

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
**Федеральное государственное научное учреждение**  
**«Научно-исследовательский радиофизический институт»**  
**(ФГНУ НИРФИ)**

## **Препринт № 538**

Математическое описание  
поляризации космического радиоизлучения  
II. Круговые, эллиптические и обобщённые  
поляризационные базисы.

Е. Н. Виняйкин

**Нижний Новгород**

**2011**

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ  
КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ.

II. КРУГОВЫЕ, ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ОБОБЩЁННЫЕ  
ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ БАЗИСЫ. //

Препринт № 538. – Нижний Новгород: ФГНУ НИРФИ, 2011. – с.72

УДК 524.6-77

Во второй части дано описание поляризации и поляризационных операторов (матрица Джонса, **K**-матрица и матрица Мюллера) в круговых и эллиптических унитарных поляризационных базисах. Кроме обычно применяемого кругового базиса  $C$ , рассмотрены круговые базисы  $C_2$  и  $C_3$ , в которые преобразуются эллиптические базисы  $E$  и  $E_2$ , если модуль эллиптичности ортов последних равен  $\pi/4$ . Рассмотрены обобщённые (неунитарные) поляризационные базисы. С их использованием проанализирована интерферометрия с применением несовершенных круговых поляризаций.

Как и первая часть, данная работа может быть полезна как специалистам-астрономам в их работе, так и студентам старших курсов и магистрантам астрономической специальности в качестве учебного пособия.

Данная работа является продолжением работы [60], в которой рассмотрено математическое описание поляризации космического радиоизлучения с использованием декартового поляризационного базиса<sup>35</sup>. В нём базисными состояниями поляризации являются две ортогональные линейные поляризации единичной амплитуды  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ , направленные, соответственно, вдоль осей  $x$ ,  $y$  декартовой системы координат.

### 1. Круговые поляризационные базисы $\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ , $\mathbf{C}_2, \mathbf{C}'_2$ , $\mathbf{C}_3, \mathbf{C}'_3$ и вектор Джонса в них

В качестве базисных поляризационных состояний широко используются также волны с правой и левой круговыми поляризациями. Ортонормированная пара базисных комплексных круговых векторов Джонса  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_l$  (унитарный базис  $\mathbf{C}$ ) может быть записана в виде<sup>36</sup>

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y), \quad \mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y). \quad (97)$$

Легко убедиться в том, что  $\mathbf{e}_r^+ \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_l^+ \mathbf{e}_l = 1$ ,  $\mathbf{e}_r^+ \mathbf{e}_l = \mathbf{e}_l^+ \mathbf{e}_r = 0$ . В начальный момент времени  $t = 0$  оба круговых орта направлены вдоль оси  $x$ <sup>37</sup>.

Применяя орты  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_l$ , можно представить вектор Джонса в виде

$$\mathbf{E}_{x,y} = E_r \mathbf{e}_r + E_l \mathbf{e}_l, \quad (98)$$

---

<sup>35</sup> Нумерация сносок, ссылок на работы, формул, таблиц и рисунков является продолжением нумерации, использованной в работе [60].

<sup>36</sup> Напомним, что используется временной множитель  $e^{i2\pi\nu t}$  [60].

<sup>37</sup> В этом, а также в том, что базисные векторы  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_l$  соответствуют принятым в современной астрономии определениям, соответственно, правой и левой круговой поляризации [60], можно убедиться, восстановив в правых частях (97) временной множитель  $e^{i2\pi\nu t}$  и взяв реальные части получившихся выражений.

где  $E_r = E_{0r}e^{i\psi_r}$ ,  $E_l = E_{0l}e^{i\psi_l}$  – компоненты вектора Джонса в круговом поляризованном базисе  $r, l$  (базис  $C$ ).

Умножение орта  $\mathbf{e}_r$  на  $E_r$  означает, что радиус окружности, описываемой концом электрического вектора, становится равным  $E_{0r}/\sqrt{2}$  вместо  $1/\sqrt{2}$ , а угол с осью  $x$  в момент времени  $t = 0$  становится равным  $\psi_r$  вместо нуля. Умножение орта  $\mathbf{e}_l$  на  $E_l$  означает, что радиус окружности, описываемой концом электрического вектора, становится равным  $E_{0l}/\sqrt{2}$  вместо  $1/\sqrt{2}$ , а угол с осью  $x$  в момент времени  $t = 0$  становится равным  $-\psi_l$  вместо нуля. Суперпозиция (98) модифицированных по амплитуде и фазе круговых базисных поляризованных состояний  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_l$  и позволяет синтезировать все возможные состояния поляризации<sup>38</sup>.

Условию ортонормированности удовлетворяют и пары векторов  $\mathbf{e}_r, -i\mathbf{e}_l$  и  $i\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_l$ . Поэтому, имея ввиду возможность предельного перехода от эллиптических унитарных базисов к круговым при абсолютной величине эллиптичности ортов  $\sigma_0 \rightarrow \pi/4$  (см. ниже), удобнее использовать вместо  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_l$  ортонормированную круговую пару  $\mathbf{e}_{r_2}, \mathbf{e}_{l_2}$  (унитарный базис  $C_2$ ) и ортонормированную круговую пару  $\mathbf{e}_{r_3}, \mathbf{e}_{l_3}$  (унитарный базис  $C_3$ ), где

---

<sup>38</sup> Введём круговой унитарный базис  $C'$  с ортами  $\mathbf{e}_{r'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{x'} - i\mathbf{e}_{y'}) = e^{i\varphi}\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_{l'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_{x'} + i\mathbf{e}_{y'}) = e^{-i\varphi}\mathbf{e}_l$ . Оба орта в базисе  $C'$  в момент времени  $t = 0$  направлены вдоль оси  $x'$ , то есть под углом  $\varphi$  к оси  $x$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{r_2} \equiv \mathbf{e}_r &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y), \quad \mathbf{e}_{l_2} = -i\mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \\ \mathbf{e}_{r_3} = i\mathbf{e}_r &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad \mathbf{e}_{l_3} \equiv \mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y). \end{aligned} \quad (99)$$

Аналогично (98) можно представить вектор Джонса в базисах  $\mathbf{e}_{r_2}$ ,  $\mathbf{e}_{l_2}$  и  $\mathbf{e}_{r_3}$ ,  $\mathbf{e}_{l_3}$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{x,y} &= E_{r_2} \mathbf{e}_{r_2} + E_{l_2} \mathbf{e}_{l_2}, \\ \mathbf{E}_{x,y} &= E_{r_3} \mathbf{e}_{r_3} + E_{l_3} \mathbf{e}_{l_3}, \end{aligned} \quad (100)$$

где  $E_{r_2} = E_{0r_2} e^{i\psi_{r_2}}$ ,  $E_{l_2} = E_{0l_2} e^{i\psi_{l_2}}$  – компоненты вектора Джонса  $\mathbf{E}_{x,y}$  в круговом поляризованном базисе  $\mathbf{e}_{r_2}$ ,  $\mathbf{e}_{l_2}$ ,  
 $E_{r_3} = E_{0r_3} e^{i\psi_{r_3}}$ ,  $E_{l_3} = E_{0l_3} e^{i\psi_{l_3}}$  – компоненты вектора Джонса  $\mathbf{E}_{x,y}$  в круговом поляризованном базисе  $\mathbf{e}_{r_3}$ ,  $\mathbf{e}_{l_3}$ .

Умножение орта  $\mathbf{e}_{r_2}$  на  $E_{r_2}$  означает, что радиус окружности, описываемой концом электрического вектора, становится равным  $E_{0r_2} / \sqrt{2}$  вместо  $1 / \sqrt{2}$ , а угол, составляемый электрическим вектором с осью  $x$  в момент времени  $t = 0$ , становится равным  $\psi_{r_2}$  вместо нуля. Умножение орта  $\mathbf{e}_{l_2}$  на  $E_{l_2}$  означает, что радиус окружности, описываемой концом электрического вектора, становится равным  $E_{0l_2} / \sqrt{2}$  вместо  $1 / \sqrt{2}$ , а угол с осью  $x$  в момент времени  $t = 0$  становится равным  $(\pi/2) - \psi_{l_2}$  вместо  $\pi/2$ . Аналогично, умножение орта  $\mathbf{e}_{r_3}$  на  $E_{r_3}$  означает, что радиус окружности, описываемой концом электрического вектора, становится равным  $E_{0r_3} / \sqrt{2}$  вместо  $1 / \sqrt{2}$ , а угол, со-

ставляемый с осью  $x$  в момент времени  $t = 0$ , становится равным  $(\pi/2) + \psi_{r_3}$  вместо  $\pi/2$ . Умножение орта  $\mathbf{e}_{l_3}$  на  $E_{l_3}$  означает, что радиус окружности, описываемой концом электрического вектора, становится равным  $E_{0l_3} / \sqrt{2}$  вместо  $1/\sqrt{2}$ , а угол с осью  $x$  в момент времени  $t = 0$  становится равным  $-\psi_{l_3}$  вместо нуля. Суперпозиция (100) модифицированных по амплитуде и фазе круговых базисных поляризационных состояний  $\mathbf{e}_{r_2}$ ,  $\mathbf{e}_{l_2}$  или  $\mathbf{e}_{r_3}$ ,  $\mathbf{e}_{l_3}$  позволяет синтезировать все возможные состояния поляризации.<sup>39</sup>

Матрицы преобразования компонент вектора Джонса при переходе от базиса  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_l$  к базису  $\mathbf{e}_{r_2}$ ,  $\mathbf{e}_{l_2}$  или  $\mathbf{e}_{r_3}$ ,  $\mathbf{e}_{l_3}$  равны (использованы формулы (99) и (100))

$$\mathbf{T}_{C_2C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{C_3C} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (101)$$

Используя матрицы (101) и их унитарность, можно записать соотношения, описывающие преобразования вектора Джонса и ортов при переходе от базиса  $C$  к базису  $C_2$  и обратно, или от базиса  $C$  к базису  $C_3$  и обратно, в следующем виде<sup>40</sup>

---

<sup>39</sup> Более общий, чем  $C_2$ , круговой унитарный базис  $C'_2$  имеет орты  $\mathbf{e}_{r'_2} = e^{i\varphi} \mathbf{e}_{r_2}$ ,  $\mathbf{e}_{l'_2} = e^{-i\varphi} \mathbf{e}_{l_2}$ . В момент времени  $t = 0$  орт  $\mathbf{e}_{r'_2}$  направлен под углом  $\varphi$  к оси  $x$ , а орт  $\mathbf{e}_{l'_2}$  направлен под углом  $\varphi$  к оси  $y$ . Базис  $C'_2$  соотносится с базисом  $C_2$  аналогично тому как повернутый на угол  $\varphi$  декартовый базис  $D'$  соотносится с декартовым базисом  $D$ . Аналогично, более общий, чем  $C_3$ , круговой унитарный базис  $C'_3$  имеет орты  $\mathbf{e}_{r'_3} = e^{i\varphi} \mathbf{e}_{r_3}$ ,  $\mathbf{e}_{l'_3} = e^{-i\varphi} \mathbf{e}_{l_3}$ . В момент времени  $t = 0$  орт  $\mathbf{e}_{r'_3}$  направлен под углом  $\varphi$  к оси  $y$ , а орт  $\mathbf{e}_{l'_3}$  направлен под углом  $\varphi$  к оси  $x$ .

<sup>40</sup> Напомним, что значки  $*$ ,  $+$ ,  $\sim$  обозначают соответственно комплексное сопряжение, эрмитово сопряжение и транспонирование матрицы.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} E_{r_2} \\ E_{l_2} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{C_2C} \begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_2} \\ \mathbf{e}_{l_2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C_2C}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C_2C}^+ \begin{pmatrix} E_{r_2} \\ E_{l_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_l \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{T}_{C_2C}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_2} \\ \mathbf{e}_{l_2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} E_{r_3} \\ E_{l_3} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{C_3C} \begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_3} \\ \mathbf{e}_{l_3} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C_3C}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C_3C}^+ \begin{pmatrix} E_{r_3} \\ E_{l_3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_l \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{T}_{C_3C}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_3} \\ \mathbf{e}_{l_3} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{102}$$

Вернёмся к рассмотрению базиса С. Матрица преобразования составляющих вектора Джонса при переходе от декартового базиса  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  к круговому базису  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_l$  равна

$$\mathbf{T}_{CD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}. \tag{103}$$

Используя матрицу (103)<sup>41</sup> и её унитарность, можно записать соотношения, описывающие преобразования вектора Джонса и ортов при переходе от базиса D к базису С и обратно, в следующем виде

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{CD} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_l \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{CD}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{CD}^+ \begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{T}_{CD}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_l \end{pmatrix} \tag{104}$$

Выразим теперь круговой вектор Джонса поляризованного излучения через угол эллиптичности и позиционный угол большой оси эллипса поляризации, пользуясь выражениями (5), (103) и (104)

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix} = \frac{E(t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \sigma - \sin \sigma) e^{i\chi} \\ (\cos \sigma + \sin \sigma) e^{-i\chi} \end{pmatrix}. \tag{105}^{42}$$

---

<sup>41</sup> Коэффициенты собственных поляризаций матрицы  $\mathbf{T}_{CD}$  равны  $(K_{x,y})_1 = (2 + \sqrt{3})^{1/2} e^{i\pi/4}$ ,  $(K_{x,y})_2 = -(2 - \sqrt{3})^{1/2} e^{i\pi/4}$ , собственные значения  $j_1 = e^{i \arctg(2-\sqrt{3})}$ ,  $j_2 = -e^{i \arctg(2+\sqrt{3})}$  (см. (61)).

<sup>42</sup> Из (105), как и из (5), видно, что вектор Джонса полностью поляризованного квазимонохроматического излучения в произвольном интервале времени есть единичный по модулю постоянный комплексный вектор, помноженный на случайную функцию времени, являющуюся комплексной амплитудой  $E(t)$ .

Продолжим рассмотрение переходов от одного базиса к другому. Матрицы преобразования компонент вектора Джонса при переходе от декартового базиса  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  к базису  $\mathbf{e}_{r_2}, \mathbf{e}_{l_2}$  или  $\mathbf{e}_{r_3}, \mathbf{e}_{l_3}$  равны

$$\mathbf{T}_{C_2D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{C_3D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}. \quad (106)$$

Используя матрицы (106) и их унитарность, можно записать соотношения, описывающие преобразования вектора Джонса и ортов при переходе от базиса D к базису  $C_2$  и обратно, а также от базиса D к базису  $C_3$  и обратно, в следующем виде <sup>44</sup>

$$\begin{pmatrix} E_{r_2} \\ E_{l_2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C_2D} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_2} \\ \mathbf{e}_{l_2} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C_2D}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C_2D}^+ \begin{pmatrix} E_{r_2} \\ E_{l_2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{T}_{C_2D}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_2} \\ \mathbf{e}_{l_2} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} E_{r_3} \\ E_{l_3} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C_3D} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_3} \\ \mathbf{e}_{l_3} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C_3D}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{C_3D}^+ \begin{pmatrix} E_{r_3} \\ E_{l_3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{T}_{C_3D}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_3} \\ \mathbf{e}_{l_3} \end{pmatrix}. \quad (107)^{45}$$

---

<sup>43</sup> Коэффициенты собственных поляризаций матрицы  $\mathbf{T}_{C_2D}$  равны  $(K_{x,y})_1 = 1$ ,  $(K_{x,y})_2 = -1$ , собственные значения  $j_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ,  $j_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ ; коэффициенты собственных поляризаций матрицы  $\mathbf{T}_{C_3D}$   $(K_{x,y})_1 = 1$ ,  $(K_{x,y})_2 = -1$ , собственные значения  $j_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ ,  $j_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$  (см. (61) и рис.2).

<sup>44</sup> Пользуясь (101), (103) и (106) легко убедиться в том, что  $\mathbf{T}_{V_i V_j} \mathbf{T}_{V_j V_k} = \mathbf{T}_{V_i V_k}$ ,  $(i, j, k = 1, 2, 3, 4)$ , где каждый из унитарных (ортогональных) базисов  $V_i, V_j, V_k$  может являться любым из базисов D, C,  $C_2$ ,  $C_3$ . Это соотношение, очевидно, справедливо для произведения  $n$  матриц последовательного перехода между базисами из набора  $N$  унитарных (ортогональных) базисов ( $n = 2, 3, \dots, N-1$ ).

<sup>45</sup> Формулы (104) и (107) являются частными случаями формул (52) в [60].



