

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное научное учреждение  
«Научно-исследовательский радиофизический институт»  
(ФГНУ НИРФИ)

**Препринт № 535**

МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА  
В ИССЛЕДОВАНИЯХ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ИОНОСФЕРНОЙ  
ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Выборнов Федор Иванович  
Алимов Владимир Александрович  
Рахлин Александр Викторович

Оригинал-макет подготовлен  
в Отделе методов обработки научной информации ФГНУ НИРФИ

Методы спектрального и мультифрактального анализа  
в исследованиях мелкомасштабной  
ионосферной турбулентности

Ф. И. Выборнов  
В. А. Алимов  
А. В. Рахлин

---

Подписано в печать 12.10.10. Формат 60x84/16  
Бумага писчая. Объем 1 п.л.  
Тираж 50. Заказ 5601

---

Отпечатано в ФГНУ НИРФИ.  
603950 Н.Новгород, ул. Б.Печерская, 25/12а

**Нижний Новгород  
2010**

## ЛИТЕРАТУРА

МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО И МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ИССЛЕДОВАНИЯХ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ИОНОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ // Препринт № 535. – Нижний Новгород: ФГНУ НИРФИ, 2010. – 16с.

УДК 621.371+533.951

Рассмотрены некоторые аспекты методов спектрального и мультифрактального анализа экспериментальных данных в исследованиях мелкомасштабной ионосферной турбулентности с помощью дистанционного радиозондирования ионосферы сигналами ИСЗ и при прямых зондовых измерениях флуктуаций электронной концентрации ионосферной плазмы космическими аппаратами. Показано, в частности, что непосредственное применение методов спектрального и мультифрактального анализа при обработке амплитудных записей принимаемых на Земле сигналов орбитальных ИСЗ не позволяет дать однозначную интерпретацию результатов измерений в пользу мелкомасштабной ионосферной турбулентности (МИТ) естественного или искусственного происхождения. Вместе с тем, существенное различие в измеряемых величинах ширины локальных мультистепенных спектров мелкомасштабной ионосферной турбулентности при обработке сигналов ИСЗ методом многомерных структурных функций (МСФ), в принципе, может служить индикатором реального состояния исследуемой МИТ в естественных условиях или при воздействии на ионосферу мощным КВ радиоизлучением. Но при дистанционном зондировании ионосферы сигналами ИСЗ с помощью метода МСФ или метода максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП) невозможно изучать тонкую мультифрактальную структуру ионосферной турбулентности. В то же время применение прямых зондовых измерений флуктуаций электронной концентрации в ионосфере на космических аппаратах и метода ММВП для обработки этих экспериментальных данных может выявить тонкую фрактальную структуру ионосферной турбулентности с размерами плазменных неоднородностей в единицы – десятки метров.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 09-02-97026-р\_поволжье\_a.

1. Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. – М: Наука, 1984.
2. Алимов В.А., Выборнов Ф.И., Мясников Е.Н., Рахлин А.В., Фролов В.Л. // Изв.ВУЗов. Радиофизика. 2009. Т. 52, № 9. С. 679–689.
3. Алимов В.А., Выборнов Ф.И., Рахлин А.В. // Изв.ВУЗов. Радиофизика. 2009. Т. 52, № 1. С. 14–22.
4. Алимов В.А., Выборнов Ф.И., Рахлин А.В. // Изв.ВУЗов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 4. С. 287.
5. Arheodo A et al. //Physica A. 1998. V.254. P.24–45.
6. Павлов А.И., Анищенко В.С.// УФН. 2007, Т.177, № 8, С. 859.
7. Рытов С. М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Т. II – М.: Наука, 1978.
8. Алимов В.А., Выборнов Ф.И., Рахлин А.В. Некоторые особенности перспективных исследований мультифрактальной структуры мелкомасштабной ионосферной турбулентности с использованием вейвлет-преобразования. Препринт № 528. – Нижний Новгород: ФГНУ НИРФИ, 2009. – 30 с.

– внутренний масштаб плазменной турбулентности верхней ионосферы [1]) на частоте зондирования 1 ГГц толщина слоя  $L$  должна не превышать нескольких десятков метров. Такая ситуация является практически нереальной для ионосферных условий, когда характерный размер толщины слоя ионосферной плазмы с мелкомасштабными неоднородностями составляет несколько единиц – десятков километров [1]. А в таком ”толстом” слое будут существенны дифракционные эффекты при распространении радиоволн. В конечном счете, это приведет к ”замыванию” тонкой квазисингулярной структуры неоднородной ИТ и к невозможности диагностики ее методом ММВП при наземном приеме сигналов ИСЗ (см. также [8]).

