен  $\chi$ , то, с точностью до фазового множителя, имеем

$$\mathbf{J}_{\text{ЛП}}(\chi) = \begin{pmatrix} \cos^2 \chi & \frac{1}{2} \sin(2\chi) \\ \frac{1}{2} \sin(2\chi) & \sin^2 \chi \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Выражение (54) справедливо при условии, что вектор Джонса на входе и выходе поляризатора отнесён к одной и той же системе координат  $x, y$ . Более простой вид  $\mathbf{J}_{\text{ЛП}}(\chi)$  имеет, если выбрать на выходе такую систему координат  $x', y'$ , у которой ось  $x'$  параллельна оси пропускания поляризатора. Умножив (54) слева на  $\mathbf{T}_{\mathbf{R}}(\chi)$  из (47), получим  $\begin{pmatrix} \cos \chi & \sin \chi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . При  $\chi = 0$  (оси  $x$  и  $x'$  направлены вдоль оси пропускания поляризатора) матрица приобретает простейший вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . В радиоастрономии роль идеального линейного поляризатора выполняет идеальный линейный облучатель.

## 6. Преобразование вектора и матрицы когерентности

Получим из (33) и (53) соотношение между вектором когерентности на выходе системы (среды), характеризующейся матрицей Джонса  $\mathbf{J}$ , и вектором когерентности на её входе <sup>25</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{Iout}} &= (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) \mathbf{V}_{\text{Iin}}, \\ \mathbf{V}_{\text{Iin}} &= (\mathbf{J}^{-1} \otimes \mathbf{J}^{-1*}) \mathbf{V}_{\text{Iout}}. \end{aligned} \quad (55)$$

Матрица  $\mathbf{K} = (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*)$  преобразования вектора когерентности тем или иным физическим устройством или средой равна

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} J_{xx} J_{xx}^* & J_{xx} J_{xy}^* & J_{xy} J_{xx}^* & J_{xy} J_{xy}^* \\ J_{xx} J_{yx}^* & J_{xx} J_{yy}^* & J_{xy} J_{yx}^* & J_{xy} J_{yy}^* \\ J_{yx} J_{xx}^* & J_{yx} J_{xy}^* & J_{yy} J_{xx}^* & J_{yy} J_{xy}^* \\ J_{yx} J_{yx}^* & J_{yx} J_{yy}^* & J_{yy} J_{yx}^* & J_{yy} J_{yy}^* \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Матрицей  $\mathbf{K}$  можно описать любое линейное воздействие недеполяризующей системы на вектор когерентности излучения, поступающего на её вход. Если система координат на выходе не совпадает с системой координат на входе, то матрица  $\mathbf{K}$  должна быть умножена слева на матрицу  $(\mathbf{T} \otimes \mathbf{T}^*)$ , описывающую преобразование системы координат. В случае, когда последнее сводится к вращению

---

<sup>25</sup> При получении (55) учитывалось следующее свойство прямого произведения: для любых четырех матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  имеем  $(\mathbf{AB}) \otimes (\mathbf{CD}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})(\mathbf{B} \otimes \mathbf{D})$ . Правило преобразования (55) справедливо для любого ортогонального (унитарного) базиса.

системы координат на угол  $\varphi$ , это матрица  $(\mathbf{T}_R(\varphi) \otimes \mathbf{T}_R(\varphi))$ , выражение для которой приведено ниже.

Угловые элементы матрицы  $\mathbf{K}$ , а именно  $\mathbf{K}_{11}$ ,  $\mathbf{K}_{14}$ ,  $\mathbf{K}_{41}$ ,  $\mathbf{K}_{44}$ , действительные неотрицательные числа. Матрицы  $\mathbf{K}$ , соответствующие матрицам Джонса, отличающимся друг от друга только фазовым множителем  $e^{i\psi}$ , совпадают. Матрица  $\mathbf{K}$  недеполяризующей системы, как и её матрица Джонса, характеризуется семью действительными числами. Если матрица Джонса эрмитова (унитарна), то и матрица  $\mathbf{K}$  эрмитова (унитарна).

Из определения (21) матрицы когерентности и закона преобразования вектора Джонса (53), с учётом матричного соотношения  $(\mathbf{AB})^+ = \mathbf{B}^+ \mathbf{A}^+$  и свойства ассоциативности произведения нескольких матриц, получим формулу связи матрицы когерентности на выходе системы (среды), характеризующейся матрицей Джонса  $\mathbf{J}$ , с матрицей когерентности на входе

$$\mathbf{I}_{\text{out}} = \mathbf{J} \mathbf{I}_{\text{in}} \mathbf{J}^+, \quad \mathbf{I}_{\text{in}} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{I}_{\text{out}} (\mathbf{J}^{-1})^+. \quad (57)$$

Из закона преобразования (57) матрицы когерентности следует ряд выводов [40]. *Во-первых*, если входное излучение полностью поляризовано, то поскольку при этом определитель матрицы когерентности  $\det \mathbf{I}_{\text{in}} = 0$ , то и  $\det \mathbf{I}_{\text{out}} = 0$ . Как и следовало ожидать, недеполяризующая система преобразует полностью поляризованное излучение также в полностью поляризованное. *Во-вторых*, если определитель матрицы Джонса  $\det \mathbf{J} = 0$ , то и  $\det \mathbf{I}_{\text{out}} = 0$ . Сингулярная матрица Джонса (опредетель равен нулю) соответствует идеальному поляризатору (пример – матрица идеального линейного поляризатора (54)). *В-третьих*, если матрица

Джонса унитарна  $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^+$ , то в силу унитарности преобразования системой с такой матрицей, сохраняются след и детерминант матрицы когерентности, а, следовательно, интенсивность и степень поляризации. *В-четвёртых*, при неполяризованном падающем излучении имеем  $\mathbf{I}_{\text{out}} = \frac{1}{2} I_{\text{in}} \mathbf{J} \mathbf{J}^+$ .

Учитывая, что матрица когерентности  $\mathbf{I}$  (20) равна среднему значению произведения вектора Джонса на его эрмитово-сопряженный вектор (см. (21)), и принимая во внимание (46), легко получить соотношение, по которому преобразуется матрица когерентности при вращении системы координат  $x, y \rightarrow x', y'$  <sup>26</sup>

$$\mathbf{I}_{D'} = \mathbf{T}_R(\varphi) \mathbf{I}_D \mathbf{T}_R(-\varphi), \quad \mathbf{I}_D = \mathbf{T}_R(-\varphi) \mathbf{I}_{D'} \mathbf{T}_R(\varphi). \quad (58)$$

Преобразование (58) является унитарным, поэтому оно сохраняет детерминант  $\det(\mathbf{I}_D)$  и след (шпур)  $\text{Sp}(\mathbf{I}_D) = I$  матрицы когерентности, в чем легко убедиться и непосредственно, вычисляя определитель и след матрицы  $\mathbf{I}_{D'}$  из (58).

В общем случае волновые векторы падающей волны  $\mathbf{k}_{\text{in}}$  и выходящей волны (их может быть больше одной)  $\mathbf{k}_{\text{out}}$  могут быть непараллельны (например, при отражении волны от плоской поверхности при наклонном падении) и векторы  $\mathbf{E}_{\text{in}}$  и  $\mathbf{E}_{\text{out}}$  в этом случае отнесены к различным декартовым системам координат. При этом оси  $z_{\text{in}}$  и  $z_{\text{out}}$  параллельны волновым векторам  $\mathbf{k}_{\text{in}}$  и  $\mathbf{k}_{\text{out}}$  соответственно, опорные координатные плоскости  $z_{\text{in}} = 0$  и  $z_{\text{out}} = 0$

---

<sup>26</sup> Выражения для элементов матрицы когерентности  $\mathbf{I}_{D'}$  через элементы матрицы  $\mathbf{I}_D$  и  $\mathbf{I}_D$  через  $\mathbf{I}_{D'}$  приведены в явном виде ниже (см. (75)).