Умножая слева матрицу  $\mathbf{T}_R(\varphi) = \mathbf{T}_{D'D}(\varphi)$  из (47) на матрицу  $\mathbf{T}_{DC} = \mathbf{T}_{CD}^+$ , на матрицу  $\mathbf{T}_{DC_2} = \mathbf{T}_{C_2D}^+$  и на матрицу  $\mathbf{T}_{DC_3} = \mathbf{T}_{C_3D}^+$ , получим матрицы преобразования компонент вектора Джонса при переходе, соответственно, от базисов  $C$  к  $D'$ , от  $C_2$  к  $D'$  и от  $C_3$  к  $D'$

$$\mathbf{T}_{D'C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & e^{i\varphi} \\ -ie^{-i\varphi} & ie^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{D'C_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & -ie^{i\varphi} \\ -ie^{-i\varphi} & e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{D'C_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ie^{-i\varphi} & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & ie^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Пользуясь (108), можно записать следующие соотношения для переходов от базисов  $C$  к  $D'$ , от  $C_2$  к  $D'$  и от  $C_3$  к  $D'$  и для соответствующих обратных переходов в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{D'C} \begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{x'} \\ \mathbf{e}_{y'} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{D'C}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_l \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{D'C}^+ \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_l \end{pmatrix} &= \widetilde{\mathbf{T}_{D'C}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{x'} \\ \mathbf{e}_{y'} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{D'C_2} \begin{pmatrix} E_{r_2} \\ E_{l_2} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{x'} \\ \mathbf{e}_{y'} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{D'C_2}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_2} \\ \mathbf{e}_{l_2} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} E_{r_2} \\ E_{l_2} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{D'C_2}^+ \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_2} \\ \mathbf{e}_{l_2} \end{pmatrix} &= \widetilde{\mathbf{T}_{D'C_2}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{x'} \\ \mathbf{e}_{y'} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{D'C_3} \begin{pmatrix} E_{r_3} \\ E_{l_3} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{x'} \\ \mathbf{e}_{y'} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{D'C_3}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_3} \\ \mathbf{e}_{l_3} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} E_{r_3} \\ E_{l_3} \end{pmatrix} &= \mathbf{T}_{D'C_3}^+ \begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{r_3} \\ \mathbf{e}_{l_3} \end{pmatrix} &= \widetilde{\mathbf{T}_{D'C_3}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{x'} \\ \mathbf{e}_{y'} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (109)$$

Рассмотрим далее вектор Джонса, соответствующий линейно поляризованному радиоизлучению с комплексной амплитудой электрического поля  $E(t) = E_0(t)e^{i\psi(t)}$ , плоскость поляризации которого составляет угол  $\chi$  с осью  $x$ . Полагая в (5)  $\sigma = 0$ , получим

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = E_0 e^{i\psi} \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{pmatrix}. \quad (110)$$

Учитывая (104) и (110), получим

$$\mathbf{E}_{r,l}(\text{л.п.}) = \begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i(\chi+\psi)} \\ e^{i(-\chi+\psi)} \end{pmatrix} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\psi_r} \\ e^{i\psi_l} \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Вектор  $\mathbf{E}_{r,l}$  в (111) является вектором Джонса в круговом поляризационном базисе  $\mathbf{C}$  линейно-поляризованной волны с комплексной амплитудой электрического поля  $E_0 e^{i\psi}$  и позиционным углом  $\chi$ . Из (111) видно, что позиционный угол линейно-поляризованной волны равен половине разности фаз правой и левой круговых компонент, на которые раскладывается линейно-поляризованная волна

$$\chi = \frac{1}{2}(\psi_r - \psi_l). \quad (112)$$

При использовании кругового базиса  $\mathbf{C}_2$  или  $\mathbf{C}_3$ , после аналогичного рассмотрения, вместо (112) получим

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2}(\psi_{r_2} - \psi_{l_2}) + \frac{\pi}{4}, \\ \chi &= \frac{1}{2}(\psi_{r_3} - \psi_{l_3}) + \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (113)$$

## 2. Коэффициент поляризации, выраженный через компоненты вектора Джонса в круговом базисе $\mathbf{C}$

Если вместо линейных ортогональных поляризаций в качестве базисных состояний использовать круговые, то состояние поляризации поляризованного излучения можно описывать коэффициентом поляризации, являющимся постоянным во времени комплексным числом

$$K_{r,l} = \frac{E_r}{E_l} = \frac{E_{0r}}{E_{0l}} e^{i(\psi_r - \psi_l)}. \quad (114)$$

Выразим  $K_{r,l}$  как функцию угла эллиптичности  $\sigma$  и позиционного угла большой оси эллипса поляризации  $\chi$ , используя (105) и (114). В результате получим:

$$K_{r,l} = \operatorname{ctg} \left( \sigma + \frac{\pi}{4} \right) e^{i2\chi}. \quad (115)$$

Из (114) и (115) следует, что угол эллиптичности выражается через отношение амплитуд циркулярных компонент поляризованного излучения следующим образом

$$\sigma = \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - |K_{r,l}|}{1 + |K_{r,l}|} \right) = \operatorname{arctg} \left( \frac{1 - (E_{0r}/E_{0l})}{1 + (E_{0r}/E_{0l})} \right), \quad (116)$$

а позиционный угол большой оси эллипса поляризации равен полуразности фаз правой и левой круговых компонент (см. формулу (112), полученную для частного случая линейно-поляризованного излучения)

$$\chi = \frac{1}{2} \arg(K_{r,l}) = \frac{1}{2} (\psi_r - \psi_l). \quad (117)$$

Из (116) и (117) следует, что<sup>47</sup>

$$\frac{E_{0r}}{E_{0l}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \sigma}{1 + \operatorname{tg} \sigma}, \quad \psi_r - \psi_l = 2\chi. \quad (118)$$

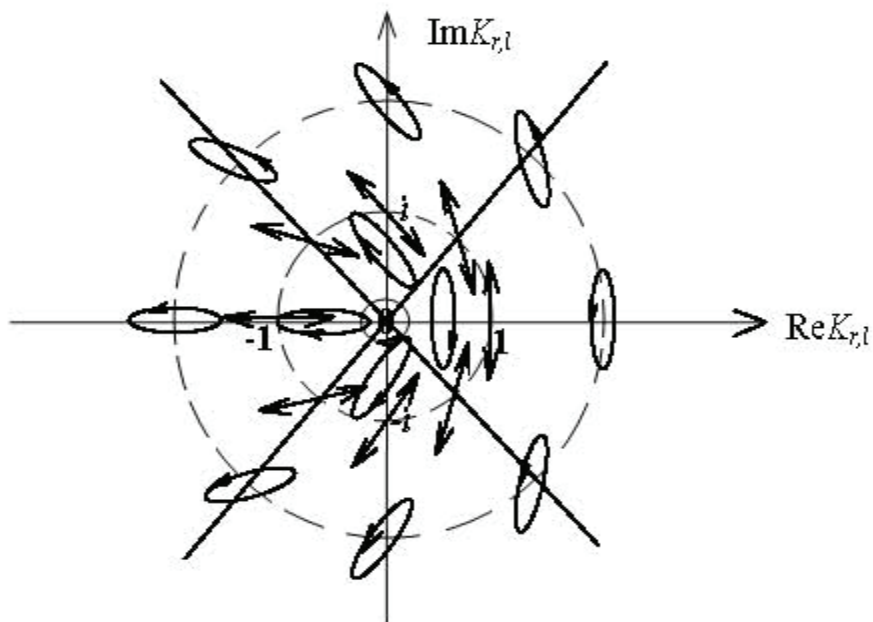
### 3. Круговая комплексная плоскость и сфера Пуанкаре

Вводится комплексная круговая плоскость, по оси абсцисс которой откладывается реальная часть коэффициента поляризации  $\operatorname{Re} K_{r,l}$ , а по оси ординат мнимая  $\operatorname{Im} K_{r,l}$  (рис.5).

---

<sup>46</sup> В [40] определение  $K_{r,l}$  (1.92) внешне выглядит тождественно (114), но в силу противоположного, принятого в современной астрономии, определения правой и левой круговых поляризаций, коэффициент поляризации в [40] – обратная величина по отношению к  $K_{r,l}$  в данной работе (ср. формулы (1.94) в [40] и (115)).

<sup>47</sup> В отличие от формул (7), в формулах (118) величины отношения модулей компонент вектора Джонса и их разности фаз зависят каждая только от одного параметра, соответственно, угла эллиптичности и позиционного угла.



**Рис.5.** Комплексная круговая плоскость коэффициента поляризации  $K_{r,l}$ .

Эллипсами, двухсторонними стрелками и окружностью в начале координат показаны состояния поляризации, соответствующие различным точкам на плоскости. Для пяти состояний поляризации указаны значения  $K_{r,l}$ : 0 обозначает левую круговую поляризацию, показанную сплошной окружностью с центром в начале координат, 1 соответствует вертикальной линейной поляризации, показанной двухсторонней стрелкой,  $i$ -линейной поляризации под углом  $45^\circ$ ,  $-1$  – горизонтальной поляризации и  $-i$  – линейной поляризации под углом  $135^\circ$ . Штриховыми концентрическими окружностями с центром в начале координат показаны геометрические места точек постоянной эллиптичности. Прямые, выходящие из начала координат, есть геометрические места точек постоянного позиционного угла большой оси эллипса поляризации.

Начало координат на плоскости  $\text{Re } K_{r,l}$ ,  $\text{Im } K_{r,l}$ , очевидно, соответствует левой круговой поляризации, бесконечно удалённая точка отображает правую круговую поляризацию. Окружность единичного радиуса с центром в начале координат  $|K_{r,l}|=1$  есть геометрическое место точек, отображающих поляризационные состояния с линейной по-

ляризацией. При этом, как видно из (112) и (114), точке с координатами  $(\operatorname{Re} K_{r,l} = 1, \operatorname{Im} K_{r,l} = 0)$  соответствует вертикальная поляризация ( $\chi = 0$ ), точке  $(0, 1)$  - линейная поляризация с  $\chi = 45^\circ$ , точке  $(-1, 0)$  - горизонтальная поляризация и точке  $(0, -1)$  - линейная поляризация с  $\chi = 135^\circ$ . Все остальные точки комплексной круговой плоскости отображают поляризационные состояния с эллиптической поляризацией.

При этом точки вне окружности  $|K_{r,l}| = 1$  отображают поляризационные состояния с правой эллиптической поляризацией, внутри этой окружности – с левой. Из (116) и (117) видно, что геометрические места точек постоянной эллиптичности и постоянного позиционного угла это, соответственно, окружности с центром в начале координат и прямые, исходящие из начала координат. Эти геометрические места точек образуют два ортогональных семейства. В таблице 2 приведены значения параметров  $\sigma, \chi$  для различных областей и отдельных точек на комплексной декартовой плоскости (часть I)<sup>48</sup> и комплексной круговой плоскости; приняты следующие сокращения: л.п. – линейная поляризация, к.п. – круговая поляризация, э.п. – эллиптическая поляризация, б.о. ||  $x, y$  – большая ось эллипса параллельна оси  $x, y$ .

Таблица 2

Комплексная декартовая плоскость				
Координаты точки или области, $\operatorname{Re}K_{x,y}, \operatorname{Im}K_{x,y}$	Угол эллиптичности $\sigma$	Позиционный угол большой оси эллипса поляризации, $\chi$	Значение коэффициента поляризации, $K_{x,y}$	Состояние поляризации
0, 0	0	$\pi/2$	0	Горизонтальная л.п.
1, 0	0	$\pi/4$	1	Л.п. под углом $45^\circ$
-1, 0	0	$3\pi/4$	-1	Л.п. под углом $135^\circ$

<sup>48</sup> В [60] на стр. 11, 8-я и 9-я строки сверху, следует читать "...точке  $(0,1)$  соответствует правая круговая поляризация, точке  $(0,-1)$  соответствует левая круговая...".

$\pm\infty, \pm\infty$	0	0	$\pm\infty$	Вертикальная л.п.
0, 1	$-\pi/4$		$i$	Правая к.п.
0, -1	$\pi/4$		$-i$	Левая к. п.
$\text{Re } K_{x,y} > 0,$ $\text{Im } K_{x,y} > 0$	$-\pi/4 < \sigma < 0$	$0 < \chi < \pi/2$		Правая э.п.
$\text{Re } K_{x,y} > 0,$ $\text{Im } K_{x,y} < 0$	$0 < \sigma < \pi/4$	$0 < \chi < \pi/2$		Левая э.п.
$\text{Re } K_{x,y} = 0,$ $0 < \text{Im } K_{x,y} < 1$	$-\pi/4 < \sigma < 0$	$\pi/2$	$i \text{Im } K_{x,y}$	Правая э.п. с б.о.    y
$\text{Re } K_{x,y} = 0,$ $1 < \text{Im } K_{x,y} < \infty$	$-\pi/4 < \sigma < 0$	0	$i \text{Im } K_{x,y}$	Правая э.п. с б.о.    x
$\text{Re } K_{x,y} = 0,$ $-1 < \text{Im } K_{x,y} < 0$	$0 < \sigma < \pi/4$	$\pi/2$	$i \text{Im } K_{x,y}$	Левая э.п. с б.о.    y
$\text{Re } K_{x,y} = 0,$ $-\infty < \text{Im } K_{x,y} < -1$	$0 < \sigma < \pi/4$	0	$i \text{Im } K_{x,y}$	Левая э.п. с б.о.    x
$\text{Re } K_{x,y} < 0,$ $\text{Im } K_{x,y} < 0$	$0 < \sigma < \pi/4$	$\pi/2 < \chi < \pi$		Левая э.п.
$\text{Re } K_{x,y} < 0,$ $\text{Im } K_{x,y} > 0$	$-\pi/4 < \sigma < 0$	$\pi/2 < \chi < \pi$		Правая э.п.
$0 < \text{Re } K_{x,y} < 1,$ $\text{Im } K_{x,y} = 0$	0	$\pi/4 < \chi < \pi/2$	$\text{Re } K_{x,y}$	Л.п.
$1 < \text{Re } K_{x,y} < \infty,$ $\text{Im } K_{x,y} = 0$	0	$0 < \chi < \pi/4$	$\text{Re } K_{x,y}$	Л.п.
$-1 < \text{Re } K_{x,y} < 0,$ $\text{Im } K_{x,y} = 0$	0	$\pi/2 < \chi < 3\pi/4$	$\text{Re } K_{x,y}$	Л.п.
$-\infty < \text{Re } K_{x,y} < -1,$ $\text{Im } K_{x,y} = 0$	0	$3\pi/4 < \chi < \pi$	$\text{Re } K_{x,y}$	Л.п.
Комплексная круговая плоскость				
$\text{Re } K_{r,l},$ $\text{Im } K_{r,l}$	$\sigma$	$\chi$	$K_{r,l}$	Состояние поляризации

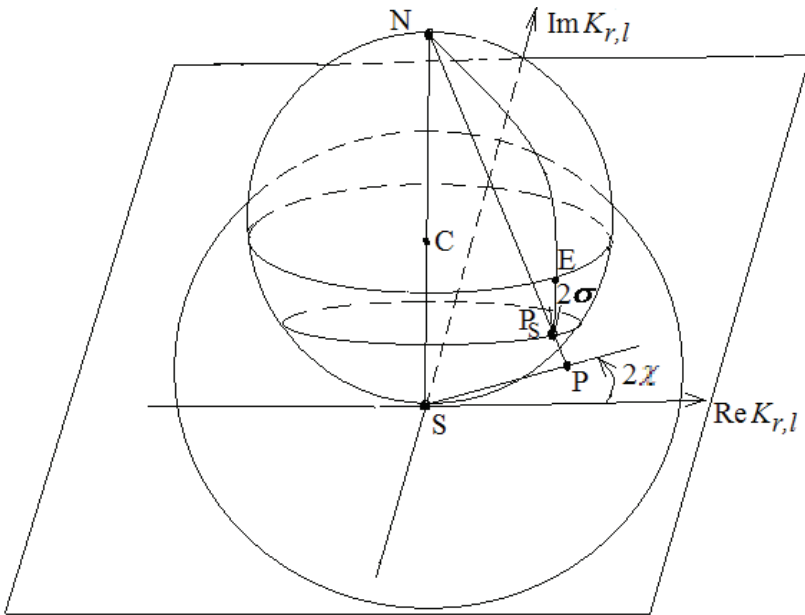
$\operatorname{Re} K_{r,l} = 0,$ $\operatorname{Im} K_{r,l} = 0$	$\pi/4$		0	Левая к.п.
$\operatorname{Re} K_{r,l} = \pm\infty,$ $\operatorname{Im} K_{r,l} = \pm\infty$	$-\pi/4$		$\pm\infty$	Правая к.п.
$(\operatorname{Re} K_{r,l})^2 +$ $+(\operatorname{Im} K_{r,l})^2 = 1$	0	$0 \leq \chi < \pi$	$ K_{r,l}  = 1$	Л.п.
$(\operatorname{Re} K_{r,l})^2 +$ $+(\operatorname{Im} K_{r,l})^2 < 1$	$0 < \sigma < \pi/4$	$0 \leq \chi < \pi$	$ K_{r,l}  < 1$	Левая э.п.
$(\operatorname{Re} K_{r,l})^2 +$ $+(\operatorname{Im} K_{r,l})^2 > 1$	$-\pi/4 < \sigma < 0$	$0 \leq \chi < \pi$	$ K_{r,l}  > 1$	Правая э.п.

Комплексный коэффициент поляризации  $K_{r,l}$  (или  $K_{x,y}$ ) и соответствующая ему комплексная круговая плоскость  $\operatorname{Re} K_{r,l}$ ,  $\operatorname{Im} K_{r,l}$  (или комплексная декартовая плоскость  $\operatorname{Re} K_{x,y}$ ,  $\operatorname{Im} K_{x,y}$ ) позволяют описывать произвольное состояние поляризации с помощью единственного комплексного числа или соответствующей ему точки на комплексной плоскости (круговой или декартовой). Точки комплексной плоскости и различные состояния поляризации находятся во взаимно-однозначном соответствии.