Поэтому для исследования тонкой структуры ИТ следует применять прямые зондовые измерения флуктуаций электронной концентрации  $\Delta N(x)$  с высокой частотой отсчетов  $\nu_{отсч}$  вдоль траектории космического аппарата в ионосфере (например при скорости орбитального ИСЗ  $\nu$ ; 8 км/с для обеспечения пространственного разрешения не хуже  $l_0$ ; 1 м в  $F$  слое ионосферы частота отсчета должна удовлетворять соотношению  $\nu_{отсч} \geq 10$  кГц). Мультифрактальная обработка таких прямых зондовых записей сигнала  $\Delta N(x)$  с помощью метода ММВП, в принципе, позволит выявлять тонкую фрактальную структуру ионосферной турбулентности.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ № 09-02-97026-р\_поволжье\_a.

## 1. Сравнительная характеристика методов спектрального и мультифрактального анализа экспериментальных данных в исследованиях мелкомасштабной ионосферной турбулентности

В течение нескольких десятилетий прошлого столетия и в начале нынешнего в исследованиях мелкомасштабной ионосферной турбулентности (МИТ) с помощью дистанционного зондирования ионосферы сигналами ИСЗ применяется метод спектрального анализа принимаемых сигналов. В основе его лежит вычисление частотного спектра  $\Phi_A(\nu)$  амплитудных флуктуаций сигналов, принимаемых от ИСЗ после радиопросвечивания ими неоднородной ионосферной плазмы. Для достаточно высоких спектральных частот функция  $\Phi_A(\nu)$  имеет вид [1]

$$\Phi_A(\nu) : \nu^{-p_A}, \quad (1)$$

где  $p_A$  – показатель спектра амплитудных флуктуаций принимаемого сигнала [1].

В рамках теории распространения высокочастотных сигналов в ионосфере со слабыми случайными неоднородностями электронной концентрации параметр  $p_A$  связан различными соотношениями с показателями  $p_3$  и  $p_2$  пространственных спектров мелкомасштабных неоднородностей электронной концентрации ионосферной плазмы [1].

В случае радиозондирования толстого слоя (толщина слоя  $L$  много больше характерного масштаба  $l$  неоднородностей) среднеширотной ионосферы с квазиизотропной МИТ естественного происхождения (спектр мелкомасштабных неоднородно-

стей электронной концентрации  $\Phi_N(\kappa) : \kappa^{-p_3}$ ;  $\kappa = \frac{2\pi}{l}$  – волновое число неоднородностей [1]) имеет место следующее соотношение [1]:

$$p_A = p_3 - 1. \quad (2)$$

При радиозондировании тонкого неоднородного слоя ( $L \leq l$ ) [1]

$$p_A = p_3 - 2. \quad (3)$$

В случае радиозондирования области искусственных ионосферных возмущений (ИИВ), создаваемых в ионосфере при воздействии на нее мощным КВ радиоизлучением, спектр неоднородностей электронной концентрации может характеризоваться степенной функцией  $\Phi_N(\kappa)$  вида [2]

$$\Phi_N(\kappa) : \kappa_{\perp}^{-p_2}, \quad (4)$$

где  $p_2$  – показатель спектра мелкомасштабной искусственной ионосферной турбулентности (МИИТ) в поперечном направлении к магнитному полю Земли на высоте  $F$  слоя ионосферы;  $\kappa_{\perp} = \frac{2\pi}{l_{\perp}}$  – поперечное волновое число неоднородностей;  $l_{\perp}$  – характерный масштаб мелкомасштабных ионосферных неоднородностей поперек магнитного поля.

Но, наряду с соотношением (4), при исследованиях пространственной структуры МИИТ использовалась и функция  $\Phi_N(\kappa)$  в виде [1]

$$\Phi_N(\kappa) : [\kappa_{\perp}^2 + a^2 \kappa_p^2]^{-p_3}, \quad (5)$$

гулярным поведением вблизи ”особых” точек  $t_l$  для скелетона ВП. При этом на любой экстремальной  $l$ -й линии для максимумов модулей откликов ВП имеет место скейлинговое соотношение (см. (17) – (19)):

$$|W(\tau, t_l)|_{\max} : \tau^{\alpha}. \quad (20)$$

Далее, с учетом соотношений (16) и (20), для исследуемой случайной функции может быть применена стандартная процедура фрактального формализма с последующим определением мультифрактального спектра исследуемого турбулентного процесса [5,6].