на входе и выходе расположены в общем случае произвольно, оси координат  $x_{in}, y_{in}$  и  $x_{out}, y_{out}$  могут иметь любую подходящую азимутальную ориентацию, но обычно  $x_{in}, x_{out}$  расположены в плоскости, образованной волновыми векторами  $\mathbf{k}_{in}$  и  $\mathbf{k}_{out}$ , а  $y_{in}, y_{out}$  параллельны и ориентированы перпендикулярно этой плоскости. Если волновые вектора  $\mathbf{k}_{in}$  и  $\mathbf{k}_{out}$  параллельны, то системы координат  $x_{in}, y_{in}$  и  $x_{out}, y_{out}$  обычно выбираются параллельными и тогда их можно не различать. Исключение представляют случаи, когда система  $x_{out}, y_{out}$  повернута относительно  $x_{in}, y_{in}$  на некоторый угол в силу каких либо соображений, например, из-за упрощения матрицы Джонса, как в выше приведённом примере матрицы Джонса идеального линейного поляризатора.

## **7. Поляризационная передаточная функция. Собственные поляризации и собственные значения матрицы Джонса**

В развернутом виде выражение (53) запишется через элементы матрицы Джонса  $J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22}$  в виде системы двух линейных уравнений

$$\begin{aligned} E_{x'} &= J_{11}E_x + J_{12}E_y, \\ E_{y'} &= J_{21}E_x + J_{22}E_y. \end{aligned} \tag{59}$$

В (59) вместо обозначений  $x_{in}, y_{in}$  и  $x_{out}, y_{out}$  использованы обозначения  $x, y$  (на входе воздействующего устройства) и  $x', y'$  (на выходе). Последние не следует смешивать с использованными выше

такими же обозначениями для повернутой системы координат, хотя, как отмечено выше, в случае параллельных  $\mathbf{k}_{in}$  и  $\mathbf{k}_{out}$  система координат  $x', y'$  на выходе устройства иногда есть именно система, повернутая относительно системы координат  $x, y$  на его входе, если этот поворот целесообразен, если нецелесообразен, то  $x', y'$  могут просто совпадать с  $x, y$ . Поделив верхнее уравнение в (59) на нижнее и учитывая определение коэффициента поляризации (4), получим формулу для билинейного преобразования коэффициента поляризации системой, характеризующейся матрицей Джонса  $\mathbf{J}$

$$K_{x',y'} = \frac{J_{11}K_{x,y} + J_{12}}{J_{21}K_{x,y} + J_{22}} = f(K_{x,y}). \quad (60)$$

Функция  $f$  в (60) называется *поляризационной передаточной функцией* системы [40]<sup>27</sup>. Каждая система с матрицей Джонса  $\mathbf{J}$  имеет в общем случае две собственные поляризации, которые не изменяются при прохождении через неё. Чтобы вычислить собственные поляризации, следует положить в (60)  $K_{x',y'} = K_{x,y} = K$  и решить квадратное уравнение относительно  $K$ . В результате получаются следующие выражения для коэффициентов  $K_1, K_2$  собственных поляризаций матрицы Джонса  $\mathbf{J}$ <sup>28</sup>

---

<sup>27</sup> В [40] выражение (2.50) для передаточной функции отличается от (60) в силу другого определения коэффициента поляризации (см. выше сноску 8).

<sup>28</sup> Коэффициенты  $K_1, K_2$  определяют собственные векторы матрицы Джонса  $\mathbf{E}_{e1}, \mathbf{E}_{e2}$  с точностью до произвольного комплексного множителя (см. (4)).

$$K_1 = \frac{J_{11} - J_{22} + \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4J_{12}J_{21}}}{2J_{21}}, \quad j_1 = \frac{\text{Sp}\mathbf{J} + \sqrt{(\text{Sp}\mathbf{J})^2 - 4\det\mathbf{J}}}{2};$$

$$K_2 = \frac{J_{11} - J_{22} - \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4J_{12}J_{21}}}{2J_{21}}, \quad j_2 = \frac{\text{Sp}\mathbf{J} - \sqrt{(\text{Sp}\mathbf{J})^2 - 4\det\mathbf{J}}}{2}.$$
(61)

Им соответствуют собственные значения  $j_1$  и  $j_2$ , также приведённые в (61). Разумеется, собственные векторы и собственные значения матрицы Джонса можно найти из матричного уравнения  $\mathbf{J}\mathbf{E}_e = j\mathbf{E}_e$ , не прибегая к понятию поляризационной передаточной функции.

В качестве примера найдём собственные поляризации и собственные значения матрицы ротатора

$$\mathbf{J}(\varphi) = \mathbf{T}_R(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \text{ Используя формулы (61), получим}$$

$K_1 = i, j_1 = e^{i\varphi}; K_2 = -i, j_2 = e^{-i\varphi}$ . Первая собственная поляризация соответствует правой круговой, вторая соответствует левой круговой (см. рис 2). В собственном (круговом) базисе<sup>29</sup> матрица ротатора

$$\text{имеет вид } \mathbf{J}_{\text{CB}}(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \text{ Другой пример - матрица идеального}$$

линейного поляризатора (54). Проведя аналогичные вычисления, получим  $K_1 = \text{ctg}\chi, j_1 = 1; K_2 = -\text{tg}\chi, j_2 = 0$ . В собственном прямоугольном базисе, ось  $x$  которого направлена вдоль оси

---

<sup>29</sup> Описание поляризации в круговом базисе будет рассмотрено во второй части данной работы.

пропускания поляризатора, матрица приобретает вид

$$(\mathbf{J}_{\text{ILP}})_{\text{CB}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (см. раздел 5).}$$

Элементы матрицы Джонса являются в общем случае комплексными числами. Матрица Джонса зависит от: вида устройства (радио или оптического) или системы, частоты волны, ориентации устройства относительно  $\mathbf{k}_{\text{in}}$ , расположения опорных координатных плоскостей  $z=0$  и  $z'=0$  на входе и выходе устройства, азимутальной ориентации осей координат  $x, y$  относительно  $\mathbf{k}_{\text{in}}$  и  $x', y'$  относительно  $\mathbf{k}_{\text{out}}$  данной выходящей плоской волны, если таковых больше чем одна [40]. Если на пути волны встречаются  $N$  воздействующих устройств (это могут быть радио или оптические устройства, среды и т. д.), то, при некоторых условиях, результирующее воздействие можно описать произведением  $\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_N \mathbf{J}_{N-1} \dots \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1$  матриц Джонса отдельных систем, взятых в таком порядке, что  $\mathbf{J}_1$  есть матрица элемента, стоящего первым на пути падающей волны,  $\mathbf{J}_2$  - соответствует второму устройству, стоящему после первого и т.д. [40].