Существует другое важное представление состояний поляризации - с помощью сферы, введённой Пуанкаре и носящей его имя. Рассмотрим сферу единичного диаметра, касающуюся круговой комплексной плоскости в начале координат  $O$  [40]. Точке  $O$  соответствует южный полюс сферы  $S$ , отображающий левую круговую поляризацию. Каждая точка  $P$  на круговой комплексной плоскости может быть соединена с северным полюсом сферы  $N$ , диаметрально противоположным началу координат  $O$ , отрезком прямой линии. Этот отрезок пересекает сферу только в одной точке  $P_S$ , расположенной между точками  $N$  и  $P$ . Такое отображение  $P \rightarrow P_S$  называется стереографической проекцией. Если связать с точкой  $P_S$  на сфере то же самое состояние поляризации, кото-

рое соответствует точке  $P$  на круговой комплексной плоскости, то сфера в целом будет представлять собой пространство, все точки которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с различными состояниями поляризации.

Имея ввиду свойства представления состояний поляризации точками комплексной круговой плоскости (рис.5 и табл.2) и, обращаясь к рис.6, можно определить точки и линии на сфере Пуанкаре, соответствующие тому или иному состоянию поляризации.



**Рис.6.** Представление состояний поляризации точками на сфере Пуанкаре, вытекающее из представления точками на круговой комплексной плоскости  $Re K_{r,l}$ ,  $Im K_{r,l}$ . Окружность в плоскости с центром в точке  $S$  имеет единичный радиус. Точка  $P$  в плоскости внутри этой окружности соответствует левой эллиптической поляризации. На сфере ей соответствует точка  $P_S$ . Дуга  $EP_S$  меридиана  $NEP_S S$  (широта точки  $P_S$ ) равна  $2\sigma$ , угол в плоскости  $Re K_{r,l}$ ,  $Im K_{r,l}$  между прямой  $SP$  и осью  $Re K_{r,l}$  равен  $2\chi$  (долгота точки  $P_S$ ).



1. "Южный" полюс сферы соответствует левой, "северный" - правой круговой поляризации.

2. Экватор сферы Пуанкаре есть геометрическое место точек, соответствующих линейной поляризации, поскольку окружность единичного радиуса на круговой комплексной плоскости проецируется на экватор сферы единичного диаметра.

3. Все точки сферы ниже экватора, за исключением южного полюса, соответствуют состояниям с левой эллиптической поляризацией; все точки выше экватора, за исключением северного полюса, - состояниям с правой эллиптической поляризацией.

4. Меридианы сферы (полуокружности, соединяющие полюса) являются геометрическими местами точек постоянного позиционного угла большой оси эллипса поляризации (на экваторе - позиционного угла плоскости линейной поляризации), причём нулевым меридианом, где  $\chi=0$ , является тот, в который проецируется действительная положительная полуось  $\text{Re } K_{r,l} > 0, \text{Im } K_{r,l} = 0$  на комплексной круговой плоскости. Долгота меридиана, проходящего через точку  $P_s$ , равна  $2\chi$ , положительным направлением её отсчёта является отсчёт против часовой стрелки, если смотреть со стороны северного полюса сферы.

5. Параллели сферы (коаксиальные окружности, общая ось которых есть полярная ось, соединяющая полюса сферы) являются геометрическими местами точек постоянного угла эллиптичности  $\sigma$ . Широта параллели, проходящей через точку  $P_s$ , равна  $2\sigma$ , причём на экваторе широта равна 0, в северной полусфере широта отрицательна ( $\sigma < 0$ , правая эллиптическая поляризация), широта северного полюса равна  $-\pi/2$ , в южной полусфере широта положительна ( $\sigma > 0$ , левая эллиптическая поляризация), широта южного полюса равна  $\pi/2$ .

6. Диаметально противоположные точки на сфере Пуанкаре соответствуют ортогональным состояниям поляризации.

Если построить плоскость, касающуюся сферы Пуанкаре в точке пересечения меридиана с долготой  $\pi$  и экватора (эта точка соответствует горизонтальной линейной поляризации, параллельной оси  $y$ ), а диаметально противоположную точку, отображающую вертикальную

поляризацию (параллельную оси  $x$ ), рассматривать как центр новой стереографической проекции, то каждую точку  $P_S$  на сфере можно спроектировать в точку на построенной касательной плоскости. Последняя есть не что иное как рассмотренная в [60] комплексная декартовая плоскость  $\text{Re } K_{x,y}, \text{Im } K_{x,y}$ .<sup>49</sup>

Введём декартовую систему координат  $Q, U, V$ , начало координат которой совпадает с центром рассматриваемой сферы, ось  $Q$  направлена параллельно действительной оси комплексной круговой плоскости, ось  $U$  направлена параллельно её мнимой оси, а  $V$  направлена от южного полюса сферы Пуанкаре к северному. Если радиус сферы обозначить как  $I$ , то набор параметров Стокса, соответствующий состоянию поляризации, отображаемому точкой  $P_S$  на сфере, может быть записан в виде

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}, \\ Q &= \frac{1}{2} \cos(2\sigma) \cos(2\chi), \\ U &= \frac{1}{2} \cos(2\sigma) \sin(2\chi), \\ V &= -\frac{1}{2} \sin(2\sigma). \end{aligned} \tag{119}$$

Формулы (119) – частный случай формул (11), в которых надо положить  $P_E = 1$  (полностью поляризованное излучение),  $I = \frac{1}{2}$ . Если положить  $I = 1$  или рассматривать в качестве декартовых координат безразмерные величины параметров Стокса  $Q/I, U/I, V/I$ , то придём к обычно применяемому понятию сферы Пуанкаре как сферы единичного радиуса в координатах  $Q, U, V$  при единичной интенсивности или в координатах  $Q/I, U/I, V/I$  при произвольной интенсивности (см. стр. 16 в [60]).

---

<sup>49</sup> Пуанкаре использовал именно декартовую комплексную плоскость для введения сферы, получившей его имя [40].

#### 4. Эллиптические поляризационные базисы $E, E', E_2, E_2'$ и вектор Джонса в них

Может оказаться удобным использовать для описания электромагнитной волны эллиптический базис, например, когда нормальными волнами в среде являются эллиптически поляризованные волны. Пара ортонормированных эллиптических базисных векторов (унитарный базис  $E$ ) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{Er}(\sigma_0) &= \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 \\ -i \sin \sigma_0 \end{pmatrix} = \cos \sigma_0 \mathbf{e}_x - i \sin \sigma_0 \mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \mathbf{e}_{r_2} + i(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \mathbf{e}_{l_2} \right), \\ \mathbf{e}_{El}(\sigma_0) &= \begin{pmatrix} -i \sin \sigma_0 \\ \cos \sigma_0 \end{pmatrix} = -i \sin \sigma_0 \mathbf{e}_x + \cos \sigma_0 \mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( i(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \mathbf{e}_{r_2} + (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \mathbf{e}_{l_2} \right), \end{aligned} \quad (120)$$

где  $\sigma_0$  – угол эллиптичности (эллиптичность), взятый по абсолютной величине и характеризующий данный эллиптический базис (в частных случаях декартовый или круговой),  $0 \leq \sigma_0 \leq \pi/4$ <sup>50</sup>. Большая ось эллипса, описываемого базисным вектором правой эллиптической поляризации, ориентирована вдоль оси  $x$ , левой – вдоль оси  $y$ . В начальный момент времени  $t = 0$  орт  $\mathbf{e}_{Er}(\sigma_0)$  направлен вдоль оси  $x$ , орт  $\mathbf{e}_{El}(\sigma_0)$  – вдоль оси  $y$ . Выражения (120) описывают бесконечное множество эллиптических унитарных базисов, соответствующих бесконечному множеству значений параметра  $\sigma_0$  в интервале  $(0, \pi/4)$ .

---

<sup>50</sup> Эллиптический базис  $E_2$ , в котором орт правой эллиптической поляризации ориентирован большой осью эллипса вдоль оси  $y$ , а орт левой направленной большой осью вдоль оси  $x$ , имеет вид:  $\mathbf{e}_{E_2r}(\sigma_0) = i \sin \sigma_0 \mathbf{e}_x + \cos \sigma_0 \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_{El}(-\sigma_0)$ ,  $\mathbf{e}_{E_2l}(\sigma_0) = \cos \sigma_0 \mathbf{e}_x + i \sin \sigma_0 \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_{Er}(-\sigma_0)$ . Если  $\sigma_0 = 0$ , то  $\mathbf{e}_{E_2r}(0) = \mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_{E_2l}(0) = \mathbf{e}_x$ , то есть базис  $E_2$  превращается в левый декартовый базис  $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_x$ . Если же  $\sigma_0 = \pi/4$ , то  $\mathbf{e}_{E_2r} = i\mathbf{e}_{r_2} = \mathbf{e}_{r_3}$ ,  $\mathbf{e}_{E_2l} = i\mathbf{e}_{l_2} = \mathbf{e}_{l_3}$ . Более общий базис  $E_2'$  получается заменой  $\mathbf{e}_x \rightarrow \mathbf{e}_{x'}$ ,  $\mathbf{e}_y \rightarrow \mathbf{e}_{y'}$ .

Если  $\sigma_0 = 0$ , то базис  $E$  превращается в декартовый базис  $D$  (орты  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ ), если же  $\sigma_0 = \pi/4$ , то - в круговой базис  $C_2$  (орты (99)).

Более общий базис  $E'$  получается, если в (120) сделать замены  $\mathbf{e}_x \rightarrow \mathbf{e}_{x'}$ ,  $\mathbf{e}_y \rightarrow \mathbf{e}_{y'}$  или  $\mathbf{e}_{r_2} \rightarrow \mathbf{e}_{r'_2}$ ,  $\mathbf{e}_{l_2} \rightarrow \mathbf{e}_{l'_2}$ . Учитывая (51), получим из (120) выражения для ортов унитарного базиса  $E'$ , зависящих уже от двух параметров  $\sigma_0, \varphi$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{E'r}(\sigma_0, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 \cos \varphi + i \sin \sigma_0 \sin \varphi \\ \cos \sigma_0 \sin \varphi - i \sin \sigma_0 \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= (\cos \sigma_0 \cos \varphi + i \sin \sigma_0 \sin \varphi) \mathbf{e}_x + (\cos \sigma_0 \sin \varphi - i \sin \sigma_0 \cos \varphi) \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_{E'l}(\sigma_0, \varphi) &= \begin{pmatrix} -(\cos \sigma_0 \sin \varphi + i \sin \sigma_0 \cos \varphi) \\ \cos \sigma_0 \cos \varphi - i \sin \sigma_0 \sin \varphi \end{pmatrix} = \\ &= -(\cos \sigma_0 \sin \varphi + i \sin \sigma_0 \cos \varphi) \mathbf{e}_x + (\cos \sigma_0 \cos \varphi - i \sin \sigma_0 \sin \varphi) \mathbf{e}_y, \end{aligned} \quad (121)$$

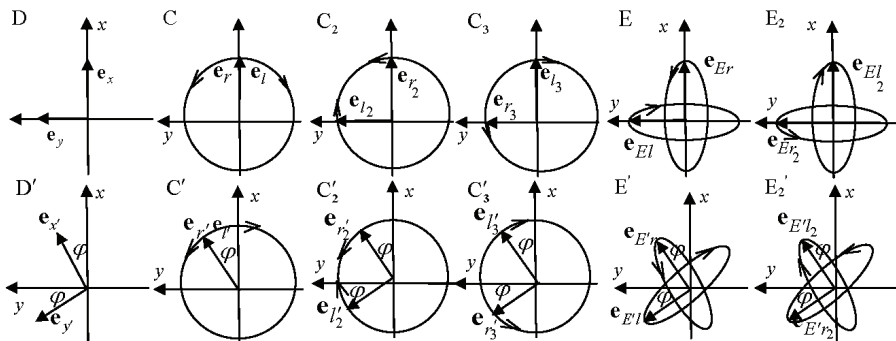
где  $\varphi$  – угол между большой осью эллипса орта  $\mathbf{e}_{E'r}(\sigma_0, \varphi)$  и осью  $x$  (между большой осью эллипса орта  $\mathbf{e}_{E'l}(\sigma_0, \varphi)$  и осью  $y$ ). В начальный момент времени  $t = 0$  орт  $\mathbf{e}_{E'r}(\sigma_0, \varphi)$  направлен под углом  $\varphi$  к оси  $x$ , орт  $\mathbf{e}_{E'l}(\sigma_0, \varphi)$  направлен под углом  $\varphi$  к оси  $y$ .<sup>51</sup> На рис. 7 показаны орты всех рассмотренных выше унитарных поляризационных базисов с их положениями в начальный момент времени  $t = 0$  и направлениями вращения ортов круговых и эллиптических базисов.

Если подставить в (121)  $\sigma_0 = 0$ , то эллиптические орты  $\mathbf{e}_{E'r}(\sigma_0, \varphi)$ ,  $\mathbf{e}_{E'l}(\sigma_0, \varphi)$  превращаются, соответственно, в орты (51) повернутых прямоугольных координат  $\mathbf{e}_{x'}$ ,  $\mathbf{e}_{y'}$  (базис  $D'$ ), если к тому же

---

<sup>51</sup> Записи ортов в виде (51), (97), (99), (120), (121) показывают их выражения в виде векторов-столбцов Джонса (первые равенства) и развернутые выражения (вторые равенства), показывающие, что эти векторы-столбцы определены в базисе  $D$ .

$\varphi = 0$  – в орты  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  (базис D). При  $\sigma_0 = \pi/4$  орты  $\mathbf{e}_{E'r}(\sigma_0, \varphi)$ ,  $\mathbf{e}_{E'l}(\sigma_0, \varphi)$  превращаются, соответственно, в круговые орты  $\mathbf{e}_{r'_2} = e^{i\varphi} \mathbf{e}_{r_2}$ ,  $\mathbf{e}_{l'_2} = e^{-i\varphi} \mathbf{e}_{l_2}$  (базис  $C'_2$ ), если при этом и  $\varphi = 0$ , то в орты (99)  $\mathbf{e}_{r_2}, \mathbf{e}_{l_2}$  (базис  $C_2$ ).



**Рис.7.** Орты поляризационных базисов D, C,  $C_2$ ,  $C_3$ , E,  $E_2$ ,  $D'$ ,  $C'$ ,  $C'_2$ ,  $C'_3$ ,  $E'$  и  $E'_2$ . Положение всех ортов показано в начальный момент времени  $t = 0$ . В нижнем ряду  $\varphi$  - угол между направлениями ортов при  $t = 0$  и осями  $x, y$ .

Вектор Джонса в базисе  $\mathbf{e}_{E'r}(\sigma_0, \varphi), \mathbf{e}_{E'l}(\sigma_0, \varphi)$  имеет вид

$$\mathbf{E}_{x,y} = E_{E'r} \mathbf{e}_{E'r}(\sigma_0, \varphi) + E_{E'l} \mathbf{e}_{E'l}(\sigma_0, \varphi), \quad (122)$$

где  $E_{E'r} = E_{0E'r} e^{i\psi_{E'r}}$ ,  $E_{E'l} = E_{0E'l} e^{i\psi_{E'l}}$  – компоненты вектора Джонса в эллиптическом унитарном поляризационном базисе  $\mathbf{e}_{E'r}(\sigma_0, \varphi), \mathbf{e}_{E'l}(\sigma_0, \varphi)$ .

Матрица преобразования компонент вектора Джонса при переходе от декартового базиса  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  к базису  $\mathbf{e}_{E'r}(\sigma_0, \varphi), \mathbf{e}_{E'l}(\sigma_0, \varphi)$  может быть получена из (121), (122) и равна

$$\mathbf{T}_{\mathbf{E'D}}(\sigma_0, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 \cos \varphi - i \sin \sigma_0 \sin \varphi & \cos \sigma_0 \sin \varphi + i \sin \sigma_0 \cos \varphi \\ -\cos \sigma_0 \sin \varphi + i \sin \sigma_0 \cos \varphi & \cos \sigma_0 \cos \varphi + i \sin \sigma_0 \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (123)$$

Используя матрицу (123) и её унитарность, можно записать соотношения, описывающие преобразования компонент вектора Джонса и ортов при переходе от базиса  $D$  к базису  $E'$  и обратно, в следующем виде

$$\begin{pmatrix} E_{E'r} \\ E_{E'l} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{E'D} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{E'r} \\ \mathbf{e}_{E'l} \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{E'D}^* \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{E'D} \begin{pmatrix} E_{E'r} \\ E_{E'l} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{T}_{E'D}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{E'r} \\ \mathbf{e}_{E'l} \end{pmatrix}. \quad (124)$$

Матрица  $\mathbf{T}_{E'D}(\sigma_0, \varphi)$  может быть представлена в виде следующего произведения

$$\mathbf{T}_{E'D}(\sigma_0, \varphi) = \mathbf{T}_{E'D}(\sigma_0) \mathbf{T}_R(\varphi), \quad (125)$$

где

$$\mathbf{T}_{E'D}(\sigma_0) = \mathbf{T}_{E'D}(\sigma_0, \varphi = 0) = \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 & i \sin \sigma_0 \\ i \sin \sigma_0 & \cos \sigma_0 \end{pmatrix} - \quad (126)$$

матрица преобразования компонент вектора Джонса при переходе от декартового базиса  $D$  к эллиптическому  $E$ .