Но такой подход пригоден, по-видимому, лишь для контактных (зондовых) измерений структуры турбулентности. В этом случае исследуется поведение функции  $f(t)$ , которая непосредственно характеризует искомую турбулентную структуру изучаемого случайного процесса (см., например [5]).

При дистанционном зондировании ИТ сигналами ИСЗ и обработке их методом ММВП возникают непреодолимые сложности. Дело в том, что даже модель фазового экрана (модель ”тонкого” неоднородного слоя толщины  $L$  с отсутствием дифракционных эффектов при распространении радиоволн в этом слое) работает, лишь когда выполняется неравенство  $\lambda L = l^2$  (где  $\lambda$  – длина волны излучаемого сигнала,  $l$  – характерный размер неоднородностей) [7]. Для диагностики ”чистых” фазовых флуктуаций сигнала на выходе такого слоя при исследовании неоднородной турбулентной структуры с характерными размерами в несколько единиц – десятков метров (масштаб  $l \geq l_0$ , где  $l_0$ ; 1 м

Здесь предполагается, что мы имеем дело со случаем развитой турбулентности [5], когда второе слагаемое в формуле (18) описывает квазисингулярную тонкую структуру исследуемого турбулентного процесса. При этом, в отличие от упрощенного математического подхода, использованного в работах [5, 6], для описания поведения функции  $f(t)$  вблизи "особой" точки  $t_l$  применяется более сложная и более реалистичная физическая конструкция измеряемого сигнала с переменной функцией (см. (19)). В целом функция  $f(t)$  – регулярная функция, но вблизи некоторых выделенных точек  $t_l$  в области значений  $|t - t_l| \geq \tau_0$  она может вести себя как сингулярная функция вида  $f(t) = f(t_l) + c(t_l) \cdot |t - t_l|^\alpha$  с параметром  $0 < \alpha < 1$  (ср. [5,6]). Однако, строго говоря, внутри интервала  $\Delta t \leq \tau_0$  она полностью регулярна, подобно тому, как структурная функция 2-го порядка  $D_f(\tau)$  полностью регулярна внутри такого же малого интервала наблюдений за нижним пределом инерционного интервала турбулентности [7]. Но вклад этой малой области внутреннего интервала турбулентности в отклик ВП незначителен (см. (17) с учетом соотношений (18), (19) при  $\tau \gg \tau_0$ ) и поэтому приближенно можно считать, что на исследуемых локальных масштабах регистрации сигнала вблизи экстремальных точек  $t_l$  функция  $f(t)$  сингулярная. Действительно, математически функцию  $f(t)$ , точнее ее аппроксимацию при  $\Delta t \geq \tau_0$ , можно считать сингулярной функцией. Но реально на всем интервале наблюдений функция  $f(t)$  – гладкая дифференцируемая функция с квазисин-

где  $\kappa_p = \frac{2\pi}{l_p}$  – продольное волновое число неоднородностей,  $l_p$  – характерный продольный размер мелкомасштабных неоднородностей в направлении магнитного поля Земли,  $a > 1$  – показатель анизотропии МИИТ ( $a = l_p / l_\perp$ ).

В общем случае при радиозондировании области ИИВ со спектром анизотропной МИИТ в виде (4), когда распространение сигналов от орбитальных ИСЗ происходит вне плоскости магнитного меридиана, имеют место равенства

$$p_A = p_2 \quad (6)$$

для случая толстого неоднородного слоя ( $L \gg l$ ) [2] и

$$p_A = p_2 - 1 \quad (7)$$

для случая тонкого неоднородного слоя ( $L \leq l$ ) [2], когда распространение радиоволн происходит под малыми углами  $\theta$  между лучом зрения с наземного приемного пункта на ИСЗ и направлением магнитного поля Земли [2].

Для модели спектра неоднородностей вида (5) в первом случае (при  $L \gg l$ ) имеет место равенство (2), а во втором (при  $L \leq l_p$  и  $\theta \ll 1$ ) – равенство (3) [1].