Найдем правило, по которому преобразуется матрица Джонса  $\mathbf{J}$  при вращении на один и тот же угол  $\varphi$  систем координат на входе и выходе недеполяризующего устройства. С этой целью умножим слева правую и левую части (53) на матрицу поворота  $\mathbf{T}_R(\varphi)$ :  $\mathbf{T}_R(\varphi)\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{T}_R(\varphi)\mathbf{J}\mathbf{E}_{\text{in}}$ . Отсюда получим, пользуясь равенством  $\mathbf{T}_R(-\varphi)\mathbf{T}_R(\varphi) = \mathbf{E}$  ( $\mathbf{E}$  - единичная матрица) и принимая во внимание свойство ассоциативности произведения нескольких матриц,

следующее равенство  $\mathbf{T}_R(\varphi)\mathbf{E}_{\text{out}} = (\mathbf{T}_R(\varphi)\mathbf{J}\mathbf{T}_R(-\varphi))(\mathbf{T}_R(\varphi)\mathbf{E}_{\text{in}})$ , из которого следует формула преобразования матрицы Джонса

$$\mathbf{J}' = \mathbf{T}_R(\varphi)\mathbf{J}\mathbf{T}_R(-\varphi), \quad (62)$$

где  $\mathbf{J}'$  – преобразованная матрица Джонса.

## 8. Матрица преобразования вектора Стокса (матрица Мюллера)

Пользуясь определением (20) и формулами (28) в системе координат  $x', y'$ , а также соотношением (46), получим следующие выражения для параметров Стокса в базисе  $D'$  через значения параметров Стокса в базисе  $D$ :

$$\begin{aligned} I' &= I, \\ Q' &= (\cos 2\varphi)Q + (\sin 2\varphi)U, \\ U' &= -(\sin 2\varphi)Q + (\cos 2\varphi)U, \\ V' &= V, \end{aligned} \quad (63)$$

где параметры Стокса со штрихами относятся к системе координат  $x', y'$ , без штрихов – к системе координат  $x, y$ . Из (63) видно, что  $I$  и  $V$  инвариантны по отношению к вращению прямоугольной системы координат. Формулы (63) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \mathbf{M}_R(\varphi)\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ 0 & -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Матрица  $4 \times 4$ , преобразующая вектор Стокса при преобразовании системы координат (при переходе от одного базиса к другому), есть частный случай матрицы Мюллера  $\mathbf{M}$ . Матрицей Мюллера характеризуется любое линейное воздействие на вектор Стокса падающей волны  $\mathbf{S}_{\text{in}}$  каждого из следующих объектов: среды распространения, антенны, облучателя, приёмника, и вообще того или иного устройства, преобразующего электромагнитную волну<sup>30</sup>

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{\text{out}} &= \mathbf{M}\mathbf{S}_{\text{in}}, \\ \mathbf{S}_{\text{in}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}_{\text{out}}.\end{aligned}\tag{65}$$

Матрица Мюллера в (64) называется матрицей вращателя (ротатора)  $\mathbf{M}_R(\varphi)$ . Она описывает воздействие на падающую волну вращающей среды или оптического ротатора, которое приводит к повороту плоскости поляризации линейно поляризованного излучения на угол  $-\varphi$ .

Результирующее воздействие среды, антенны, облучателя и приемника можно, при определенных условиях, описать, как и в случае описания воздействия матрицей Джонса, произведением соответствующих матриц. При этом справа в цепочке матриц должна стоять та, которая описывает первый элемент, стоящий на пути падающей волны. Описание воздействия на вектор Стокса с помощью матрицы Мюллера применимо для общего случая деполяризующей системы, то есть вносящей случайные амплитудные и фазовые изменения в падающую волну, которые не могут быть описаны матрицей Джонса, применимой лишь для описания недеполяризующих систем. Описание недеполяризующей системы

---

<sup>30</sup> Относительно выбора систем координат на входе и выходе среды или устройства справедливо сказанное выше при рассмотрении матрицы Джонса и матрицы  $\mathbf{K}$ .

матрицей Мюллера также возможно и последнюю можно при этом вычислить по матрице Джонса (см. ниже). Умножив (64) слева на матрицу  $\mathbf{M}_R^{-1}(\varphi) = \mathbf{M}_R(-\varphi)$ , обратную  $\mathbf{M}_R(\varphi)$ , получим

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \mathbf{M}_R(-\varphi)\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & 0 \\ 0 & \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix}. \quad (66)$$

При одновременном вращении на один и тот же угол  $\varphi$  декартовых систем координат, относительно которых рассматривается поляризация волны на входе и выходе воздействующего устройства, матрица Мюллера этого устройства изменяется по правилу, получаемому из (64) и (65), которое аналогично (62) для матрицы Джонса

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}_R(\varphi)\mathbf{M}\mathbf{M}_R(-\varphi). \quad (67)$$

Матрица Мюллера недеполяризующей системы связана с матрицей Джонса  $\mathbf{J}$  и матрицей  $\mathbf{K}$  следующими равенствами <sup>31</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{D}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*)\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}, \\ \mathbf{M}^{-1} &= \mathbf{D}(\mathbf{J}^{-1} \otimes (\mathbf{J}^{-1})^*)\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{D}^{-1}. \end{aligned} \quad (68)$$

---

<sup>31</sup> Если матрица  $\mathbf{M}$  описывает преобразование вектора Стокса при переходе от одного ортогонального (унитарного) базиса к другому ортогональному (унитарному), то вместо  $\mathbf{J}$  следует подставить матрицу  $\mathbf{T}$ .

Выражения (68) нетрудно получить, учитывая соотношение  $\mathbf{S}_{\text{out}} = \mathbf{M}\mathbf{S}_{\text{in}}$ , связь (35) между вектором когерентности и вектором Стокса и формулу (55) преобразования вектора когерентности. Из (68) видно, что если матрица Джонса сингулярная (вырожденная), то  $\mathbf{M}^{-1}$  не существует.

Выразим из (68) элементы матрицы Мюллера через элементы матрицы Джонса. В результате получим формулы (69).

В качестве примера вычислим матрицу Мюллера идеального вертикального (ориентированного вдоль оси  $x$ ) линейного облучателя по его матрице Джонса. Пользуясь выражением (54) при  $\chi = 0$  и формулами (69), получим выражение (70).

Все элементы матрицы Мюллера – действительные числа (это легко проследить по (69) в случае недеполяризирующего воздействия), и в общем случае у неё может быть шестнадцать независимых элементов. Элементы матрицы Джонса – комплексные числа, и поскольку у квазимонохроматического сигнала нет абсолютной фазы, матрица Джонса характеризуется семью независимыми действительными числами, следовательно, матрица Мюллера недеполяризирующей системы имеет семь независимых элементов. Матрицы Мюллера двух систем, матрицы Джонса которых отличаются лишь фазовым множителем  $e^{i\psi}$ , совпадают. Если матрица Джонса эрмитова, то матрица Мюллера симметрична, если матрица Джонса унитарна, то обратная матрица Мюллера совпадает с её транспонированной.<sup>32</sup>

---

<sup>32</sup> Подробнее о свойствах матрицы Мюллера и о геометрической интерпретации её воздействия см. [53], [54].