В предельном случае  $\sigma_0 = 0$   $\mathbf{T}_{E'D}(\sigma_0 = 0, \varphi) = \mathbf{T}_R(\varphi)$ , в другом предельном случае  $\sigma_0 = \pi/4$

$$\mathbf{T}_{E'D}(\sigma_0 = \pi/4, \varphi) = \mathbf{T}_{C_2'D}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (127)$$

где  $\mathbf{T}_{C_2'D}(\varphi)$  - матрица преобразования компонент вектора Джонса при переходе от базиса  $D$  к базису  $C_2'$  (см. сноску 39).

В частном случае  $\sigma_0 = \pi/4$ ,  $\varphi = -\pi/4$  имеем следующее соотношение

$$\mathbf{T}_{E'D}(\sigma_0 = \pi/4, \varphi = -\pi/4) = \mathbf{T}_{C_2'D}(\varphi = -\pi/4) = e^{i\pi/4} \mathbf{T}_{CD}. \quad (128)$$

В табл.3 сведены выражения для матриц, осуществляющих преобразование компонент вектора Джонса от декартового базиса  $D$  к базисам  $D'$ ,  $C$ ,  $C'$ ,  $C_2$ ,  $C_2'$ ,  $C_3$ ,  $C_3'$ ,  $E$ ,  $E'$ ,  $E_2$  и  $E_2'$ . Некоторые из этих матриц уже рассмотрены выше. Кроме того, в третьем столбце табл.3 приведены выражения для компонент вектора Джонса эллиптически

поляризованного излучения во всех рассмотренных базисах, получаемые путём умножения соответствующей матрицы перехода из второго столбца на вектор Джонса (5) в декартовом базисе.

Таблица 3.

Базис	Матрица преобразования компонент вектора Джонса при переходе от декартового базиса к данному базису	Вектор Джонса эллиптически поляризованного излучения с эллиптичностью $\sigma$ , позиционным углом $\chi$ и комплексной амплитудой $E(t)$ в данном базисе
D	$\mathbf{T}_{DD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \cos \sigma \cos \chi - i \sin \sigma \sin \chi \\ \cos \sigma \sin \chi + i \sin \sigma \cos \chi \end{pmatrix}$
D'	$\mathbf{T}_{D'D}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_{x'} \\ E_{y'} \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \cos \sigma \cos(\chi - \varphi) - i \sin \sigma \sin(\chi - \varphi) \\ \cos \sigma \sin(\chi - \varphi) + i \sin \sigma \cos(\chi - \varphi) \end{pmatrix}$
C	$\mathbf{T}_{CD} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_r \\ E_l \end{pmatrix} = \frac{E(t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \sigma - \sin \sigma) e^{i\chi} \\ (\cos \sigma + \sin \sigma) e^{-i\chi} \end{pmatrix}$
C'	$\mathbf{T}_{C'D}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & ie^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & -ie^{i\varphi} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_{r'} \\ E_{l'} \end{pmatrix} = \frac{E(t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \sigma - \sin \sigma) e^{i(\chi - \varphi)} \\ (\cos \sigma + \sin \sigma) e^{-i(\chi - \varphi)} \end{pmatrix}$
C <sub>2</sub>	$\mathbf{T}_{C_2D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_{r_2} \\ E_{l_2} \end{pmatrix} = \frac{E(t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \sigma - \sin \sigma) e^{i\chi} \\ (\cos \sigma + \sin \sigma) e^{-i(\chi - \pi/2)} \end{pmatrix}$
C' <sub>2</sub>	$\mathbf{T}_{C'_2D}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_{r'_2} \\ E_{l'_2} \end{pmatrix} = \frac{E(t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \sigma - \sin \sigma) e^{i(\chi - \varphi)} \\ (\cos \sigma + \sin \sigma) e^{-i(\chi - \varphi - \pi/2)} \end{pmatrix}$
C <sub>3</sub>	$\mathbf{T}_{C_3D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_{r_3} \\ E_{l_3} \end{pmatrix} = \frac{E(t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \sigma - \sin \sigma) e^{i(\chi - \pi/2)} \\ (\cos \sigma + \sin \sigma) e^{-i\chi} \end{pmatrix}$
C' <sub>3</sub>	$\mathbf{T}_{C'_3D} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -ie^{-i\varphi} & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & -ie^{i\varphi} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_{r'_3} \\ E_{l'_3} \end{pmatrix} = \frac{E(t)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \sigma - \sin \sigma) e^{i(\chi - \varphi - \pi/2)} \\ (\cos \sigma + \sin \sigma) e^{-i(\chi - \varphi)} \end{pmatrix}$

E	$\mathbf{T}_{ED}(\sigma_0) = \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 & i \sin \sigma_0 \\ i \sin \sigma_0 & \cos \sigma_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_{Er} \\ E_{Et} \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \cos(\sigma_0 + \sigma) \cos \chi + i \sin(\sigma_0 - \sigma) \sin \chi \\ \cos(\sigma_0 - \sigma) \sin \chi + i \sin(\sigma_0 + \sigma) \cos \chi \end{pmatrix}$
E'	$\mathbf{T}_{E'D}(\sigma_0, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 \cos \varphi - \cos \sigma_0 \sin \varphi + \\ -i \sin \sigma_0 \sin \varphi + i \sin \sigma_0 \cos \varphi \\ -\cos \sigma_0 \sin \varphi + \cos \sigma_0 \cos \varphi + \\ +i \sin \sigma_0 \cos \varphi + i \sin \sigma_0 \sin \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_{E'r} \\ E_{E't} \end{pmatrix} = E(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\sigma_0 + \sigma) \cos(\chi - \varphi) + i \sin(\sigma_0 - \sigma) \sin(\chi - \varphi) \\ \cos(\sigma_0 - \sigma) \sin(\chi - \varphi) + i \sin(\sigma_0 + \sigma) \cos(\chi - \varphi) \end{pmatrix}$
E <sub>2</sub>	$\mathbf{T}_{E_2D}(\sigma_0) = \begin{pmatrix} -i \sin \sigma_0 & \cos \sigma_0 \\ \cos \sigma_0 & -i \sin \sigma_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_{E_2r} \\ E_{E_2t} \end{pmatrix} = E(t) \begin{pmatrix} \cos(\sigma_0 + \sigma) \sin \chi - i \sin(\sigma_0 - \sigma) \cos \chi \\ \cos(\sigma_0 - \sigma) \cos \chi - i \sin(\sigma_0 + \sigma) \sin \chi \end{pmatrix}$
E' <sub>2</sub>	$\mathbf{T}_{E'_2D}(\sigma_0, \varphi) = \begin{pmatrix} -\cos \sigma_0 \sin \varphi - \cos \sigma_0 \cos \varphi - \\ -i \sin \sigma_0 \cos \varphi - i \sin \sigma_0 \sin \varphi \\ \cos \sigma_0 \cos \varphi + \cos \sigma_0 \sin \varphi - \\ +i \sin \sigma_0 \sin \varphi - i \sin \sigma_0 \cos \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} E_{E'_2r} \\ E_{E'_2t} \end{pmatrix} = E(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\sigma_0 + \sigma) \sin(\chi - \varphi) - i \sin(\sigma_0 - \sigma) \cos(\chi - \varphi) \\ \cos(\sigma_0 - \sigma) \cos(\chi - \varphi) - i \sin(\sigma_0 + \sigma) \sin(\chi - \varphi) \end{pmatrix}$

Из выражений для матриц перехода, приведённых в табл.3, следует, что

$$\mathbf{T}_{E'_2D}(\sigma_0 = \pi/4, \varphi) = -i \mathbf{T}_{ED}(\sigma_0 = \pi/4, \varphi) = -i \mathbf{T}_{C_2D}(\varphi). \quad (129)$$

Аналогично соотношению (128) имеем

$$\mathbf{T}_{E_2D}(\sigma_0 = \pi/4, \varphi = -\pi/4) = -i \mathbf{T}_{C_2D}(\varphi = -\pi/4) = e^{-i\pi/4} \mathbf{T}_{CD}. \quad (130)$$

Кроме того, из табл.3 следует, что

$$\mathbf{T}_{E_2D}(\sigma_0 = \pi/4, \varphi) = \mathbf{T}_{C_3D}(\varphi), \quad (131)$$

как и следовало ожидать, поскольку при  $\sigma_0 = \pi/4$  базис  $E'_2$  превращается в базис  $C'_3$ .



Если обозначить элементы матрицы  $\mathbf{T}_{BD}$  преобразования компонент вектора Джонса при переходе от декартового базиса D к некоторому другому унитарному (ортогональному) базису В (любой из базисов из табл.3) следующим образом

$$\mathbf{T}_{BD} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (132)$$

то, как следует из предыдущего рассмотрения, векторы Джонса ортов  $\mathbf{e}_{B_1}, \mathbf{e}_{B_2}$  базиса В в декартовом базисе D равны

$$\mathbf{e}_{B_1} = \begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{12}^* \end{pmatrix} = T_{11}^* \mathbf{e}_x + T_{12}^* \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{e}_{B_2} = \begin{pmatrix} T_{21}^* \\ T_{22}^* \end{pmatrix} = T_{21}^* \mathbf{e}_x + T_{22}^* \mathbf{e}_y. \quad (133)$$

В таблице 4 собраны выражения для матриц, осуществляющих преобразование компонент вектора Джонса от кругового поляризационного базиса С к базисам D, D', C', C<sub>2</sub>, C'<sub>2</sub>, C<sub>3</sub>, C'<sub>3</sub>, E, E', E<sub>2</sub> и E'<sub>2</sub>, и выражения в базисе С для векторов Джонса ортов всех выше рассмотренных поляризационных базисов.

Таблица 4.

Базис	Матрица преобразования компонент вектора Джонса при переходе от кругового базиса С к данному базису	Векторы Джонса ортов данного базиса, выраженные в круговом базисе С
D	$\mathbf{T}_{DC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_l),$ $\mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_l)$

<sup>52</sup> См. предыдущее примечание.

D'	$\mathbf{T}_{D'C}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & e^{i\varphi} \\ -ie^{-i\varphi} & ie^{i\varphi} \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_{x'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi} \mathbf{e}_r + e^{-i\varphi} \mathbf{e}_l),$ $\mathbf{e}_{y'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ie^{i\varphi} \\ -ie^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi} \mathbf{e}_r - e^{-i\varphi} \mathbf{e}_l)$
C	$\mathbf{T}_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
C'	$\mathbf{T}_{C'C}(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_{r'} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_{l'} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = e^{-i\varphi} \mathbf{e}_l$
C <sub>2</sub>	$\mathbf{T}_{C_2C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_{l_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} = -i\mathbf{e}_l$
C' <sub>2</sub>	$\mathbf{T}_{C'_2C}(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & ie^{i\varphi} \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_{r'_2} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_{l'_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ie^{-i\varphi} \end{pmatrix} = -ie^{-i\varphi} \mathbf{e}_l$
C <sub>3</sub>	$\mathbf{T}_{C_3C} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_{r_3} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = i\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_{l_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_l$
C' <sub>3</sub>	$\mathbf{T}_{C'_3C} = \begin{pmatrix} -ie^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_{r'_3} = \begin{pmatrix} ie^{i\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} = ie^{i\varphi} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_{l'_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = e^{-i\varphi} \mathbf{e}_l$
E	$\mathbf{T}_{EC}(\sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 + \sin \sigma_0 & \cos \sigma_0 - \sin \sigma_0 \\ -i(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) & i(\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_{Er}(\sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 + \sin \sigma_0 \\ \cos \sigma_0 - \sin \sigma_0 \end{pmatrix} =$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \mathbf{e}_r +$ $+ \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \mathbf{e}_l,$ $\mathbf{e}_{El}(\sigma_0) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 - \sin \sigma_0 \\ -(\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \end{pmatrix} =$ $= \frac{i}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \mathbf{e}_r -$ $- \frac{i}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \mathbf{e}_l$

E'	$\mathbf{T}_{E'C}(\sigma_0, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot$ $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 + \\ + \sin \sigma_0 \end{pmatrix} e^{-i\varphi} & \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 - \\ - \sin \sigma_0 \end{pmatrix} e^{i\varphi} \\ -i \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 - \\ - \sin \sigma_0 \end{pmatrix} e^{-i\varphi} & i \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 + \\ + \sin \sigma_0 \end{pmatrix} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_{E'r}(\sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) e^{i\varphi} \\ (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) e^{-i\varphi} \end{pmatrix} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) e^{i\varphi} \mathbf{e}_r +$ $+ \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) e^{-i\varphi} \mathbf{e}_l,$ $\mathbf{e}_{E'l}(\sigma_0) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) e^{i\varphi} \\ -(\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) e^{-i\varphi} \end{pmatrix} =$ $\frac{i}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) e^{i\varphi} \mathbf{e}_r -$ $- \frac{i}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) e^{-i\varphi} \mathbf{e}_l$
E <sub>2</sub>	$\mathbf{T}_{E_2C}(\sigma_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot$ $\begin{pmatrix} -i \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 + \\ + \sin \sigma_0 \end{pmatrix} & i \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 - \\ - \sin \sigma_0 \end{pmatrix} \\ \cos \sigma_0 - & \cos \sigma_0 + \\ - \sin \sigma_0 & + \sin \sigma_0 \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_{E_2r} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 + \sin \sigma_0 \\ -(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \end{pmatrix} =$ $\frac{i}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \mathbf{e}_r - \frac{i}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \mathbf{e}_l,$ $\mathbf{e}_{E_2l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 - \sin \sigma_0 \\ \cos \sigma_0 + \sin \sigma_0 \end{pmatrix} =$ $\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \mathbf{e}_r + \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \mathbf{e}_l$
E' <sub>2</sub>	$\mathbf{T}_{E'_2C}(\sigma_0, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot$ $\begin{pmatrix} -ie^{-i\varphi} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 + \\ + \sin \sigma_0 \end{pmatrix} & ie^{i\varphi} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 - \\ - \sin \sigma_0 \end{pmatrix} \\ e^{-i\varphi} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 - \\ - \sin \sigma_0 \end{pmatrix} & e^{i\varphi} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 + \\ + \sin \sigma_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$	$\mathbf{e}_{E'_2r} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \\ -e^{-i\varphi} (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \end{pmatrix} =$ $= \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \mathbf{e}_r -$ $- \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \mathbf{e}_l,$ $\mathbf{e}_{E'_2l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \\ e^{-i\varphi} (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \end{pmatrix} =$ $= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} (\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \mathbf{e}_r +$ $+ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} (\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0) \mathbf{e}_l$

Если матрица  $\mathbf{T}_{BC}$  преобразования компонент вектора Джонса при переходе от кругового базиса  $C$  к некоторому другому унитарному (ортогональному) базису  $B$  (любой из базисов в табл.3 и 4) равна

$$\mathbf{T}_{BC} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \text{ то, как следует из предыдущего рассмотрения, векто-}$$

ры Джонса ортов  $\mathbf{e}_{B_1}, \mathbf{e}_{B_2}$  базиса  $B$  в круговом базисе  $C$  равны

$$\mathbf{e}_{B_1} = \begin{pmatrix} T_{11}^* \\ T_{12}^* \end{pmatrix} = T_{11}^* \mathbf{e}_r + T_{12}^* \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{e}_{B_2} = \begin{pmatrix} T_{21}^* \\ T_{22}^* \end{pmatrix} = T_{21}^* \mathbf{e}_r + T_{22}^* \mathbf{e}_l.$$

Выразим ещё эллиптические орты  $\mathbf{e}_{Er}(\sigma_0), \mathbf{e}_{El}(\sigma_0)$  через круговые орты  $\mathbf{e}_{r_2}, \mathbf{e}_{l_2}$  (см., также, (120)) и эллиптические орты  $\mathbf{e}_{E_{2r}}(\sigma_0), \mathbf{e}_{E_{2l}}(\sigma_0)$  через круговые орты  $\mathbf{e}_{r_3}, \mathbf{e}_{l_3}$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{Er}(\sigma_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0)\mathbf{e}_{r_2} + \frac{i}{\sqrt{2}}(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0)\mathbf{e}_{l_2}, \\ \mathbf{e}_{El}(\sigma_0) &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0)\mathbf{e}_{r_2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0)\mathbf{e}_{l_2}; \end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{E_{2r}}(\sigma_0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0)\mathbf{e}_{r_3} - \frac{i}{\sqrt{2}}(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0)\mathbf{e}_{l_3}, \\ \mathbf{e}_{E_{2l}}(\sigma_0) &= -\frac{i}{\sqrt{2}}(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0)\mathbf{e}_{r_3} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \sigma_0 + \sin \sigma_0)\mathbf{e}_{l_3}. \end{aligned}$$

Если  $\sigma_0 = \pi/4$ , то, как легко видеть из (134), эллиптические орты  $\mathbf{e}_{Er}(\sigma_0), \mathbf{e}_{El}(\sigma_0)$  превращаются в круговые  $\mathbf{e}_{r_2}, \mathbf{e}_{l_2}$ , а эллиптические орты  $\mathbf{e}_{E_{2r}}(\sigma_0), \mathbf{e}_{E_{2l}}(\sigma_0)$  - в круговые  $\mathbf{e}_{r_3}, \mathbf{e}_{l_3}$ .