Из сравнения соотношений (2), (3) и, соответственно, (6), (7) следует, что если для показателя  $p_2$  двумерного спектра неоднородностей выполняется приближенное (и довольно характерное для ионосферных условий) равенство [1]

$$p_2 \approx p_3 - 1, \quad (8)$$

то лишь по значению измеряемого на эксперименте показателя частотного спектра  $p_A$  амплитудных флуктуаций принимаемых от ИСЗ сигналов невозможно различить происхождение (естественное или искусственное) исследуемой МИТ. И даже характерное уменьшение показателя измеряемого спектра  $p_A$  на единицу при радиозондировании области возмущений вдоль направления магнитного поля Земли ( $\theta \ll 1$ ) по сравнению со случаем зондирования ее под большими углами  $\theta$  еще не является основанием для однозначного определения вида спектра МИТ в форме (4) или (5) (ср. (2), (3) и (6),(7)).

Обратимся теперь к мультифрактальной обработке принимаемых на Земле сигналов от орбитальных ИСЗ после радиопросвечивания ими неоднородной ионосферной плазмы. В основе метода мультифрактального анализа принимаемых сигналов лежит измерение многомерных структурных функций амплитудных флуктуаций этих сигналов на заданном интервале  $T$  с небольшим временном разнесением  $\tau$  [3]:

$$\langle |\Delta A(\tau)|^q \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |A(t+\tau) - A(t)|^q dt : \tau^{\varphi_A(q)}, \quad (9)$$

где  $\varphi_A(q)$  – показатель масштабного подобия (скейлинга) при аппроксимации измеряемых структурных функций  $q$ -го порядка  $\langle |\Delta A(\tau)|^q \rangle$  амплитудных флуктуаций принимаемых сигналов.

В случае зондирования МИТ естественного происхождения с квазиизотропным мультистепенным спектром

$$\Phi_{N_q}(\kappa) : \kappa^{-p_{3q}} \quad (10)$$

$$z(q, \tau) = \sum_{l=1}^N |W(\tau, t_l)|_{\max}^q, \quad (16)$$

где  $l$  – линия максимумов для скелетона вейвлет-преобразования (ВП) (см. [5,6]);  $N$  – число таких экстремальных линий на интервале наблюдений за сигналом,  $q$  – параметр порядка в частичной сумме.

Максимум модуля вейвлет-преобразования на  $l$ -й линии (вблизи "особой" точки  $t_l$  имеет вид [5,6]

$$|W(\tau, t_l)|_{\max} = \frac{1}{\tau} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \psi\left(\frac{t-t_l}{\tau}\right) \cdot f(t) dt \right|_{\max}. \quad (17)$$

Здесь функция  $\psi\left(\frac{t-t_l}{\tau}\right)$  – стандартная вейвлет-функция с временным разрешением  $\tau$  [5,6].

Исследуемую случайную функцию  $f(t)$  вблизи особых "точек"  $t_l$ , для которых отклик модуля ВП (17) является максимальным, целесообразно записать в следующем виде (ср. [5,6]):

$$f(t) = f(t_l) + c(t_l) \cdot |t-t_l|^{\alpha(t-t_l)}, \quad (18)$$

где  $c(t_l) = \text{const}(t_l)$ , а параметр  $\alpha(t-t_l)$ :

$$\alpha(t-t_l) = \begin{cases} 0 < \alpha < 1 & \text{при } |t-t_l| > \tau_0 \\ \alpha > 1 & \text{при } |t-t_l| < \tau_0 \end{cases}, \quad (19)$$

$\tau_0$  – характерный внутренний масштаб турбулентности изучаемого случайного процесса  $f(t)$ .

## 2. Об одной особенности исследований тонкой мультифрактальной структуры ионосферной турбулентности

В последнее время был выполнен ряд работ по изучению мультифрактальной структуры развитой ионосферной турбулентности (ИТ) (см. [3] и цитируемую там литературу). При этом соответствующие исследования проводились с помощью дистанционного зондирования ионосферной плазмы сигналами орбитальных ИСЗ с последующей обработкой принимаемых сигналов методом многомерных структурных функций (МСФ). Но метод МСФ – интегральный метод исследований случайных процессов. Носителем фрактальной меры в нем является структурная функция 2-го порядка исследуемого процесса на локальном (квазистационарном) интервале наблюдений [4]. Поэтому с помощью этого метода невозможно изучить тонкую мультифрактальную структуру ионосферной турбулентности. В то же время предложенный и реализованный на практике метод максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП) при исследовании мультифрактальной структуры атмосферной турбулентности [5], в принципе, может быть использован и для изучения тонкой структуры ионосферной турбулентности. В отличие от метода МСФ, в методе ММВП носителем фрактальной структуры является сама сингулярная функция  $f(t)$ , описывающая этот случайный процесс в отдельных случайным образом выбранных ”особых” точках  $t_e$  исследуемого процесса.