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{1}{2} \left[ (J_{xx} J_{xx}^* + J_{yy} J_{yy}^*) + (J_{xy} J_{xy}^* + J_{yx} J_{yx}^*) \right], \\
M_{12} &= \frac{1}{2} \left[ (J_{xx} J_{xx}^* - J_{yy} J_{yy}^*) - (J_{xy} J_{xy}^* - J_{yx} J_{yx}^*) \right], \\
M_{13} &= \frac{1}{2} \left[ (J_{xx} J_{xy}^* + J_{xx}^* J_{xy}) + (J_{yy} J_{yx}^* + J_{yy}^* J_{yx}) \right], \\
M_{14} &= \frac{1}{2} \left[ i(J_{xx} J_{xy}^* - J_{xx}^* J_{xy}) - i(J_{yy} J_{yx}^* - J_{yy}^* J_{yx}) \right], \\
M_{21} &= \frac{1}{2} \left[ (J_{xx} J_{xx}^* - J_{yy} J_{yy}^*) + (J_{xy} J_{xy}^* - J_{yx} J_{yx}^*) \right], \\
M_{22} &= \frac{1}{2} \left[ (J_{xx} J_{xx}^* + J_{yy} J_{yy}^*) - (J_{xy} J_{xy}^* + J_{yx} J_{yx}^*) \right], \\
M_{23} &= \frac{1}{2} \left[ (J_{xx} J_{xy}^* + J_{xx}^* J_{xy}) - (J_{yy} J_{yx}^* + J_{yy}^* J_{yx}) \right], \\
M_{24} &= \frac{1}{2} \left[ i(J_{xx} J_{xy}^* - J_{xx}^* J_{xy}) + i(J_{yy} J_{yx}^* - J_{yy}^* J_{yx}) \right] \\
& \\
M_{31} &= \frac{1}{2} \left[ (J_{xx} J_{yx}^* + J_{xx}^* J_{yx}) + (J_{xy} J_{yy}^* + J_{xy}^* J_{yy}) \right], \\
M_{32} &= \frac{1}{2} \left[ (J_{xx} J_{yx}^* + J_{xx}^* J_{yx}) - (J_{xy} J_{yy}^* + J_{xy}^* J_{yy}) \right], \\
M_{33} &= \frac{1}{2} \left[ (J_{xx} J_{yy}^* + J_{xx}^* J_{yy}) + (J_{xy} J_{yx}^* + J_{xy}^* J_{yx}) \right], \\
M_{34} &= \frac{1}{2} \left[ i(J_{xx} J_{yy}^* - J_{xx}^* J_{yy}) - i(J_{xy} J_{yx}^* - J_{xy}^* J_{yx}) \right], \\
M_{41} &= \frac{1}{2} \left[ -i(J_{xx} J_{yx}^* - J_{xx}^* J_{yx}) - i(J_{xy} J_{yy}^* - J_{xy}^* J_{yy}) \right], \\
M_{42} &= \frac{1}{2} \left[ -i(J_{xx} J_{yx}^* - J_{xx}^* J_{yx}) + i(J_{xy} J_{yy}^* - J_{xy}^* J_{yy}) \right], \\
M_{43} &= \frac{1}{2} \left[ -i(J_{xx} J_{yy}^* - J_{xx}^* J_{yy}) - i(J_{xy} J_{yx}^* - J_{xy}^* J_{yx}) \right], \\
M_{44} &= \frac{1}{2} \left[ (J_{xx} J_{yy}^* + J_{xx}^* J_{yy}) - (J_{xy} J_{yx}^* + J_{xy}^* J_{yx}) \right].
\end{aligned} \tag{69}$$

$$\mathbf{M}_{\text{ILP}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (70)$$

Приведём, пользуясь (28) и (66), формулы для параметров Стокса в базисе  $D'$  при  $\varphi = 45^\circ$

$$\begin{aligned} I = I' &= \frac{c}{4\pi} \left( \overline{E_{0x'}}^2 + \overline{E_{0y'}}^2 \right) = I_{x'x'} + I_{y'y'}, \\ Q &= -U'(\varphi = 45^\circ) = -\frac{c}{2\pi} \overline{E_{0x'} E_{0y'}} \cos(\psi_{x'} - \psi_{y'}) = -2\text{Re}(I_{x'y'}) = -(I_{x'y'} + I_{y'x'}), \\ U &= Q(\varphi = 45^\circ) = \frac{c}{4\pi} \left( \overline{E_{0x'}}^2 - \overline{E_{0y'}}^2 \right) = I_{x'x'} - I_{y'y'}, \\ V = V' &= \frac{c}{2\pi} \overline{E_{0x'} E_{0y'}} \sin(\psi_{x'} - \psi_{y'}) = 2\text{Im}(I_{x'y'}) = -i(I_{x'y'} - I_{y'x'}). \end{aligned} \quad (71)$$

Сопоставляя (28) и (71) получим связь между вектором когерентности в системе координат  $x, y$  и в системе координат  $x', y'$ , повернутой относительно исходной на угол  $\varphi = 45^\circ$  против часовой стрелки, в следующем виде:

$$\mathbf{V}'_I(\varphi = 45^\circ) = \mathbf{K}_R(\varphi = 45^\circ) \mathbf{V}_I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} \\ I_{xy} \\ I_{yx} \\ I_{yy} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V}_I = \left( \mathbf{K}_R(\varphi = 45^\circ) \right)^{-1} \mathbf{V}'_I(\varphi = 45^\circ) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{x'x'}(\varphi = 45^\circ) \\ I_{x'y'}(\varphi = 45^\circ) \\ I_{y'x'}(\varphi = 45^\circ) \\ I_{y'y'}(\varphi = 45^\circ) \end{pmatrix}, \quad (72)$$

причём обратная матрица по отношению к матрице  $\mathbf{K}_R$  равна её эрмитово-сопряжённой (в данном случае транспонированной):

$$\left( \mathbf{K}_R(\varphi = 45^\circ) \right)^{-1} = \left( \mathbf{K}_R(\varphi = 45^\circ) \right)^+ = \overline{\mathbf{K}_R(\varphi = 45^\circ)} = \mathbf{K}_R(\varphi = -45^\circ).$$

Из (71) получим:

$$\begin{aligned} I_{x'x'}(\varphi = 45^\circ) &= \frac{1}{2}(I + U), \\ I_{x'y'}(\varphi = 45^\circ) &= \frac{1}{2}(-Q + iV), \\ I_{y'x'}(\varphi = 45^\circ) &= \frac{1}{2}(-Q - iV), \\ I_{y'y'}(\varphi = 45^\circ) &= \frac{1}{2}(I - U). \end{aligned} \quad (73)$$

В матричном виде (73) с учетом (35) и (72) запишется в виде:

$$\mathbf{V}'_I(\varphi = 45^\circ) = \mathbf{K}_R(\varphi = 45^\circ) \mathbf{D}^{-1} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{S}. \quad (74)$$

Для произвольного угла  $\varphi$  матрица  $\mathbf{K}_R(\varphi)$  в соотношении, описывающем преобразование вектора когерентности при повороте прямоугольной системы координат, равна  $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}_R(\varphi)\mathbf{D}$  (см. (68)) или  $\mathbf{T}_R(\varphi) \otimes \mathbf{T}_R(\varphi)$  и поэтому обобщение выражений (72) выглядит так

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}'_I(\varphi) &= \begin{pmatrix} I_{x'x'} \\ I_{x'y'} \\ I_{y'x'} \\ I_{y'y'} \end{pmatrix} = \mathbf{K}_R(\varphi)\mathbf{V}_I = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}_R(\varphi)\mathbf{D}\mathbf{V}_I = (\mathbf{T}_R(\varphi) \otimes \mathbf{T}_R(\varphi))\mathbf{V}_I = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & \sin 2\varphi & 1 - \cos 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & 1 + \cos 2\varphi & -1 + \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & -1 + \cos 2\varphi & 1 + \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ 1 - \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & -\sin 2\varphi & 1 + \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{xx} \\ I_{xy} \\ I_{yx} \\ I_{yy} \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{V}_I &= \begin{pmatrix} I_{xx} \\ I_{xy} \\ I_{yx} \\ I_{yy} \end{pmatrix} = \mathbf{K}_R(-\varphi)\mathbf{V}'_I = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}_R(-\varphi)\mathbf{D}\mathbf{V}'_I = (\mathbf{T}_R(-\varphi) \otimes \mathbf{T}_R(-\varphi))\mathbf{V}'_I = \quad (75) \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & -\sin 2\varphi & 1 - \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi & 1 + \cos 2\varphi & -1 + \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -1 + \cos 2\varphi & 1 + \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ 1 - \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & \sin 2\varphi & 1 + \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{x'x'} \\ I_{x'y'} \\ I_{y'x'} \\ I_{y'y'} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Матрица  $\mathbf{K}_R(\varphi)$  в (75) является матрицей ротатора для вектора когерентности. Подставляя в (75)  $\varphi = 45^\circ$ , получим выражения (72).