В заключение данного раздела приведём выражения для матриц преобразования компонент вектора Джонса при переходе от кругового

поляризационного базиса  $\mathbf{e}_{r_2}, \mathbf{e}_{l_2}$  к эллиптическому базису  $\mathbf{e}_{Er}(\sigma_0), \mathbf{e}_{El}(\sigma_0)$  и от кругового поляризационного базиса  $\mathbf{e}_{r_3}, \mathbf{e}_{l_3}$  к эллиптическому базису  $\mathbf{e}_{E_2r}(\sigma_0), \mathbf{e}_{E_2l}(\sigma_0)$

$$\mathbf{T}_{EC_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 + \sin \sigma_0 & -i(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \\ -i(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) & \cos \sigma_0 + \sin \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad (135)$$

$$\mathbf{T}_{E_2C_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 + \sin \sigma_0 & i(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) \\ i(\cos \sigma_0 - \sin \sigma_0) & \cos \sigma_0 + \sin \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Формулы (135) легко получить, пользуясь (134) и связью между элементами матрицы преобразования компонент вектора Джонса и компонентами векторов Джонса ортов соответствующих унитарных базисов (см., например, (132), (133)).

## 5. Произвольные (обобщённые) поляризационные базисы

Представления поляризованного излучения точками декартовой (поляризационный базис D) или круговой (поляризационный базис C) комплексной плоскости являются всего лишь двумя членами, хотя и особенно интересными и используемыми на практике, бесконечного множества представлений поляризованного излучения точками комплексной плоскости, которые могут быть получены путём перебора различных пар базисных состояний поляризации. Выше рассмотрены унитарные (в частном случае ортогональные) поляризационные базисы, которые мы обозначаем как В. В них интенсивность  $I = E_{B_1} E_{B_1}^* + E_{B_2} E_{B_2}^* = \text{Sp} \mathbf{I}_B$  и детерминант  $\det \mathbf{I}_B$  матрицы когерентности  $\mathbf{I}_B$  инвариантны относительно выбора базиса В. Рассмотрим теперь произвольные (обобщённые) поляризационные базисы [40], которые будем обозначать как G. Соответствующие им обобщённые базисные состояния поляризации являются просто двумя различными, в общем

случае неортогональными эллипсами  $\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_v$ <sup>53</sup>. Выражение для интенсивности зависит от вида обобщённого базиса. Декартовый вектор Джонса  $\mathbf{E}_{x,y}$  можно представить как линейную суперпозицию обобщённых базисных векторов  $\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_v$  в виде

$$\mathbf{E}_{x,y} = E_u \mathbf{E}_u + E_v \mathbf{E}_v, \quad (136)$$

где  $E_u, E_v$  комплексные числа, являющиеся компонентами вектора Джонса в обобщённом базисе  $\mathbf{E}_u, \mathbf{E}_v$  (обозначим его  $G_1$ ). Тот же вектор можно выразить в другом обобщённом базисе  $\mathbf{E}_w, \mathbf{E}_z$  (обозначим его  $G_2$ ); соответствующие компоненты вектора Джонса в этом базисе обозначим  $E_w, E_z$ . Матрица перехода от одного обобщённого базиса к другому  $\mathbf{T}_{G_1 G_2}$  в общем случае уже не является унитарной (ортогональной). Выражения, описывающие преобразования компонент вектора Джонса и базисных векторов при смене базиса имеют вид<sup>54</sup>

$$\begin{pmatrix} E_u \\ E_v \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{G_1 G_2} \begin{pmatrix} E_w \\ E_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E}_u \\ \mathbf{E}_v \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{T}_{G_1 G_2}^{-1}} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_w \\ \mathbf{E}_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E_w \\ E_z \end{pmatrix} = \mathbf{T}_{G_1 G_2}^{-1} \begin{pmatrix} E_u \\ E_v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{E}_w \\ \mathbf{E}_z \end{pmatrix} = \widetilde{\mathbf{T}_{G_1 G_2}} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_u \\ \mathbf{E}_v \end{pmatrix}, \quad (137)$$

где

$$\mathbf{T}_{G_1 G_2}^{-1} = \frac{1}{\begin{pmatrix} T_{G_1 G_2} \end{pmatrix}_{11} \begin{pmatrix} T_{G_1 G_2} \end{pmatrix}_{22} - \begin{pmatrix} T_{G_1 G_2} \end{pmatrix}_{12} \begin{pmatrix} T_{G_1 G_2} \end{pmatrix}_{21}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{G_1 G_2} \end{pmatrix}_{22} & -\begin{pmatrix} T_{G_1 G_2} \end{pmatrix}_{12} \\ -\begin{pmatrix} T_{G_1 G_2} \end{pmatrix}_{21} & \begin{pmatrix} T_{G_1 G_2} \end{pmatrix}_{11} \end{pmatrix}, \quad (138)$$

и напомним, что волнистая черта сверху означает транспонирование матрицы.

<sup>53</sup> На практике разделитель ортогональных поляризаций радиотелескопа [61] может оказаться несовершенным и вместо “чистых” и ортогональных линейных или круговых поляризаций будут приниматься в общем случае эллиптические и неортогональные поляризации с разными эллиптичностью. Этим, в частности, оправдано рассмотрение обобщённых базисов в данной работе (см. раздел 12).

<sup>54</sup> Формулы (52), (104), (107), (124) являются частными случаями формул (137).

## 6. Преобразование коэффициента поляризации при переходе от одного базиса к другому

Коэффициент поляризации в обобщённом поляризационном базисе равен

$$K_{u,v} = \frac{E_u}{E_v} \quad (139)$$

и ему соответствует обобщённая комплексная плоскость  $\text{Re } K_{u,v}$ ,  $\text{Im } K_{u,v}$ . При переходе от декартового базиса D (орты  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ) к обобщённому базису G (базисные векторы  $\mathbf{E}_u$ ,  $\mathbf{E}_v$ ) и обратно изменение соответствующих коэффициентов поляризации описывается билинейным преобразованием, причём коэффициенты этого преобразования совпадают с элементами матрицы  $\mathbf{T}_{GD}$  преобразования компонент вектора Джонса

$$K_{u,v} = \frac{(\mathbf{T}_{GD})_{11} K_{x,y} + (\mathbf{T}_{GD})_{12}}{(\mathbf{T}_{GD})_{21} K_{x,y} + (\mathbf{T}_{GD})_{22}}, \quad K_{x,y} = \frac{(\mathbf{T}_{GD})_{22} K_{u,v} - (\mathbf{T}_{GD})_{12}}{-(\mathbf{T}_{GD})_{21} K_{u,v} + (\mathbf{T}_{GD})_{11}}. \quad (140)$$

В частности, при переходе от декартового базиса  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  к круговому базису  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_l$  и обратно имеем (см. (103))

$$K_{r,l} = \frac{(\mathbf{T}_{CD})_{11} K_{x,y} + (\mathbf{T}_{CD})_{12}}{(\mathbf{T}_{CD})_{21} K_{x,y} + (\mathbf{T}_{CD})_{22}} = \frac{K_{x,y} + i}{K_{x,y} - i},$$

$$K_{x,y} = \frac{(\mathbf{T}_{CD})_{22} K_{r,l} - (\mathbf{T}_{CD})_{12}}{-(\mathbf{T}_{CD})_{21} K_{r,l} + (\mathbf{T}_{CD})_{11}} = i \frac{K_{r,l} + 1}{K_{r,l} - 1}. \quad (141)$$

При переходе от одного обобщённого базиса  $G_2$  к другому обобщённому базису  $G_1$  имеем выражения (140), в которых декартовый базис заменён обобщённым базисом  $G_2$

$$K_{u,v} = \frac{(\mathbf{T}_{G_1 G_2})_{11} K_{w,z} + (\mathbf{T}_{G_1 G_2})_{12}}{(\mathbf{T}_{G_1 G_2})_{21} K_{w,z} + (\mathbf{T}_{G_1 G_2})_{22}}, \quad K_{w,z} = \frac{(\mathbf{T}_{G_1 G_2})_{22} K_{u,v} - (\mathbf{T}_{G_1 G_2})_{12}}{-(\mathbf{T}_{G_1 G_2})_{21} K_{u,v} + (\mathbf{T}_{G_1 G_2})_{11}}. \quad (142)$$

Найдём соотношение, согласно которому преобразуется матрица Джонса при переходе от базиса  $G_2$  к базису  $G_1$ . Умножим выражение  $\mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{J}_{G_2} \mathbf{E}_{\text{in}}$  (формула (53)), связывающее вектор Джонса на выходе некоторого недеполяризующего устройства с его значением на входе и записанное в базисе  $G_2$ , слева на матрицу  $\mathbf{T}_{G_1 G_2}$  перехода к базису  $G_1$ . Далее используем равенство  $\mathbf{T}_{G_1 G_2}^{-1} \mathbf{T}_{G_1 G_2} = \mathbf{1}$  ( $\mathbf{1}$  - единичная матрица) и свойство ассоциативности произведения нескольких матриц. В результате получим искомое выражение

$$\mathbf{J}_{G_1} = \mathbf{T}_{G_1 G_2} \mathbf{J}_{G_2} \mathbf{T}_{G_1 G_2}^{-1}. \quad (143)$$

Если в (143) оба базиса унитарные (в частности, оба ортогональные), то обратную матрицу можно заменить на эрмитово сопряжённую (в частности, если оба ортогональные, на транспонированную).

В качестве примера получим выражение для матрицы Джонса ротатора в круговом базисе  $C$  из исходного выражения

$$\mathbf{J}_D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

записанного в декартовом базисе  $D$ , с помощью (143). Подставляя в (143)  $\mathbf{T}_{G_1 G_2} = \mathbf{T}_{CD}$  (см. (103)), получим

$$\mathbf{J}_C(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (144)$$

Сопоставляя диагональные элементы диагональной матрицы (144) с найденными в [60] собственными значениями матрицы ротатора  $j_1 = e^{i\varphi}$ ,  $j_2 = e^{-i\varphi}$ , делаем вывод о том, что базис  $C$  является её собственным базисом.

## 7. Матрица и вектор когерентности в круговых и эллиптических базисах

Определение (21) матрицы когерентности, как среднего значения простого матричного произведения декартового вектора Джонса на его эрмитово-сопряжённый вектор, можно обобщить на любой из базисов  $B$ , рассмотренных выше (см. табл. 3 и 4)



$$\mathbf{I}_B = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E}_{B_1, B_2}(t) \mathbf{E}_{B_1, B_2}^+(t)} = \frac{c}{4\pi} \overline{\begin{pmatrix} E_{B_1}(t) \\ E_{B_2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{B_1}^*(t) & E_{B_2}^*(t) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} I_{B_1 B_1} & I_{B_1 B_2} \\ I_{B_2 B_1} & I_{B_2 B_2} \end{pmatrix}, \quad (145)$$

где  $\mathbf{E}_{B_1, B_2}(t)$  – вектор Джонса в унитарном (ортогональном) базисе В (индексы  $B_1, B_2$  означают  $x, y$  (базис D), или  $x', y'$  (базис D'), или  $r, l$  (базис C), или  $r', l'$  (базис C') и так далее).

Подставляя в (145)  $\mathbf{E}_{B_1, B_2}(t) = \mathbf{T}_{BD} \mathbf{E}_{x, y}(t)$  и используя то, что эрмитово-сопряжённая матрица произведения двух матриц равна произведению эрмитово-сопряжённых матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке, а также свойство ассоциативности произведения нескольких матриц, получим<sup>55</sup>

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{T}_{BD} \mathbf{I}_D \mathbf{T}_{BD}^+, \quad \mathbf{I}_D = \mathbf{T}_{BD}^+ \mathbf{I}_B \mathbf{T}_{BD}. \quad (146)$$

Вектор когерентности в унитарном базисе В

$$\mathbf{V}_{IB} = \frac{c}{4\pi} \overline{\mathbf{E}_{B_1, B_2}(t) \otimes \mathbf{E}_{B_1, B_2}^*(t)} \quad (147)$$

связан с вектор когерентности в декартовом базисе D соотношениями

$$\mathbf{V}_{IB} = (\mathbf{T}_{BD} \otimes \mathbf{T}_{BD}^+) \mathbf{V}_{ID} = \mathbf{K}_{BD} \mathbf{V}_{ID}, \quad \mathbf{V}_{ID} = (\mathbf{T}_{BD}^+ \otimes \widetilde{\mathbf{T}_{BD}}) \mathbf{V}_{IB} = \mathbf{K}_{BD}^+ \mathbf{V}_{IB}, \quad (148)$$

где  $\mathbf{K}_{BD} = \mathbf{T}_{BD} \otimes \mathbf{T}_{BD}^*$ .

Если базис В является круговым базисом С ( $\mathbf{T}_{BD} = \mathbf{T}_{CD}$ ,  $\mathbf{V}_{IB} = \mathbf{V}_{IC}$ ), то имеем из (103) и (148) следующие соотно-

шения между векторами когерентности  $\mathbf{V}_{IC} = \begin{pmatrix} I_{rr} \\ I_{rl} \\ I_{lr} \\ I_{ll} \end{pmatrix}$  и  $\mathbf{V}_{ID}$  ( $\mathbf{V}_{ID} \equiv \mathbf{V}_I$ ,

(см. (31), (75))

<sup>55</sup> Формулы (58) являются частным случаем (146).

$$\mathbf{V}_{IC} = (\mathbf{T}_{CD} \otimes \mathbf{T}_{CD}^*) \mathbf{V}_{ID} = \mathbf{K}_{CD} \mathbf{V}_{ID}, \quad \mathbf{V}_{ID} = (\mathbf{T}_{CD}^+ \otimes \widetilde{\mathbf{T}}_{CD}) \mathbf{V}_{IC} = \mathbf{K}_{CD}^+ \mathbf{V}_{IC}, \quad (149)$$

где

$$\mathbf{K}_{CD} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ 1 & i & i & -1 \\ 1 & -i & -i & -1 \\ 1 & i & -i & 1 \end{pmatrix}. \quad (150)$$

При использовании базиса  $C'$  вместо (149), (150) имеем следующие

соотношения между векторами когерентности  $\mathbf{V}_{IC'} = \begin{pmatrix} I_{r'r'} \\ I_{r'l'} \\ I_{l'r'} \\ I_{l'l'} \end{pmatrix}$  и  $\mathbf{V}_{ID}$

(см. (148) и табл.3)

$$\mathbf{V}_{IC'} = (\mathbf{T}_{C'D} \otimes \mathbf{T}_{C'D}^*) \mathbf{V}_{ID} = \mathbf{K}_{C'D} \mathbf{V}_{ID}, \quad \mathbf{V}_{ID} = (\mathbf{T}_{C'D}^+ \otimes \widetilde{\mathbf{T}}_{C'D}) \mathbf{V}_{IC'} = \mathbf{K}_{C'D}^+ \mathbf{V}_{IC'}, \quad (151)$$

где

$$\mathbf{K}_{C'D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ e^{-2i\varphi} & ie^{-2i\varphi} & ie^{-2i\varphi} & -e^{-2i\varphi} \\ e^{2i\varphi} & -ie^{2i\varphi} & -ie^{2i\varphi} & -e^{2i\varphi} \\ 1 & i & -i & 1 \end{pmatrix}. \quad (152)$$

При использовании базиса  $E'$  имеем следующие соотношения

между векторами когерентности  $\mathbf{V}_{IE'} = \begin{pmatrix} I_{E'rE'r} \\ I_{E'rE'l} \\ I_{E'lE'r} \\ I_{E'lE'l} \end{pmatrix}$  и  $\mathbf{V}_{ID}$

$$\mathbf{V}_{IE'} = (\mathbf{T}_{E'D} \otimes \mathbf{T}_{E'D}^*) \mathbf{V}_{ID} = \mathbf{K}_{E'D} \mathbf{V}_{ID}, \quad \mathbf{V}_{ID} = (\mathbf{T}_{E'D}^+ \otimes \widetilde{\mathbf{T}}_{E'D}) \mathbf{V}_{IE'} = \mathbf{K}_{E'D}^+ \mathbf{V}_{IE'}, \quad (153)$$

где

$$\mathbf{K}_{\text{ED}}(\sigma_0, \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{array}{cc} 1 + \cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi & \cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \\ -\sin 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi & \cos 2\sigma_0 + \cos 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi & -\cos 2\sigma_0 + \cos 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi \\ 1 - \cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi & -\cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \end{array} \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{cc} \cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 & 1 - \cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi \\ -\cos 2\sigma_0 + \cos 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi & \sin 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi \\ \cos 2\sigma_0 + \cos 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi & \sin 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi \\ -\cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 & 1 + \cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi \end{array} \right) \quad (154)$$

Подставляя в (154)  $\varphi = 0$ , получим матрицу, осуществляющую преобразование компонент вектора когерентности от декартового базиса к базису E

$$\mathbf{K}_{\text{ED}}(\sigma_0) = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{cccc} 1 + \cos 2\sigma_0 & -i \sin 2\sigma_0 & i \sin 2\sigma_0 & 1 - \cos 2\sigma_0 \\ -i \sin 2\sigma_0 & 1 + \cos 2\sigma_0 & 1 - \cos 2\sigma_0 & i \sin 2\sigma_0 \\ i \sin 2\sigma_0 & 1 - \cos 2\sigma_0 & 1 + \cos 2\sigma_0 & -i \sin 2\sigma_0 \\ 1 - \cos 2\sigma_0 & i \sin 2\sigma_0 & -i \sin 2\sigma_0 & 1 + \cos 2\sigma_0 \end{array} \right). \quad (155)$$

Если положить в (154)  $\sigma_0 = \pi/4$ , то получим матрицу преобразования вектора когерентности от декартового базиса к круговому базису  $C'_2$

$$\mathbf{K}_{C'_2\text{D}}(\varphi) = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{cccc} 1 & -i & i & 1 \\ -ie^{-i2\varphi} & e^{-i2\varphi} & e^{-i2\varphi} & ie^{-i2\varphi} \\ ie^{i2\varphi} & e^{i2\varphi} & e^{i2\varphi} & -ie^{i2\varphi} \\ 1 & i & -i & 1 \end{array} \right). \quad (156)$$

<sup>56</sup> Если в (156) положить  $\varphi = 0$ , то получим матрицу перехода  $\mathbf{K}_{C'_2\text{D}}$  от декартового базиса D к круговому базису  $C'_2$ .