При этом в основе метода ММВП лежит определение частичной суммы  $z(q, \tau)$ :

( $p_{3_q}$  – показатель для  $q$ -й компоненты локального мультистепенного спектра МИТ) имеем [3]

$$p_{3_q} = 2 + 2\alpha_q, \quad (11)$$

где  $\alpha_q = \frac{d\varphi_A(q)}{dq}$  – гельдеровская экспонента в теории мультифрактального анализа сигналов [3].

В случае радиозондирования анизотропной МИИТ со спектром

$$\Phi_{N_q}(\vec{k}) : \kappa_{\perp}^{-p_{2_q}} \quad (12)$$

( $p_{2_q}$  -показатель для  $q$ -й компоненты локального мультистепенного спектра МИИТ в плоскости поперек направления магнитного поля Земли) имеем [3]

$$p_{2_q} = 1 + 2\alpha_q, \quad (13)$$

если распространение сигналов от орбитальных ИСЗ происходит вне плоскости магнитного меридиана под большим углом  $\theta$  и

$$p_{2_q} = 2 + 2\alpha_q \quad (14)$$

при малых углах зондирования  $\theta$  тонкого слоя с мелкомасштабными анизотропными неоднородностями ( $L \leq l_p \gg l_{\perp}$ ) [2].

Как следует из соотношения (11), (13) и (14), искомые показатели  $p_{3_q}$  и  $p_{2_q}$  для локальных мультистепенных спектров МИТ и МИИТ в различных случаях радиозондирования случайно-неоднородной ионосферной плазмы могут определяться различным образом. При этом, как и в случае рассмотренного выше

метода спектрального анализа экспериментальных данных, на однозначную интерпретацию результатов измерений в пользу МИТ естественного (спектр(10)) или искусственного (спектр (12)) происхождения, на первый взгляд, надеяться не приходится.

Но надо иметь в виду, что, в отличие от метода спектрального анализа флуктуирующих сигналов, мультифрактальная обработка принимаемых сигналов позволяет получать информацию не для одного измеряемого значения показателя амплитудного спектра  $p_A$ , а для некоторого набора показателей скейлинга различного порядка  $q$  соответствующих структурных функций флуктуаций амплитуды принимаемого сигнала (см. (9)). В результате мы имеем дело с целым спектром значений параметров  $p_{3_q}$  и  $p_{2_q}$  (см. (11), (13) и (14)). При этом целесообразно проанализировать поведение ширины  $\Delta p$  локального спектра исследуемой МИТ, определяемую как разность соответствующих значений параметров  $p_{3_q}$  и  $p_{2_q}$ , взятых для двух фиксированных значений параметра  $q$  ( $q_{\min} \leq q \leq q_{\max}$ ). Тогда из соотношений (11), (13) и (14) находим, что соответствующее значение величины  $\Delta p$  определяется единым образом для всех указанных выше ситуаций при радиозондировании сигналами орбитальных ИСЗ МИТ естественного и искусственного происхождения:

$$\Delta p = 2(\alpha_{q_{\min}} - \alpha_{q_{\max}}). \quad (15)$$

Важно заметить, что ширина  $\Delta p$  искомого локального спектра МИТ (15) является измеряемой величиной, не зависящей от

модели неоднородного ионосферного слоя и способа его радиозондирования. Поэтому, в принципе, она может быть использована как индикатор реального состояния исследуемой МИТ и, в частности, для определения вида этой турбулентности (естественного или искусственного происхождения).

Первые экспериментальные исследования МИТ показали, что ширина мультифрактальных спектров принимаемых сигналов от орбитальных ИСЗ составляет величину  $\Delta p$ ; 0,3 в естественных условиях и  $\Delta p$ ; 0,15 – при модификации ионосферы мощным КВ радиоизлучением [2,3]. Это обстоятельство свидетельствует в пользу того, что сильно анизотропная МИИТ является довольно упорядоченной неоднородной структурой.

Существенное различие в измеряемых величинах ширины локальных мультистепенных спектров МИТ в естественных условиях и при воздействии на ионосферу мощным КВ радиоизлучением может служить индикатором реального состояния (в том числе и вида) исследуемой МИТ. Однако такое утверждение может быть сделано или отвергнуто лишь в ходе дальнейших развернутых экспериментальных исследований мелкомасштабной ионосферной турбулентности в различных геофизических условиях с применением метода мультифрактальной обработки результатов соответствующих измерений.