Для произвольной недеполяризующей системы с матрицей Мюллера  $\mathbf{M}$  имеем следующие соотношения между матрицами  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  (см. (68)).

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{D}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{D}\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}. \quad (76)$$

### 9. Матрица когерентности для непараллельных и неортогональных проекций вектора электрического поля

Определение матрицы когерентности полезно обобщить на случай смешанной корреляции компонент вектора Джонса в декартовых базисах  $D$  и  $D'$  (второй повернут относительно первого на угол  $\varphi$ ). Тогда вместо (21) имеем

$$\mathbf{I}_{DD'}(\varphi) = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E}_{x,y}(t)\mathbf{E}_{x',y'}^+(t)} = \frac{c}{4\pi} \overline{\begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x'}^*(t) & E_{y'}^*(t) \end{pmatrix}}. \quad (77)$$

Особый интерес представляет  $\mathbf{I}_{DD'}(45^\circ)$ . Выражения для элементов этой матрицы через параметры Стокса в базисе  $D$  легко получить из (34), (46) и (77)

$$\begin{aligned} I_{xx'}(\varphi = 45^\circ) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(I + Q + U + iV), \\ I_{yy'}(\varphi = 45^\circ) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(-I - Q + U + iV), \\ I_{yx'}(\varphi = 45^\circ) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(I - Q + U - iV), \\ I_{xy'}(\varphi = 45^\circ) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(I - Q - U + iV). \end{aligned} \quad (78)$$

В матричной форме (78) запишется следующим образом:

$$\mathbf{V}_{\text{IDD}'(45^\circ)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & i \\ -1 & -1 & 1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -i \\ 1 & -1 & -1 & i \end{pmatrix} \mathbf{S}. \quad (79)$$

Объединим для удобства в одной таблице (34), (73) и (78). В третьем столбце таблицы по существу приведены выходные сигналы коррелометра, на входы которого подаются сигналы, принимаемые линейно поляризованными антеннами с позиционными углами, указанными в первом столбце таблицы.

Таблица

Позиционные углы коррелируемых линейных компонент электрического вектора	Элементы матрицы (или вектора) когерентности	Соответствующие им линейные комбинации параметров Стокса или видности этих комбинаций
0 - 0	$I_{xx}$	$\frac{1}{2}(I+Q)$
0 - 90	$I_{xy}$	$\frac{1}{2}(U+iV)$
90 - 0	$I_{yx}$	$\frac{1}{2}(U-iV)$
90 - 90	$I_{yy}$	$\frac{1}{2}(I-Q)$
45 - 45	$I_{x'x'}$	$\frac{1}{2}(I+U)$
45 - 135	$I_{x'y'}$	$\frac{1}{2}(-Q+iV)$

135 - 45	$I_{y'x'}$	$\frac{1}{2}(-Q - iV)$
135 - 135	$I_{y'y'}$	$\frac{1}{2}(I - U)$
0 - 45	$I_{xx'}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}(I + Q + U + iV)$
0 - 135	$I_{xy'}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}(-I - Q + U + iV)$
90 - 45	$I_{yx'}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}(I - Q + U - iV)$
90 - 135	$I_{yy'}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}(I - Q - U + iV)$

При условии отсутствия круговой поляризации ( $V = 0$ ), можно измерить параметры Стокса линейной поляризации  $U$  и  $Q$ , используя в качестве входных сигналов коррелометра такие, у которых электрические векторы ориентированы вдоль направлений с позиционными углами соответственно  $0 - 90^\circ$  и  $45 - 135^\circ$ .

При произвольном угле  $\varphi$  между базисами  $D$  и  $D'$  имеем вместо (29) и (35)

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}(\varphi)\mathbf{V}_{\text{IDD}'},(\varphi),$$

$$\mathbf{V}_{\text{IDD}'},(\varphi) = \mathbf{D}^{-1}(\varphi)\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{D}^+(\varphi)\mathbf{S}, \quad (80)$$

где

$$\mathbf{D}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ -i \sin \varphi & -i \cos \varphi & i \cos \varphi & -i \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad (81)$$

$\mathbf{S}$  - вектор Стокса в базе  $D$ . Легко видеть, что  $\mathbf{D}(0) = \mathbf{D}$ , и, что при  $\varphi = \pi/4$ , второе из равенств (80) переходит в (79).

### 10. Видности параметров Стокса. Интерферометрия на антеннах с линейной поляризацией.

Если обобщить определение матрицы когерентности на случай разнесённого приёма, то её можно представить как

$$\mathbf{I}_{\text{DD}'}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi) = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E}_{x,y}(\vec{r}_1, t) \mathbf{E}_{x'y'}^+(\vec{r}_2, t)} = \frac{c}{4\pi} \overline{\begin{pmatrix} E_x(\vec{r}_1, t) \\ E_y(\vec{r}_1, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{x'}^*(\vec{r}_2, t) & E_{y'}^*(\vec{r}_2, t) \end{pmatrix}}, \quad (82)$$

где  $\vec{r}_1$  - вектор положения первой антенны,  $\vec{r}_2$  - второй,  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  - вектор базы интерферометра, направленный от первой антенны ко второй (электромагнитное поле космического источника предполагается статистически однородным),  $\varphi$  - угол между базами в точках  $\vec{r}_2$  и  $\vec{r}_1$ . Аналогично можно ввести вектор когерентности

$$\mathbf{V}_{\text{IDD}'}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi) = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E}_{x,y}(\vec{r}_1, t) \otimes \mathbf{E}_{x'y'}^*(\vec{r}_2, t)}. \quad (83)$$

Матрицу (82) (или вектор когерентности (83)) можно отождествить с матрицей (или вектором) видностей<sup>33</sup> в соответствующих комбинациях линейных поляризаций, элементы которой (или которого) можно измерить при помощи корреляционного интерферометра с антеннами 1 и 2,

<sup>33</sup> Иногда употребляется термин функция видимости или функция различимости.

регистрирующими соответствующие линейные компоненты электрического вектора излучения космического источника. Из теоремы ван Циттерта-Цернике, обобщённой на рассматриваемый случай, следует, что элементы матрицы или вектора когерентности есть Фурье преобразования соответствующих комбинаций параметров Стокса. В третьем столбце таблицы, приведённой выше, содержатся именно видности линейных комбинаций параметров Стокса, соответствующие элементам матрицы (или вектора) когерентности из второго столбца, если  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \neq 0$ . Видности параметров Стокса являются комплексными величинами. Будем обозначать видности крышечкой сверху ( $\hat{I}$ ,  $\hat{Q}$ ,  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$ ).