Если же подставить в (154)  $\sigma_0 = 0$ , то получим уже знакомую матрицу ротатора (75) для вектора когерентности  $\mathbf{K}_R(\varphi) = \mathbf{K}_{D'D}(\varphi)$ .

Матрица преобразования вектора когерентности при переходе от декартового базиса D к базису  $E'_2$  равна  $\mathbf{T}_{E'_2D} \otimes \mathbf{T}_{E'_2D}^*$ , что после вычислений (см. табл.3) даёт

$$\mathbf{K}_{E'_2D}(\sigma_0, \varphi) = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{array}{cc} 1 - \cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi & -\cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \\ -\sin 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi & -\cos 2\sigma_0 + \cos 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi & \cos 2\sigma_0 + \cos 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi \\ 1 + \cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi & \cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \\ -\cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 & 1 + \cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi \\ \cos 2\sigma_0 + \cos 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi & \sin 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi \\ -\cos 2\sigma_0 + \cos 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi & \sin 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi \\ \cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 & 1 - \cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$(157)$$

Подставляя в (157)  $\varphi = 0$ , получим матрицу, осуществляющую преобразование компонент вектора когерентности от декартового базиса к базису  $E_2$

$$\mathbf{K}_{E_2D}(\sigma_0) = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{cccc} 1 - \cos 2\sigma_0 & -i \sin 2\sigma_0 & i \sin 2\sigma_0 & 1 + \cos 2\sigma_0 \\ -i \sin 2\sigma_0 & 1 - \cos 2\sigma_0 & 1 + \cos 2\sigma_0 & i \sin 2\sigma_0 \\ i \sin 2\sigma_0 & 1 + \cos 2\sigma_0 & 1 - \cos 2\sigma_0 & -i \sin 2\sigma_0 \\ 1 + \cos 2\sigma_0 & i \sin 2\sigma_0 & -i \sin 2\sigma_0 & 1 - \cos 2\sigma_0 \end{array} \right).$$

$$(158)$$

Если положить в (157)  $\sigma_0 = \pi/4$ , то получим матрицу преобразования вектора когерентности от декартового базиса к круговому базису  $C'_3$

$$\mathbf{K}_{C_3D}(\varphi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & i & 1 \\ -ie^{-i2\varphi} & e^{-i2\varphi} & e^{-i2\varphi} & ie^{-i2\varphi} \\ ie^{i2\varphi} & e^{i2\varphi} & e^{i2\varphi} & -ie^{i2\varphi} \\ 1 & i & -i & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_{C_2D}(\varphi).^{57} \quad (159)$$

Формулы (146) и (148) можно обобщить на случай перехода между двумя любыми унитарными базисами  $B_1$  и  $B_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{B_1} &= \mathbf{T}_{B_1B_2} \mathbf{I}_{B_2} \mathbf{T}_{B_1B_2}^+, \quad \mathbf{I}_{B_2} = \mathbf{T}_{B_1B_2}^+ \mathbf{I}_{B_1} \mathbf{T}_{B_1B_2}, \\ \mathbf{V}_{IB_1} &= (\mathbf{T}_{B_1B_2} \otimes \mathbf{T}_{B_1B_2}^*) \mathbf{V}_{IB_2} = \mathbf{K}_{B_1B_2} \mathbf{V}_{IB_2}, \quad \mathbf{V}_{IB_2} = (\mathbf{T}_{B_1B_2}^+ \otimes \widetilde{\mathbf{T}_{B_1B_2}}) \mathbf{V}_{IB_1} = \mathbf{K}_{B_1B_2}^+ \mathbf{V}_{IB_1}. \end{aligned} \quad (160)$$

Например, если первый базис это  $C'$ , а второй  $C$ , то (см. табл.4)

$$\mathbf{K}_{C'C}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i2\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i2\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (161)$$

Матрица  $\mathbf{K}_{C'C}(\varphi)$  является матрицей ротатора для вектора когерентности в циркулярном базисе  $C$ , причём  $(\mathbf{K}_{C'C}(\varphi))^{-1} = \mathbf{K}_{C'C}(-\varphi) = \mathbf{K}_{C'C'}(\varphi)$ .

Преобразования матрицы когерентности (160) (в частных случаях (58) и (146)) являются унитарными, то есть сохраняют детерминант и след матрицы когерентности ( $\text{Sp}(\mathbf{I}_{B_1}) = \text{Sp}(\mathbf{I}_{B_2}) = I$ ). Матрицы преобразования вектора когерентности в (160) (в частных случаях матрицы в (148), (149), (151), (153) и матрица (157)) унитарны, то есть  $\mathbf{K}_{B_1B_2}^{-1} = \mathbf{K}_{B_1B_2}^+ = \mathbf{K}_{B_2B_1}$ .

---

<sup>57</sup> Если в (159) положить  $\varphi = 0$ , то получим матрицу перехода  $\mathbf{K}_{C_3D}$  от декартового базиса  $D$  к круговому базису  $C_3$ .

## 8. Параметры Стокса, выраженные через элементы матрицы когерентности в круговых и эллиптических базисах

Пользуясь выражениями (28), (29), (32), связывающими параметры Стокса с элементами вектора когерентности в декартовом базисе, и соотношениями между последними и элементами вектора когерентности в круговом базисе  $\mathbf{C}$  (149), (150), получим следующие формулы для параметров Стокса

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{c}{4\pi} \left( \overline{E_{0r}}^2 + \overline{E_{0l}}^2 \right) = I_{rr} + I_{ll}, \\
 Q &= \frac{c}{2\pi} \overline{E_{0r} E_{0l} \cos(\psi_r - \psi_l)} = I_{rl} + I_{lr} = 2\text{Re}(I_{rl}), \\
 U &= \frac{c}{2\pi} \overline{E_{0r} E_{0l} \sin(\psi_r - \psi_l)} = -i(I_{rl} - I_{lr}) = 2\text{Im}(I_{rl}), \\
 V &= \frac{c}{4\pi} \left( \overline{E_{0r}}^2 - \overline{E_{0l}}^2 \right) = I_{rr} - I_{ll},
 \end{aligned} \tag{162}$$

где  $E_{0r}$ ,  $E_{0l}$  - амплитуды,  $\psi_r$ ,  $\psi_l$  - фазы циркулярных компонент принимаемого радиоизлучения.

В матричном виде (162) запишется в виде

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{V}_{\text{IC}} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} I_{rr} \\ I_{rl} \\ I_{lr} \\ I_{ll} \end{pmatrix}, \tag{163}$$

где

$$\mathbf{C} = \mathbf{D} \mathbf{K}_{\text{CD}}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{164}$$

Из (162), (163) получим выражения для элементов вектора когерентности в представлении круговых поляризаций базиса  $\mathbf{C}$  через параметры Стокса

$$\begin{aligned} I_{rr} &= \frac{1}{2}(I+V), \\ I_{rl} &= \frac{1}{2}(Q+iU), \\ I_{lr} &= \frac{1}{2}(Q-iU), \\ I_{ll} &= \frac{1}{2}(I-V). \end{aligned} \tag{165}$$

В матричном виде (165) запишется в виде

$$\mathbf{V}_{\text{IC}} = \begin{pmatrix} I_{rr} \\ I_{rl} \\ I_{lr} \\ I_{ll} \end{pmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{C}^+ \mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix}. \tag{166}$$

Вектор Стокса связан с вектором когерентности в базисе  $\mathbf{C}'$  соотношениями (при выводе используются формулы (28), (29), (32) и (151), (152))

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}'(\varphi) \mathbf{V}_{\text{IC}'}, \quad \mathbf{V}_{\text{IC}'} = \frac{1}{2} (\mathbf{C}'(\varphi))^+ \mathbf{S}, \tag{167}$$

где

$$\mathbf{C}'(\varphi) = \mathbf{DK}_{\text{CD}}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{i2\varphi} & e^{-i2\varphi} & 0 \\ 0 & -ie^{i2\varphi} & ie^{-i2\varphi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{168}$$

Из (164) и (168) видно, что  $\mathbf{C}'(0) = \mathbf{C}$ .

Получим теперь соотношения между вектором Стокса и вектором

когерентности  $\mathbf{V}_{\mathbf{E}'}$  = 
$$\begin{pmatrix} I_{E'rE'r} \\ I_{E'rE'l} \\ I_{E'lE'r} \\ I_{E'lE'l} \end{pmatrix}$$
 в базисе  $\mathbf{E}'$ . С этой целью используем

(28), (29), (32) (153) и (154). В результате имеем

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}'(\sigma_0, \varphi) \mathbf{V}_{\mathbf{E}'}, \quad \mathbf{V}_{\mathbf{E}'} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}'(\sigma_0, \varphi))^+ \mathbf{S}, \quad (169)$$

где

$$\mathbf{E}'(\sigma_0, \varphi) = \mathbf{D}(\mathbf{K}_{\text{ED}}(\sigma_0, \varphi))^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi & -\cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi \\ \cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi & \cos 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi & \cos 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi & -\cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi \\ \sin 2\sigma_0 & -i \cos 2\sigma_0 & i \cos 2\sigma_0 & -\sin 2\sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (170)$$

Рассмотрим частные случаи, вытекающие из (169), (170). Если положить  $\sigma_0 = 0$ , то получим связь между вектором Стокса и вектором когерентности в базисе  $\mathbf{D}'$

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}'(\varphi) \mathbf{V}_{\mathbf{D}'}, \quad \mathbf{V}_{\mathbf{D}'} = \frac{1}{2} (\mathbf{D}'(\varphi))^+ \mathbf{S}, \quad (171)$$

где  $\mathbf{D}'(\varphi) = \mathbf{E}'(\sigma_0 = 0, \varphi) = \mathbf{D}\mathbf{K}_{\text{R}}(-\varphi)$  и

$$\mathbf{D}'(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi & -\sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi & \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ 0 & -i & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (172)$$

---

<sup>58</sup>  $\mathbf{V}'_{\mathbf{I}}$  в (75) есть то же самое, что  $\mathbf{V}_{\mathbf{D}'}$  в (171), то есть  $\mathbf{V}'_{\mathbf{I}} \equiv \mathbf{V}_{\mathbf{D}'}$  (также  $\mathbf{V}_{\mathbf{I}} \equiv \mathbf{V}_{\mathbf{D}}$ ).



Далее, если в (172) положить  $\varphi = \pi/4$ , то получим формулы (71), связывающие вектор Стокса и вектор когерентности в декартовом базисе  $D'(\varphi = \pi/4)$  и параметры Стокса в  $D$  с параметрами Стокса в  $D'(\varphi = \pi/4)$ .

Следующий частный случай имеет место при  $\sigma_0 = \pi/4$ . При этом базис  $E'$  превращается в базис  $C'_2$ , матрица  $E'(\sigma_0, \varphi)$  превращается в

$$C'_2(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & ie^{i2\varphi} & -ie^{-i2\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i2\varphi} & e^{-i2\varphi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (173)$$

Используя (173) можно получить связь между вектором Стокса и вектором когерентности в базисах  $C'_2$  и  $C_2$

$$S = C'_2(\varphi) V_{IC'_2}, \quad V_{IC'_2} = \frac{1}{2}(C'_2(\varphi))^+ S, \quad (174)$$

$$S = C_2 V_{IC_2}, \quad V_{IC_2} = \frac{1}{2} C_2^+ S.$$

где

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (175)$$

Полагая в (170)  $\varphi=0$  получим матрицу

$$E(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos 2\sigma_0 & i \sin 2\sigma_0 & -i \sin 2\sigma_0 & -\cos 2\sigma_0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \sin 2\sigma_0 & -i \cos 2\sigma_0 & i \cos 2\sigma_0 & -\sin 2\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad (176)$$

с помощью которой можно получить связь между вектором Стокса и вектором когерентности в базисе  $E$

$$S = E(\sigma_0) V_{IE}, \quad V_{IE} = \frac{1}{2}(E(\sigma_0))^+ S. \quad (177)$$

Наконец, найдём матрицу  $\mathbf{E}'_2(\sigma_0, \varphi)$ , связывающую вектор Стокса и вектор когерентности

$$\mathbf{V}_{\mathbf{IE}'_2} = \begin{pmatrix} I_{E'_2 r E'_2 r} \\ I_{E'_2 r E'_2 l} \\ I_{E'_2 l E'_2 r} \\ I_{E'_2 l E'_2 l} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}'_2(\sigma_0, \varphi) \mathbf{V}_{\mathbf{IE}'_2}, \quad \mathbf{V}_{\mathbf{IE}'_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}'_2(\sigma_0, \varphi))^+ \mathbf{S}, \quad (178)$$

вычисляя матричное произведение  $\mathbf{D}(\mathbf{K}_{\mathbf{E}'_2 \mathbf{D}}(\sigma_0, \varphi))^+$ . Пользуясь (32) и (157) получим

$$\mathbf{E}'_2(\sigma_0, \varphi) = \mathbf{D}(\mathbf{K}_{\mathbf{E}'_2 \mathbf{D}}(\sigma_0, \varphi))^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi & \cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi \\ -\cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi & \cos 2\varphi + i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi & \cos 2\varphi - i \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi & \cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi \\ \sin 2\sigma_0 & i \cos 2\sigma_0 & -i \cos 2\sigma_0 & -\sin 2\sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (179)$$

Если положить в (179)  $\sigma_0 = \pi/4$ , то, поскольку при этом базис  $\mathbf{E}'_2$  превращается в базис  $\mathbf{C}'_3$ , матрица  $\mathbf{E}'_2(\sigma_0, \varphi)$  превращается в

$$\mathbf{C}'_3(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & ie^{i2\varphi} & -ie^{-i2\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i2\varphi} & e^{-i2\varphi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (180)$$

которая просто равна  $\mathbf{C}'_2(\varphi)$  (173), поскольку  $\mathbf{K}_{\mathbf{C}'_3 \mathbf{D}}(\varphi) = \mathbf{K}_{\mathbf{C}'_2 \mathbf{D}}(\varphi)$  (см. (159)).

Полагая в (179)  $\varphi=0$ , получим матрицу

$$\mathbf{E}_2(\sigma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\cos 2\sigma_0 & i \sin 2\sigma_0 & -i \sin 2\sigma_0 & \cos 2\sigma_0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \sin 2\sigma_0 & i \cos 2\sigma_0 & -i \cos 2\sigma_0 & -\sin 2\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad (181)$$

с помощью которой можно получить связь между вектором Стокса и вектором когерентности в базисе  $E_2$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_2(\sigma_0) \mathbf{V}_{IE_2}, \quad \mathbf{V}_{IE_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}_2(\sigma_0))^+ \mathbf{S}. \quad (182)$$

Пользуясь полученными в данном разделе соотношениями между векторами когерентности в круговых базисах и вектором Стокса, сведем их для удобства дальнейшего использования в таблицу 5 в развернутом виде.

Таблица 5.