Вектор когерентности поля излучения космического источника на выходе корреляционного радиоинтерферометра равен

$$\mathbf{V}_{\text{Iout}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi) = \frac{c}{4\pi} \overline{\left( \mathbf{J}_1 \mathbf{E}_{x,y}(\vec{r}_1, t) \right) \otimes \left( \mathbf{J}_2^* \mathbf{E}_{x'y'}^*(\vec{r}_2, t) \right)}, \quad (84)$$

где  $\mathbf{J}_1$ ,  $\mathbf{J}_2$  матрицы Джонса соответственно 1-го и 2-го радиотелескопов, которые учитывают влияние среды, вращение небосвода, системы координат (в пункте 2) и линейного облучателя, действие антенны и приёмника. Пользуясь тождеством, приведённым в сноске 25, получим из (84) следующее выражение, связывающее векторы когерентности  $\mathbf{V}_{\text{Iin}}$  на входе и  $\mathbf{V}_{\text{Iout}}$  на выходе корреляционного радиоинтерферометра

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{Iout}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi) &= \left( \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{J}_2^* \right) \mathbf{V}_{\text{Iin}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, 0) = \mathbf{K}_{\text{int}} \mathbf{V}_{\text{Iin}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, 0), \\ \mathbf{V}_{\text{Iin}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, 0) &= \left( \mathbf{J}_1^{-1} \otimes \mathbf{J}_2^{-1*} \right) \mathbf{V}_{\text{Iout}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi) = \mathbf{K}_{\text{int}}^{-1} \mathbf{V}_{\text{Iout}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi). \end{aligned} \quad (85)$$

Формулы (85) являются обобщением формул (55) на случай разнесённых антенн с различными матрицами Джонса и, в общем случае, непараллельными и неортогональными линейными поляризациями:  $\vec{r}_2 \neq \vec{r}_1, \varphi \neq 0$ .

Обобщая (80) на случай разнесённого приёма имеем следующие соотношения между векторами видностей параметров Стокса и когерентности

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{S}}_{\text{in}} &= \mathbf{D}\mathbf{V}_{\text{in}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, 0), \\
 \mathbf{V}_{\text{in}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, 0) &= \mathbf{D}^{-1}\hat{\mathbf{S}}_{\text{in}}, \\
 \hat{\mathbf{S}}_{\text{out}} &= \mathbf{D}(\varphi)\mathbf{V}_{\text{out}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi), \\
 \mathbf{V}_{\text{out}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi) &= \mathbf{D}^{-1}(\varphi)\hat{\mathbf{S}}_{\text{out}} = \frac{1}{2}\mathbf{D}^+(\varphi)\hat{\mathbf{S}}_{\text{out}},
 \end{aligned} \tag{86}$$

где  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{in}}, \hat{\mathbf{S}}_{\text{out}}$  - векторы видностей параметров Стокса, соответственно, на входе и выходе корреляционного интерферометра. Учитывая (86), получим из (85) связь между вектором когерентности на выходе корреляционного интерферометра и вектором видностей параметров Стокса на его входе

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}_{\text{out}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi) &= \mathbf{K}_{\text{int}}\mathbf{D}^{-1}\hat{\mathbf{S}}_{\text{in}}, \\
 \hat{\mathbf{S}}_{\text{in}} &= \mathbf{D}\mathbf{K}_{\text{int}}^{-1}\mathbf{V}_{\text{out}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi).
 \end{aligned} \tag{87}$$

Если и на выходе интерферометра перейти к стоксовым координатам, то получим формулу связи вектора видностей параметров Стокса на входе и выходе корреляционного интерферометра через матрицу Мюллера  $\mathbf{M}_{\text{int}}$  последнего

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{S}}_{\text{out}} &= \mathbf{D}(\varphi)\mathbf{K}_{\text{int}}\mathbf{D}^{-1}\hat{\mathbf{S}}_{\text{in}} = \mathbf{M}_{\text{int}}\hat{\mathbf{S}}_{\text{in}}, \\ \hat{\mathbf{S}}_{\text{in}} &= \mathbf{D}\mathbf{K}_{\text{int}}^{-1}\mathbf{D}^{-1}(\varphi)\hat{\mathbf{S}}_{\text{out}} = \mathbf{M}_{\text{int}}^{-1}\hat{\mathbf{S}}_{\text{out}}.\end{aligned}\quad (88)$$

В качестве примера рассмотрим влияние различия фарадеевского вращения в ионосфере над местами расположения антенн 1 и 2 на интерференцию сигнала от точечного неполяризованного источника. Имеем для рассматриваемого случая вектор когерентности на входе среды в следующем виде

$$\mathbf{V}_{\text{in}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi = 0) = \frac{\hat{I}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (89)$$

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{T}_R(-\varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \mathbf{T}_R(-\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (90)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  углы поворота в ионосфере плоскости поляризации соответственно над пунктами 1 и 2. Подставляя (89) и (90) в (85) получим

$$\mathbf{V}_{\text{out}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi = 0) = \frac{\hat{I}}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ -\sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Формула (91) описывает влияние разницы в углах поворота из-за фарадеевского вращения на элементы вектора когерентности [55,

56]. На параллельных поляризациях амплитуда интерференционного сигнала уменьшается, по сравнению со случаем  $\varphi_1 = \varphi_2$ , на ортогональных поляризациях возникает сигнал, отсутствующий при  $\varphi_1 = \varphi_2$ . Очевидно, что в диапазоне метровых и дециметровых волн для преодоления фарадеевских замираний интерференционного сигнала целесообразно, хотя бы в одном из пунктов, регистрировать одновременно две ортогональные линейно поляризованные компоненты излучения источника. Обобщим рассмотренный выше пример, полагая, что  $\varphi \neq 0$ . Тогда вместо (90) имеем

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{T}_R(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \mathbf{T}_R(\varphi) \mathbf{T}_R(-\varphi_2) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2 - \varphi) & -\sin(\varphi_2 - \varphi) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi) & \cos(\varphi_2 - \varphi) \end{pmatrix}, \quad (92)$$

а вместо (91)

$$\mathbf{V}_{\text{Iout}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi) = \frac{\hat{I}}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi) \\ -\sin(\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi) \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1 - \varphi) \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Подставляя в (93)  $\varphi = 45^\circ$ , получим

$$\mathbf{V}_{\text{Iout}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \varphi = \pi/4) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{I} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ -\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Из (94) видно, что путём измерений одновременно величин  $I_{xx'}$  и  $I_{xy'}$  с помощью корреляционного интерферометра, состоящего из антенны 1 с линейной поляризацией вдоль оси  $x$ , и антенны 2, принимающей одновременно линейно поляризованные компоненты вдоль осей  $x'$  и  $y'$ , направленных под углом  $45^\circ$ , соответственно, к осям  $x$  и  $y$ , можно избежать полного замирания интерференционного сигнала из-за разницы  $\varphi_2 - \varphi_1$  в углах поворота при любом значении  $\varphi_2 - \varphi_1$ <sup>34</sup>. В отсутствие разницы углов поворота плоскости поляризации ( $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ) имеем равенство

$$I_{xx'} = -I_{xy'} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \hat{I}.$$

В заключение, вычислим матрицу  $\mathbf{M}_{\text{int}} = \mathbf{D}(\varphi)\mathbf{K}_{\text{int}}\mathbf{D}^{-1}$ , связывающую, векторы видностей параметров Стокса на выходе и входе корреляционного интерферометра согласно (88), которая описывает только что рассмотренный эффект разницы углов поворота плоскости поляризации из-за фарадеевского вращения над антеннами 1 и 2. Учитывая, что  $\mathbf{K}_{\text{int}} = \mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{J}_2$  и используя (92), получим (см., также, [43])

---

<sup>34</sup> Именно такова конфигурация декаметрового интерферометра, состоящего из антенны УТР-2 (линейная поляризация) и антенны УРАН (две ортогональные линейные поляризации) [57, 58]. В Вестерборкской системе апертурного синтеза, работающей на антеннах с линейной поляризацией и экваториальной монтировкой [59], есть перемещаемые и стационарные антенны. Позиционные углы плоскостей поляризации во вращающейся с небосводом системе координат у подвижных антенн равны  $45^\circ$  и  $135^\circ$ , а у неподвижных  $0^\circ$  и  $90^\circ$ . В результате получаются корреляционные отклики  $0^\circ - 45^\circ$ ,  $0^\circ - 135^\circ$ ,  $90^\circ - 45^\circ$ ,  $90^\circ - 135^\circ$  (см. последние четыре строки таблицы).

$$\mathbf{M}_{\text{int}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & 0 & -i \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ 0 & \cos(\varphi_2 + \varphi_1) & -\sin(\varphi_2 + \varphi_1) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_2 + \varphi_1) & \cos(\varphi_2 + \varphi_1) & 0 \\ -i \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & 0 & 0 & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{pmatrix}. \quad (95)$$

Из (95) видно, что матрица Мюллера преобразования вектора видностей параметров Стокса уже не является чисто действительной матрицей. Если  $\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi$ , то (95) переходит в  $\mathbf{M}_R(-\varphi)$  (см. (64)).

Пусть, в частности,  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ . Тогда из (95) получим

$$\mathbf{M}_{\text{int}}(\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -\sin 2\varphi_1 & -\cos 2\varphi_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\varphi_1 & -\sin 2\varphi_1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Матрица (96) преобразует вектор  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  в вектор  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$ .

## 11. ЛИТЕРАТУРА

1. Разин В.А. *Поляризация и спектры синхротронного радиоизлучения Галактики и дискретных источников*. Докторская диссертация, Горьковский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Горький, 1971.

2. Brouw W.A., Spoelstra T.A.Th. *Linear polarization of the galactic background at frequencies between 408 and 1411 MHz*. Astron. Astrophys. Suppl. v.26, p.129, 1976.
3. Виняйкин Е.Н., Абрамов В.И., Крайнов И.Л. *Линейная поляризация радиодуги вблизи центра Галактики на волне 7.6 см*. Письма в Астрономический журнал, т.15, №11, с. 971-974, 1989.
4. Виняйкин Е.Н. *Исследование линейно-поляризованной компоненты радиоизлучения Северного Полярного выступа на волне 31 см с высоким угловым разрешением*. Астрономический журн., т.72, № 5, сс. 674-686, 1995.
5. Vinyajkin E.N., Razin V.A. *Low frequency polarization observations of the Galactic radio emission*. In “Astrophysical polarized backgrounds”, American Institute of Physics, AIP conference proceedings, Melville, New York, v.609, pp.26-31, 2002.
6. Виняйкин Е.Н., Пасека А.М., Теплых А.И. *Спектры яркостной температуры линейно поляризованной компоненты фонового радиоизлучения Галактики*. Изв. вузов - Радиофизика, т.45, в.2, сс.113-120, 2002.
7. Vinyajkin E.N., Carretti E., Cortiglioni S., Poppi S. *Observations of linear polarization of background Galactic radio emission in selected directions at 8.3 GHz*. In “Astrophysical polarized backgrounds”, American Institute of Physics, AIP conference proceedings, Melville, New York, v.609, pp.287-290, 2002.
8. Reich W. *Galactic polarization surveys*. astro-ph/0603465v1.
9. Beck R., Berkhuisen E.M., Wielebinski R. *Distribution of polarized radio emission in M 31*. Nature, v.283, pp.272-275, 1980.
10. Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д., Шукуров А.М. *Магнитные поля галактик*. М.: Наука, 1988.
11. Шкловский И.С. *Сверхновые звезды*. М.: Наука, 1976.

12. Виняйкин Е.Н. *Исследования эволюции, угловой структуры и поляризации радиоизлучения мощных космических источников*. Кандидатская диссертация, Горький, НИРФИ, 1984.
13. Reynolds S.P. *Supernova Remnants*. In *Galactic and Extragalactic Radio Astronomy*. Eds. G.L. Verschuur, K.I. Kellermann. 1988.
14. Saikia D.J., Salter C.J. *Polarization Properties of Extragalactic Radio Sources*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, v.26, pp.93-144, 1988.
15. Виняйкин Е.Н., Абрамов В.И. *Асимметрия поляризационных характеристик радиоизлучения внутренних лепестков Центавра А по наблюдениям на волнах 13 и 31 см*. *Астрономический журн.*, т.68, №6, сс.1174-1180, 1991.
16. Lister M.L., Homan D.C. *MOJAVE: Monitoring of Jets in Active Galactic Nuclei with VLBA Experiments. I. First-Epoch 15 GHz Linear Polarization Images*. *Astronomical Journal*, v.130, pp.1389-1417, 2005.
17. Weiler K.W., de Pater I. *A Catalog of High Accuracy Circular Polarization Measurements*. *Astrophys. J. Suppl.* v.52, pp.293-327, 1983.
18. Gabuzda D.C., Vitriřhchak V.M., Mahmud M., O'Sullivan S.P. *Radio Circular Polarization Produced in Helical Magnetic Fields in Eight Active Galactic Nuclei*. *MNRAS*. v.384, p.1003G, 2008; astro-ph: 0711.4572v1.
19. Vitriřhchak V.M., Gabuzda D.C., Algaba J.C., Rastorgueva E.A., O'Sullivan S.P., O'Dowd A.O. *The 15-43 GHz parsec-scale circular polarization of 41 active galactic nuclei*. *MNRAS*. v.391, p.124V, 2008; astro-ph: 0809.2556v1.
20. Манчестер Р., Тейлор Дж. *Пульсары*. М.: "Мир", 1980, 292 с.
21. Backer D.C. *Pulsars*. In *Galactic and Extragalactic Radio Astronomy*. Eds. G.L. Verschuur, K.I. Kellermann. 1988.
22. Железняков В.В. *Радиоизлучение Солнца и планет*. М.: Наука, 1964.

23. Крюгер А. *Солнечная радиоастрономия и радиофизика*. М: “Мир”, 1984.
24. Hjelming R.M. *Radio Stars*. In *Galactic and Extragalactic Radio Astronomy*. Eds. G.L. Verschuur, K.I. Kellermann. 1988.
25. de Pater I. *Radio Images of the Planets*. Annual Review of Astronomy and Astrophysics. v.28, pp.347-399, 1990.
26. Виняйкин Е.Н., Кротиков В.Д. *Луна как космический источник частично линейно поляризованного радиоизлучения*. Известия вузов. Радиофизика. т.50, с.593., 2007.
27. Ponthieu N. *First detection of polarization of the submillimeter diffuse Galactic dust emission by Archeops*. New Astronomy Reviews. v.47, pp.1047-1056, 2003.
28. Hildebrand R. *Experiences with airborne and ground-based polarimetry*. New Astronomy Reviews. v.47, pp.1009-1015, 2003.
29. Lazarian A., Finkbeiner D. *Microwave emission from aligned dust*. New Astronomy Reviews. v.47, pp.1107-1116, 2003.
30. Leitch E.M., Kovac J., Pryke C., Carlstrom J.E., Halverson N.W., Holzapfel W.L., Dragovan M., Reddall B., Sandberg E.S. *Measurement of polarization with the Degree Angular Scale, Interferometer*. Nature, v.420, pp.763-771, 2002; astro-ph: 0209476.
31. Kovac J., Leitch E.M., Pryke C., Carlstrom J.E., Halverson N.W., Holzapfel W.L. *Detection of polarization in the microwave background using DASI*. Nature, v.420, pp.772-787, 2002; astro-ph: 0209478.
32. Cortiglioni S., Bernardi G., Carretti E., Casarini L., Cecchini S., Macculi C., Ramponi M., Sbarra C., Monari J., Orfei A., Poloni M., Poppi S., Boella G., Bonometto S., Colombo L., Gervasi M., Sironi G., Zannoni M., Baralis M., Peverini O.A., Tascone R., Virone G., Fabbri R., Natale V., Nicastro L., Ng K.-W., Vinyajkin E.N., Razin V.A., Sazhin M.V., Strukov I.A., Negri B. *The Sky Polarization Observatory*. New Astronomy, v.9, i.4, pp.297-327, 2004; astro-ph: 0401193.