Базис	Векторы Джонса ортов данного кругового базиса, выраженные в декартовом базисе D	Элементы матрицы (вектора) временной или пространственной когерентности	Соответствующие им комбинации параметров Стокса или их видностей
C	$\mathbf{e}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	$I_{rr}$	$\frac{1}{2}(I+V)$
		$I_{rl}$	$\frac{1}{2}(Q+iU)$
		$I_{lr}$	$\frac{1}{2}(Q-iU)$
		$I_{ll}$	$\frac{1}{2}(I-V)$
C'	$\mathbf{e}_{r'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ -ie^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_{l'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \\ ie^{-i\varphi} \end{pmatrix}$	$I_{r'r'}$	$\frac{1}{2}(I+V)$
		$I_{r'l'}$	$\frac{1}{2}e^{-i2\varphi}(Q+iU)$

		$I_{l'r'}$	$\frac{1}{2}e^{i2\varphi}(Q-iU)$
		$I_{l'l'}$	$\frac{1}{2}(I-V)$
$C_2$	$\mathbf{e}_{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{l_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$	$I_{r_2r_2}$	$\frac{1}{2}(I+V)$
		$I_{r_2l_2}$	$\frac{1}{2}(-iQ+U)$
		$I_{l_2r_2}$	$\frac{1}{2}(iQ+U)$
		$I_{l_2l_2}$	$\frac{1}{2}(I-V)$
$C'_2$	$\mathbf{e}_{r'_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ -ie^{i\varphi} \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{l'_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -ie^{-i\varphi} \\ e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$	$I_{r'_2r'_2}$	$\frac{1}{2}(I+V)$
		$I_{r'_2l'_2}$	$\frac{1}{2}e^{-i2\varphi}(-iQ+U)$
		$I_{l'_2r'_2}$	$\frac{1}{2}e^{i2\varphi}(iQ+U)$
		$I_{l'_2l'_2}$	$\frac{1}{2}(I-V)$
$C_3$	$\mathbf{e}_{r_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{l_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$	$I_{r_3r_3}$	$\frac{1}{2}(I+V)$
		$I_{r_3l_3}$	$\frac{1}{2}(-iQ+U)$
		$I_{l_3r_3}$	$\frac{1}{2}(iQ+U)$
		$I_{l_3l_3}$	$\frac{1}{2}(I-V)$

$C'_3$	$\mathbf{e}_{r'_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} ie^{i\varphi} \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{l'_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \\ ie^{-i\varphi} \end{pmatrix}$	$I_{r'_3 r'_3}$	$\frac{1}{2}(I+V)$
		$I_{r'_3 l'_3}$	$\frac{1}{2}e^{-i2\varphi}(-iQ+U)$
		$I_{l'_3 r'_3}$	$\frac{1}{2}e^{i2\varphi}(iQ+U)$
		$I_{l'_3 l'_3}$	$\frac{1}{2}(I-V)$

Завершая данный раздел, отметим, что первые строки всех матриц, связывающих вектор Стокса с вектором когерентности в том или ином унитарном (в частности, ортогональном) базисе, одинаковы и интенсивность всегда равна  $I = I_{B_1 B_1} + I_{B_2 B_2}$ , что и следовало ожидать. Сопоставляя матрицы  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$ ,  $\mathbf{E}(\sigma_0)$  и  $\mathbf{E}_2(\sigma_0)$ , видим, что выражение для параметра Стокса  $U = I_{B_1 B_2} + I_{B_2 B_1}$  одинаково во всех пяти базисах  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{C}_3$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_2$ . Учитывая (29) и (148), можно записать все рассмотренные в этом разделе соотношения между вектором Стокса  $\mathbf{S}$  в декартовом базисе  $\mathbf{D}$  и вектором когерентности  $\mathbf{V}_{\text{IB}}$  в базисе  $\mathbf{B}$  в следующем общем виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}\mathbf{K}_{\text{BD}}^+ \mathbf{V}_{\text{IB}} = \mathbf{B}\mathbf{V}_{\text{IB}}, \quad (183)$$

где  $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{K}_{\text{BD}}^+$  - любая из матриц, вычисленных в данном разделе (например, это может быть матрица  $\mathbf{C}$ , соответствующая круговому базису  $\mathbf{C}$ ). Матрица  $\mathbf{B}$ , соответствующая унитарному базису  $\mathbf{B}$ , унитарна с точностью до коэффициента ( $\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{2}\mathbf{B}^+$ ), как и матрица  $\mathbf{D}$ .

**9. Степень поляризации и позиционный угол большой оси эллипса поляризации, выраженные через элементы матрицы когерентности в линейных ( $D, D'$ ), круговых ( $C, C', C_2, C'_2, C_3, C'_3$ ) и эллиптических ( $E, E', E_2, E'_2$ ) базисах**

Выведем в первую очередь формулу для степени поляризации через компоненты вектора когерентности в базисах  $C$  и  $C'$ . Используя (12), (163), (164) (167) и (168) нетрудно получить искомую формулу<sup>59</sup>

$$P_E = \frac{\sqrt{(I_{rr} - I_{ll})^2 + 4I_{rl}I_{lr}}}{I_{rr} + I_{ll}} = \frac{\sqrt{(I_{r'r'} - I_{l'l'})^2 + 4I_{r'l'}I_{l'r'}}}{I_{r'r'} + I_{l'l'}}. \quad (184)$$

Из (184) можно получить формулу для степени линейной поляризации частично линейно-поляризованного излучения, полагая  $I_{rr} = I_{ll} = I_{r'r'} = I_{l'l'}$

$$P_L = \frac{2|I_{rl}|}{I_{rr} + I_{ll}} = \frac{|I_{rl}|}{I/2} \quad (185)$$

и для степени круговой поляризации частично циркулярно-поляризованного излучения, имея ввиду, что для него  $I_{rl} = I_{lr} = I_{r'l'} = I_{l'r'} = 0$

$$P_C = \frac{|I_{rr} - I_{ll}|}{I_{rr} + I_{ll}} = \frac{|I_{rr} - I_{ll}|}{I}. \quad (186)$$

Формулу (185) можно получить и из формулы  $P_L = \sqrt{Q^2 + U^2} / I$ , используя (163), (164), (167), (168), а формулу (186) - из формулы  $P_C = |V| / I$  и, также, с использованием (163), (164), (167), (168), без сделанных выше предположений о том, что в первом случае мы имеем дело с частично линейно-поляризованным излучением, а во втором - с

<sup>59</sup> Формулу (184) можно получить и из (40), имея ввиду, что детерминант и след матрицы когерентности сохраняются при унитарном преобразовании (в данном случае при переходе от декартового базиса  $D$  к круговому базису  $C$  или  $C'$ ).

частично-циркулярным, то есть, для общего случая частично эллиптически-поляризованного излучения.

Из (185) видно, что степень линейной поляризации частично линейно-поляризованного излучения равна коэффициенту корреляции циркулярных компонент принимаемого излучения, а из (186) следует, что степень круговой поляризации равна модулю относительной разницы интенсивностей циркулярных компонент. Легко видеть из (184), (185) и (186), что  $P_E^2 = P_L^2 + P_C^2$  (см. сноску <sup>12</sup> в [60]). Используя (14), (173), (174), (175), (178) и (180), можно показать, что формулы (185) для степени линейной поляризации и (186) для степени круговой поляризации сохраняются и при использовании элементов вектора когерентности в базисах  $C'_2$ ,  $C_2$ ,  $C'_3$  и  $C_3$ , что и следовало ожидать.

Из (12), (167) и (168) получим формулу для позиционного угла большой оси эллипса поляризации в базисе  $C'$

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{(\sin 2\varphi) \operatorname{Re} I_{r'l'} + (\cos 2\varphi) \operatorname{Im} I_{r'l'}}{(\cos 2\varphi) \operatorname{Re} I_{r'l'} - (\sin 2\varphi) \operatorname{Im} I_{r'l'}}. \quad (187)$$

В частном случае  $\varphi = 0$  (базис  $C$ ) получим из (187) или из (12) и (162)

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{\operatorname{Im} I_{rl}}{\operatorname{Re} I_{rl}}. \quad (188)$$

Получим теперь выражения для степени линейной поляризации, позиционного угла большой оси эллипса поляризации и степени круговой поляризации через компоненты матрицы (вектора) когерентности в базисе  $E'$ . Пользуясь формулами (12), (14), (169) и (170) найдём, что

$$P_L = \frac{\sqrt{(\cos 2\sigma_0 (I_{E'rE'r} - I_{E'lE'l}) - 2 \sin 2\sigma_0 \operatorname{Im} I_{E'rE'l})^2 + (2 \operatorname{Re} I_{E'rE'l})^2}}{I_{E'rE'r} + I_{E'lE'l}}, \quad (189)$$

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{\cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi (I_{E'rE'r} - I_{E'lE'l}) + 2(\cos 2\varphi \operatorname{Re} I_{E'rE'l} - \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi \operatorname{Im} I_{E'rE'l})}{\cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi (I_{E'rE'r} - I_{E'lE'l}) - 2(\sin 2\varphi \operatorname{Re} I_{E'rE'l} + \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi \operatorname{Im} I_{E'rE'l})}, \quad (190)$$

$$P_C = \frac{|\sin 2\sigma_0 (I_{E'rE'r} - I_{E'lE'l}) + 2 \cos 2\sigma_0 \operatorname{Im} I_{E'rE'l}|}{I_{E'rE'r} + I_{E'lE'l}}. \quad (191)$$

Из (189), (190) и (191) можно получить выражения для степени линейной поляризации, позиционного угла большой оси эллипса поляризации и степени круговой поляризации через компоненты матрицы (вектора) когерентности в базисах  $E$ ,  $C'_2$ ,  $C_2$ ,  $D'$  и  $D$ .

Полагая  $\varphi=0$ , получим формулы, связывающие степень линейной поляризации, позиционный угол большой оси эллипса поляризации и степень круговой поляризации с элементами матрицы (вектора) когерентности в базисе  $E$

$$P_L = \frac{\sqrt{(\cos 2\sigma_0 (I_{ErEr} - I_{ElEl}) - 2 \sin 2\sigma_0 \operatorname{Im} I_{ErEl})^2 + (2 \operatorname{Re} I_{ErEl})^2}}{I_{ErEr} + I_{ElEl}}, \quad (192)$$

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{2 \operatorname{Re} I_{ErEl}}{\cos 2\sigma_0 (I_{ErEr} - I_{ElEl}) - 2 \sin 2\sigma_0 \operatorname{Im} I_{ErEl}}, \quad (193)$$

$$P_C = \frac{|\sin 2\sigma_0 (I_{ErEr} - I_{ElEl}) + 2 \cos 2\sigma_0 \operatorname{Im} I_{ErEl}|}{I_{ErEr} + I_{ElEl}}. \quad (194)$$

Подставляя в (189), (190) и (191)  $\sigma_0 = \pi/4$  получим соответствующие формулы для базиса  $C'_2$  (как уже отмечалось выше, формулы для степени линейной и круговой поляризации те же самые, что и для базиса  $C'$  или  $C$  (185) и (186))

$$P_L = \frac{2 |I_{r_2' l_2'}|}{I_{r_2' r_2'} + I_{l_2' l_2'}}, \quad (195)$$



$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{-\cos 2\varphi \operatorname{Re} I_{r_2'l_2} + \sin 2\varphi \operatorname{Im} I_{r_2'l_2}}{\sin 2\varphi \operatorname{Re} I_{r_2'l_2} + \cos 2\varphi \operatorname{Im} I_{r_2'l_2}}, \quad (196)$$

$$P_C = \frac{\left| I_{r_2'r_2} - I_{l_2'l_2} \right|}{I_{r_2'r_2} + I_{l_2'l_2}}. \quad (197)$$

В базисе  $C_2$  ( $\varphi=0$ ) вместо (195), (196) и (197) получим

$$P_L = \frac{2\left| I_{r_2'l_2} \right|}{I_{r_2'r_2} + I_{l_2'l_2}}, \quad \operatorname{tg} 2\chi = -\frac{\operatorname{Re} I_{r_2'l_2}}{\operatorname{Im} I_{r_2'l_2}}, \quad P_C = \frac{\left| I_{r_2'r_2} - I_{l_2'l_2} \right|}{I_{r_2'r_2} + I_{l_2'l_2}}. \quad (198)$$

Подставляя в (189), (190) и (191)  $\sigma_0=0$  получим искомые формулы для декартового базиса  $D'$

$$P_L = \frac{\sqrt{\left( I_{x'x'} - I_{y'y'} \right)^2 + \left( 2 \operatorname{Re} I_{x'y'} \right)^2}}{I_{x'x'} + I_{y'y'}}, \quad (199)$$

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{\sin 2\varphi \left( I_{x'x'} - I_{y'y'} \right) + 2 \cos 2\varphi \operatorname{Re} I_{x'y'}}{\cos 2\varphi \left( I_{x'x'} - I_{y'y'} \right) - 2 \sin 2\varphi \operatorname{Re} I_{x'y'}}, \quad (200)$$

$$P_C = \frac{2\left| \operatorname{Im} I_{x'y'} \right|}{I_{x'x'} + I_{y'y'}}. \quad (201)$$

И, наконец, для декартового базиса  $D$  имеем из (199), (200) и (201) при  $\varphi=0$  следующие простые соотношения

$$P_L = \frac{\sqrt{\left( I_{xx} - I_{yy} \right)^2 + \left( 2 \operatorname{Re} I_{xy} \right)^2}}{I_{xx} + I_{yy}}, \quad \operatorname{tg} 2\chi = \frac{2 \operatorname{Re} I_{xy}}{I_{xx} - I_{yy}}, \quad P_C = \frac{2\left| \operatorname{Im} I_{xy} \right|}{I_{xx} + I_{yy}}. \quad (202)$$

Найдём ещё выражения для степени линейной поляризации, позиционного угла большой оси эллипса поляризации и степени круговой поляризации через компоненты матрицы (вектора) когерентности в ба-

зисах  $E'_2$ ,  $E_2$ ,  $C'_3$  и  $C_3$ . Пользуясь формулами (12), (14), (178) и (179) найдём, что

$$P_L = \frac{\sqrt{\left(\cos 2\sigma_0 \left(I_{E'_2 r E'_2 r} - I_{E'_2 l E'_2 l}\right) + 2 \sin 2\sigma_0 \operatorname{Im} I_{E'_2 r E'_2 l}\right)^2 + \left(2 \operatorname{Re} I_{E'_2 r E'_2 l}\right)^2}}{I_{E'_2 r E'_2 r} + I_{E'_2 l E'_2 l}}, \quad (203)$$

$$\operatorname{tg} 2\chi = \frac{\cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi \left(I_{E'_2 r E'_2 r} - I_{E'_2 l E'_2 l}\right) - 2 \left(\cos 2\varphi \operatorname{Re} I_{E'_2 r E'_2 l} - \sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi \operatorname{Im} I_{E'_2 r E'_2 l}\right)}{\cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi \left(I_{E'_2 r E'_2 r} - I_{E'_2 l E'_2 l}\right) + 2 \left(\sin 2\varphi \operatorname{Re} I_{E'_2 r E'_2 l} + \sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi \operatorname{Im} I_{E'_2 r E'_2 l}\right)}, \quad (204)$$

$$P_C = \frac{\left| \sin 2\sigma_0 \left(I_{E'_2 r E'_2 r} - I_{E'_2 l E'_2 l}\right) - 2 \cos 2\sigma_0 \operatorname{Im} I_{E'_2 r E'_2 l} \right|}{I_{E'_2 r E'_2 r} + I_{E'_2 l E'_2 l}}. \quad (205)$$

Полагая в (203), (204) и (205)  $\varphi=0$ , получим формулы, связывающие степень линейной поляризации, позиционный угол большой оси эллипса поляризации и степень круговой поляризации с элементами матрицы (вектора) когерентности в базисе  $E_2$

$$P_L = \frac{\sqrt{\left(\cos 2\sigma_0 \left(I_{E_2 r E_2 r} - I_{E_2 l E_2 l}\right) + 2 \sin 2\sigma_0 \operatorname{Im} I_{E_2 r E_2 l}\right)^2 + \left(2 \operatorname{Re} I_{E_2 r E_2 l}\right)^2}}{I_{E_2 r E_2 r} + I_{E_2 l E_2 l}}, \quad (206)$$

$$\operatorname{tg} 2\chi = -\frac{2 \operatorname{Re} I_{E_2 r E_2 l}}{\cos 2\sigma_0 \left(I_{E_2 r E_2 r} - I_{E_2 l E_2 l}\right) + 2 \sin 2\sigma_0 \operatorname{Im} I_{E_2 r E_2 l}}, \quad (207)$$

$$P_C = \frac{\left| \sin 2\sigma_0 \left(I_{E_2 r E_2 r} - I_{E_2 l E_2 l}\right) - 2 \cos 2\sigma_0 \operatorname{Im} I_{E_2 r E_2 l} \right|}{I_{E_2 r E_2 r} + I_{E_2 l E_2 l}}. \quad (208)$$

Наконец, подставляя в (203), (204) и (205)  $\sigma_0 = \pi/4$  (при этом базис  $E'_2$  превращается в базис  $C'_3$ ) получим формулы для  $P_L$ ,  $\operatorname{tg} 2\chi$  и

$P_C$  в базисе  $C'_3$ , совпадающие с формулами (195), (196) и (197) для базиса  $C'_2$ . Последнее обстоятельство формально следует из того, что матрица  $C'_3(\varphi)$  (180) совпадает с матрицей  $C'_2(\varphi)$  (173).

В заключение данного раздела заметим, что при вычислении позиционного угла большой оси эллипса поляризации (или позиционного угла плоскости поляризации в случае частично линейно-поляризованного излучения) из формул (187), (188), (190), (193), (196), (198), (200), (202), (204) и (207) следует пользоваться формулой

$$\chi = \frac{1}{2} \text{angle}(\text{denom}, \text{num}), \quad (209)$$

где  $\text{denom}$  – знаменатель, а  $\text{num}$  – числитель перечисленных выше формул (см. в связи с этим раздел 3 в [60]).