33. Сажин М.В. *Анизотропия и поляризация реликтового излучения*. Успехи физических наук, т.174, №2, сс.197-205.
34. Balbi A., Natoli P., Vittorio N. *The CMB polarization: status and prospects*. astro-ph: 0606511.
35. Hinshaw G., Weiland J.L., Hill R.S., Odegard N., Larson D., Bennet C.L., Dunkley J., Gold B., Greason M.R., Jarosik N., Komatsu E., Nolte M.R., Page L., Spergel D.N., Wollack E., Halpern M., Kogut A., Limon M., Meyer S.S., Tucker G.S., Wright E.L. *Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe observations: data processing, sky maps, and basic results*. Astrophysical Journal. Supplement Series. v.180, no.2, pp.225-245, 2009.
36. Reid M.J., Moran J.M. *Astronomical masers*. In *Galactic and Extragalactic Radio Astronomy*. Eds. G.L. Verschuur, K.I. Kellermann. 1988.
37. Fish V.L., Reid M.J. *Full-polarization observations of OH masers in massive star-forming regions. II. Maser properties and the interpretation of polarization*. Astrophysical Journal. Supplement Series. v.164, no.1, pp.99-123, 2006.
38. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. М.: “Наука”, 1970.
39. Краус Дж.Д. *Радиоастрономия*. М.: “Советское радио”, 1973, 456с.
40. Азам Р., Башара Н. *Эллипсометрия и поляризованный свет*. М.: “Мир”, 1981, 583с.
41. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. М.: “Наука”, 1988, 509с.
42. Trans. Int. Astron. Union, v.15B, p.166, 1973.
43. Hamaker J.P., Bregman J.D., Sault R.J. *Understanding radio polarimetry. I. Mathematical foundations*. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. v.117, pp.137-147, 1996.

44. Hamaker J.P., Bregman J.D. *Understanding radio polarimetry. III. Interpreting the IAU/IEEE definitions of the Stokes parameters*. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. v.117, pp.161-165, 1996.
45. Томпсон А.Р., Моран Дж.М., Свенсон Дж.У. *Интерферометрия и синтез в радиоастрономии*. М.: Физматлит, 2003, 624с.
46. Vinyajkin E.N. *Faraday Rotation and Depolarization of Galactic Radio Emission in the Magnetized Interstellar Medium*. In The Magnetized Interstellar Medium. Proceedings of the conference 8-12 September 2003, Antalya, Turkey. Eds. B. Uyaniker, W. Reich, R. Wielebinski. Copernicus GmbH, p.93, 2004; astro-ph/0402370 v1 16 Feb 2004.
47. Berkhuijsen E.M., Brouw W.N. *Measurements of the galactic polarized radiation at 75 cm*. Bulletin Astronomical institutes Netherlands. v.17, n.3, pp. 185-202, 1963.
48. Gaensler B.M., Dickey J.M., McClure-Griffiths N.M., Green A.J., Wieringa M.H., Haynes R.F. *Radio polarization from the inner Galaxy at arcminute resolution*. Astrophysical Journal. v.549, no.2, pp.959-978, 2001.
49. Haverkorn M., Katgert P., de Bruyn A.G. *Multi-frequency polarimetry of the Galactic radio background around 350 MHz. I. A region in Auriga around  $l = 161^\circ$ ,  $b = 16^\circ$* . Astron. Astrophys. v.403, pp.1031-1044, 2003.
50. Рытов С.М. *Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы*. М: "Наука", 1976, 494с.
51. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. *Введение в статистическую радиофизику и оптику*. М., "Наука", 1981, 640с.
52. Ditchburn R.W. *Light*, v.I. Academic Press, 1976.
53. Абрамов В.И. *Некоторые свойства матрицы Мюллера поляризационных систем*. Астрофизические исследования. Известия Специальной астрофизической обсерватории. т.20, сс.117-130.

54. van Straten W. *Radio astronomical polarimetry and point-source calibration*. Astrophysical Journal. Supplement Series. v.152, no.1, pp.129-135, 2004.
55. Виняйкин Е.Н. *О влиянии фарадеевского вращения на измерения функции видимости космических радиоисточников*. Известия вузов. Радиофизика. т.16, №12, сс.1800-1803, 1973.
56. Виняйкин Е.Н. *О корреляционной огибающей диаграммы направленности интерферометра с учётом эффекта Фарадея и дисперсии среды*. Известия вузов. Радиофизика. т.18, №11, сс.1708-1710, 1975.
57. Бобейко А.Л., Бовкун В.П., Брауде С.Я., Мень А.В., Сергиенко Ю.Ю. *Интерферометр декаметрового диапазона радиоволн УРАН-1*. Антенны, под ред. А.А. Пистолькорса. М.: Связь, вып.26, сс.121-134, 1978.
58. Мень А.В. В книге *Советские радиотелескопы и радиоастрономия Солнца*. М.: "Наука", 1990, 212с.
59. Weiler K.W. *The Synthesis Radio Telescope at Westerbork. Methods of polarization measurement*. Astron. Astrophys. v.26, pp.403-407, 1973.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Введение .....	3
2. Вектор Джонса. Коэффициент поляризации .....	8
3. Параметры Стокса .....	14
4. Матрица и вектор когерентности. Коэффициент взаимной корреляции ортогональных компонент вектора электрического поля .....	21
5. Матрица преобразования вектора Джонса (матрица Джонса) ..	32
6. Преобразование вектора и матрицы когерентности .....	36
7. Поляризационная передаточная функция. Собственные поляризации и собственные значения матрицы Джонса.....	39
8. Матрица преобразования вектора Стокса (матрица Мюллера).....	43
9. Матрица когерентности для непараллельных и неортогональных проекций вектора электрического поля .....	51
10. Видности параметров Стокса. Интерферометрия на антеннах с линейной поляризацией .....	54
11. Литература .....	60

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ  
КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ.  
I. ДЕКАРТОВЫЙ ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ БАЗИС.

Виняйкин Евгений Николаевич

Оригинал-макет подготовлен  
в Отделе методов обработки научной информации ФГНУ НИРФИ

---

Подписано в печать 30.06.10. Формат 60x84/16  
Бумага писчая. Объем 2,7 усл.п.л.  
Тираж 50. Заказ 5599

---

Отпечатано в ФГНУ НИРФИ.  
603950 Н.Новгород, ул. Б.Печерская, 25/12а