## 10. Параметры Стокса в круговых и эллиптических базисах

Параметры Стокса были определены выше в декартовом базисе D (см. (11) и (28)). Рассмотрим теперь обобщённые параметры Стокса, то есть в произвольном унитарном базисе. В [60] отмечалось (сноска 18), что матрица  $\mathbf{D}$  (см. (32)) связывает обобщённые вектор Стокса

$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix}$  и вектор когерентности  $\mathbf{V}_{IB}$  в любом унитарном (в частности ортогональном) базисе B

$$\mathbf{S}_B = \mathbf{D}\mathbf{V}_{IB}. \quad (210)$$

Вектор когерентности  $\mathbf{V}_{IB}$  в базисе B можно выразить из (183) через вектор Стокса в декартовом базисе D следующим образом

$$\mathbf{V}_{IB} = \frac{1}{2}\mathbf{B}^+\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{K}_{BD}\mathbf{D}^+\mathbf{S}, \quad (211)$$

где

$$\mathbf{K}_{BD} = (\mathbf{T}_{BD} \otimes \mathbf{T}_{BD}^*). \quad (212)$$

Подставляя (211) в (210) и учитывая (212), получим

$$\mathbf{S}_B = \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{B}^+ \mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{K}_{BD} \mathbf{D}^+ \mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{D} (\mathbf{T}_{BD} \otimes \mathbf{T}_{BD}^*) \mathbf{D}^+ \mathbf{S} = \mathbf{M}_{BD} \mathbf{S}. \quad (213)$$

Пользуясь (32), (213) и матрицами  $\mathbf{T}_{BD}$  из таблицы 3 или используя уже вычисленные в разделе 7 матрицы  $\mathbf{K}_{BD}$  или, что ещё проще, матрицы  $\mathbf{B}$  из раздела 8, вычислим матрицы

$$\mathbf{M}_{BD} = \frac{1}{2} \mathbf{D} (\mathbf{T}_{BD} \otimes \mathbf{T}_{BD}^*) \mathbf{D}^+ = \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{K}_{BD} \mathbf{D}^+ = \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{B}^+, \quad (214)^{60}$$

связывающие компоненты  $S_1, S_2, S_3, S_4$  обобщённого вектора Стокса с параметрами Стокса  $I, Q, U, V$  для всех унитарных базисов  $B$ , рассмотренных выше. В частности, если  $\mathbf{B} = \mathbf{D}'(\varphi)$  (см. (172)), то  $\mathbf{M}_{BD} = \mathbf{M}_{D'D} = \mathbf{M}_R(\varphi)$ , то есть, получаем уже знакомую матрицу ротатора вектора Стокса (64). Результаты вычислений для удобства сведены в таблицу 6.

Таблица 6

Базис	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$
D	$I$	$Q$	$U$	$V$
D'	$I$	$(\cos 2\varphi)Q + (\sin 2\varphi)U$	$-(\sin 2\varphi)Q + (\cos 2\varphi)U$	$V$
C	$I$	$V$	$Q$	$U$
C'	$I$	$V$	$(\cos 2\varphi)Q + (\sin 2\varphi)U$	$-(\sin 2\varphi)Q + (\cos 2\varphi)U$

<sup>60</sup> Здесь уместно напомнить, что матрица  $\mathbf{B}$  связывает вектор когерентности в базисе  $B$  с вектором Стокса в декартовом базисе  $D$  (см. (183)). Выше мы не использовали подстрочные индексы для этой матрицы, но если это делать, то  $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}_{DB}$ .

$C_2$	$I$	$V$	$U$	$-Q$
$C'_2$	$I$	$V$	$-(\sin 2\varphi)Q + (\cos 2\varphi)U$	$-(\cos 2\varphi)Q - (\sin 2\varphi)U$
$C_3$	$I$	$V$	$U$	$-Q$
$C'_3$	$I$	$V$	$-(\sin 2\varphi)Q + (\cos 2\varphi)U$	$-(\cos 2\varphi)Q - (\sin 2\varphi)U$
$E$	$I$	$(\cos 2\sigma_0)Q + (\sin 2\sigma_0)V$	$U$	$-(\sin 2\sigma_0)Q + (\cos 2\sigma_0)V$
$E'$	$I$	$\cos 2\sigma_0 \cdot$ $\cdot ((\cos 2\varphi)Q + (\sin 2\varphi)U) +$ $+ (\sin 2\sigma_0)V$	$-(\sin 2\varphi)Q + (\cos 2\varphi)U$	$-\sin 2\sigma_0 \cdot$ $((\cos 2\varphi)Q + (\sin 2\varphi)U) +$ $+ (\cos 2\sigma_0)V$
$E_2$	$I$	$-(\cos 2\sigma_0)Q + (\sin 2\sigma_0)V$	$U$	$-(\sin 2\sigma_0)Q - (\cos 2\sigma_0)V$
$E'_2$	$I$	$-\cos 2\sigma_0 \cdot$ $\cdot ((\cos 2\varphi)Q + (\sin 2\varphi)U) +$ $+ (\sin 2\sigma_0)V$	$-(\sin 2\varphi)Q + (\cos 2\varphi)U$	$-\sin 2\sigma_0 \cdot$ $((\cos 2\varphi)Q + (\sin 2\varphi)U) -$ $-(\cos 2\sigma_0)V$

Пользуясь табл.6 легко выписать матрицу  $\mathbf{M}_{BD}$  для того или иного базиса В. Например, выпишем матрицу  $\mathbf{M}_{ED}$ , описывающую преобразование вектора Стокса при переходе от декартового базиса D к эллиптическому базису  $E'$ . Искомая матрица равна

$$\mathbf{M}_{ED} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\sigma_0 \cos 2\varphi & \cos 2\sigma_0 \sin 2\varphi & \sin 2\sigma_0 \\ 0 & -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi & 0 \\ 0 & -\sin 2\sigma_0 \cos 2\varphi & -\sin 2\sigma_0 \sin 2\varphi & \cos 2\sigma_0 \end{pmatrix}. \quad (215)$$

В частности, при  $\sigma_0 = 0$ , когда базис  $E'$  превращается в базис  $D'$ , матрица (215) превращается в матрицу ротатора (64).

Пользуясь (210) и (32) можно обобщить на любой унитарный базис  $B$  разложение (36) матрицы когерентности по матрицам Паули

$$\mathbf{I}_B = \begin{pmatrix} I_{B_1 B_1} & I_{B_1 B_2} \\ I_{B_2 B_1} & I_{B_2 B_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \mathcal{S}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{S}_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \mathcal{S}_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{S}_4 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (216)$$

Выражение (214) для  $M$ -матрицы перехода от декартового базиса к любому унитарному базису можно обобщить на случай перехода от одного унитарного (ортогонального) базиса  $B_2$  к другому  $B_1$

$$\mathbf{M}_{B_1 B_2} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \mathbf{K}_{B_1 B_2} \mathbf{D}^+, \quad \mathbf{S}_{B_1} = \mathbf{M}_{B_1 B_2} \mathbf{S}_{B_2}. \quad (217)$$

## 11. Преобразование матрицы Джонса, $K$ - матрицы и матрицы Мюллера при переходе от одного базиса к другому

С целью получения соотношений преобразования воспользуемся выражениями  $\mathbf{E}_{B_2 \text{out}} = \mathbf{J}_{B_2} \mathbf{E}_{B_2 \text{in}}$ ,  $\mathbf{V}_{IB_2 \text{out}} = \mathbf{K}_{B_2} \mathbf{V}_{IB_2 \text{in}}$  и  $\mathbf{S}_{B_2 \text{out}} = \mathbf{M}_{B_2} \mathbf{S}_{B_2 \text{in}}$ , связывающими, соответственно, векторы Джонса  $\mathbf{E}_{B_2 \text{out}}$ , когерентности  $\mathbf{V}_{IB_2 \text{out}}$  и Стокса  $\mathbf{S}_{B_2 \text{out}}$  на выходе некоторого устройства или среды с их значениями  $\mathbf{E}_{B_2 \text{in}}$ ,  $\mathbf{V}_{IB_2 \text{in}}$  и  $\mathbf{S}_{B_2 \text{in}}$  на входе, в некотором унитарном базисе  $B_2$ .<sup>61</sup> Умножая эти равенства слева, соответственно, на  $\mathbf{T}_{B_1 B_2}$ ,  $\mathbf{K}_{B_1 B_2}$  и  $\mathbf{M}_{B_1 B_2}$ , используя тождества  $\mathbf{T}_{B_1 B_2}^{-1} \mathbf{T}_{B_1 B_2} = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{K}_{B_1 B_2}^{-1} \mathbf{K}_{B_1 B_2} = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{M}_{B_1 B_2}^{-1} \mathbf{M}_{B_1 B_2} = \mathbf{1}$  и свойство ассоциативности произведения нескольких матриц, получим следующие правила преобразования матрицы Джонса,  $K$  - матрицы и матрицы Мюллера при переходе от одного унитарного базиса  $B_2$  к другому  $B_1$

<sup>61</sup> См. выражения (53), (55) и (65).

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{B_1} &= \mathbf{T}_{B_1 B_2} \mathbf{J}_{B_2} \mathbf{T}_{B_1 B_2}^+, \\
\mathbf{K}_{B_1} &= \mathbf{K}_{B_1 B_2} \mathbf{K}_{B_2} \mathbf{K}_{B_1 B_2}^+, \\
\mathbf{M}_{B_1} &= \mathbf{M}_{B_1 B_2} \mathbf{M}_{B_2} \mathbf{M}_{B_1 B_2}^+.
\end{aligned}
\tag{218}$$

В частном случае, когда  $B_2$  есть декартовый базис  $D$ , а базис  $B_1$  есть повернутый на угол  $\varphi$  декартовый базис  $D'$  имеем соотношения<sup>62</sup>

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{D'} &= \mathbf{T}_R(\varphi) \mathbf{J}_D \mathbf{T}_R(-\varphi), \\
\mathbf{K}_{D'} &= \mathbf{K}_R(\varphi) \mathbf{K}_D \mathbf{K}_R(-\varphi), \\
\mathbf{M}_{D'} &= \mathbf{M}_R(\varphi) \mathbf{M}_D \mathbf{M}_R(-\varphi).
\end{aligned}
\tag{219}$$

Если переход осуществляется от одного произвольного базиса  $G_2$  к другому произвольному  $G_1$ , то вместо (218) имеем<sup>63</sup>

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{G_1} &= \mathbf{T}_{G_1 G_2} \mathbf{J}_{G_2} \mathbf{T}_{G_1 G_2}^{-1}, \\
\mathbf{K}_{G_1} &= \mathbf{K}_{G_1 G_2} \mathbf{K}_{G_2} \mathbf{K}_{G_1 G_2}^{-1}, \\
\mathbf{M}_{G_1} &= \mathbf{M}_{G_1 G_2} \mathbf{M}_{G_2} \mathbf{M}_{G_1 G_2}^{-1}.
\end{aligned}
\tag{220}$$

## 12. Интерферометрия на антеннах с круговой поляризацией

В измерениях линейной поляризации диффузного радиоизлучения Галактики, радиоизлучения разнообразных космических источников [60], проводимых как с помощью одиночных радиотелескопов, так и интерферометров, широко используется корреляционный метод с использованием круговых поляризаций (см., например, [61-65], [7], [45]). Как уже отмечалось выше, на практике разделитель ортогональных (круговых) поляризаций (РОП) может оказаться несовершенным и вместо “чистых” и ортогональных круговых поляризаций на его выходах в общем случае имеются сигналы, соответствующие двум эллиптическим поляризациям с неперпендикулярными большими осями эллипсов. Рас-

<sup>62</sup> См., также, (62) и (67).

<sup>63</sup> См., также, (143).

смотрим задачу корреляционных поляризационных измерений именно в этой общей постановке. Переход к идеально круговым поляризациям легко осуществляется из общих выражений, которые будут получены ниже.

Пусть интерферометр состоит из двух антенн с вектором положения первой из них  $\vec{r}_1$ , второй  $\vec{r}_2$ . Предположим, что РОП первой антенны осуществляет преобразование декартовых компонент вектора Джонса на его входе в компоненты вектора Джонса в обобщённом базисе  $G_1$ , образованном поляризационными состояниями в виде эллиптической поляризации  $E_{1,r}$  с эллиптичностью  $\sigma_{1,r}$  и позиционным углом большой оси  $\chi_{1,r}$  и эллиптической поляризации  $E_{1,l}$  с эллиптичностью  $\sigma_{1,l}$  и позиционным углом  $\chi_{1,l}$ . РОП второй антенны осуществляет преобразование декартовых компонент вектора Джонса на его входе в компоненты вектора Джонса в обобщённом базисе  $G_2$ , образованном поляризационными состояниями в виде эллиптической поляризации  $E_{2,r}$  с эллиптичностью  $\sigma_{2,r}$  и позиционным углом  $\chi_{2,r}$  и эллиптической поляризации  $E_{2,l}$  с эллиптичностью  $\sigma_{2,l}$  и позиционным углом  $\chi_{2,l}$ . Индексы  $r$  и  $l$  указывают здесь на то, что на практике рассматриваемые эллипсы близки, соответственно, к правым или левым окружностям, хотя мы это и не будем использовать в дальнейших выкладках и полученные выражения будут применимы для произвольных параметров эллипсов. Все позиционные углы ( $\chi_{1,r}, \chi_{1,l}, \chi_{2,r}, \chi_{2,l}$ ) отсчитываются, как обычно, от оси  $x$  против часовой стрелки, если смотреть в направлении на источник. Как и в [60], предполагается пространственная статистическая однородность электромагнитного поля источника, поэтому вектор когерентности зависит не отдельно от  $\vec{r}_1$  и от  $\vec{r}_2$ , а от разницы  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . В случае одиночного радиотелескопа в полученных формулах будем полагать  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$  и, следовательно,  $\sigma_{1,r} = \sigma_{2,r}$ ,  $\chi_{1,r} = \chi_{2,r}$ ,  $\sigma_{1,l} = \sigma_{2,l}$ ,  $\chi_{1,l} = \chi_{2,l}$ .



На  $i$ -ой приёмной антенне ( $i = 1, 2$ ) сигнал с выхода облучателя подаётся на входы РОП, а с его выходов поступает на соответствующие приёмные устройства, с выхода одного из которых  $V_{ir}$  или  $V_{il}$  подаётся на вход коррелятора (рис.8). На выходе коррелятора можно последовательно получить 4 вида сигнала, из которых составим вектор когерентности

$$\mathbf{V}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \overline{V_{1r}V_{2r}^*} \\ \overline{V_{1r}V_{2l}^*} \\ \overline{V_{1l}V_{2r}^*} \\ \overline{V_{1l}V_{2l}^*} \end{pmatrix} \text{ интерферометрического отклика (можно, в}$$

принципе, одновременно использовать 4 коррелятора). Наша задача в этом разделе выразить вектор  $\mathbf{V}_{\text{out}}$  через вектор  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{Ант}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  видностей параметров Стокса на выходах антенн (облучателей) или входах РОП и параметры поляризационных базисов  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$ .<sup>64</sup> С этой целью обозначим через  $E_{1X_r}, E_{1Y_r}, E_{1X_l}, E_{1Y_l}$  комплексные амплитуды проекций электрического вектора на входе РОП 1-го радиотелескопа на оси эллипсов  $\mathbf{E}_{1r}, \mathbf{E}_{1l}$  и через  $E_{2X_r}, E_{2Y_r}, E_{2X_l}, E_{2Y_l}$  комплексные амплитуды проекций электрического вектора на входе РОП 2-го радиотелескопа на оси эллипсов  $\mathbf{E}_{2r}, \mathbf{E}_{2l}$ . Выходные сигналы приёмников (входные сигналы коррелятора), соответствующие поляризациям  $\mathbf{E}_{1r}, \mathbf{E}_{1l}, \mathbf{E}_{2r}, \mathbf{E}_{2l}$  равны

$$\begin{aligned} V_{1r} &= g_{1r}(E_{1X_r} \cos \sigma_{1r} - iE_{1Y_r} \sin \sigma_{1r}), \\ V_{1l} &= g_{1l}(E_{1X_l} \cos \sigma_{1l} - iE_{1Y_l} \sin \sigma_{1l}), \\ V_{2r} &= g_{2r}(E_{2X_r} \cos \sigma_{2r} - iE_{2Y_r} \sin \sigma_{2r}), \\ V_{2l} &= g_{2l}(E_{2X_l} \cos \sigma_{2l} - iE_{2Y_l} \sin \sigma_{2l}), \end{aligned} \quad (221)$$

<sup>64</sup> Уместно напомнить, что видности параметров Стокса комплексные величины, в отличие от самих параметров Стокса, являющихся действительными величинами.

где  $g_{1r}, g_{1l}, g_{2r}, g_{2l}$  комплексные коэффициенты передачи приёмных каналов первого и второго радиотелескопов, соответствующих поляризациям  $\mathbf{E}_{1r}, \mathbf{E}_{1l}, \mathbf{E}_{2r}, \mathbf{E}_{2l}$  (рис.8).

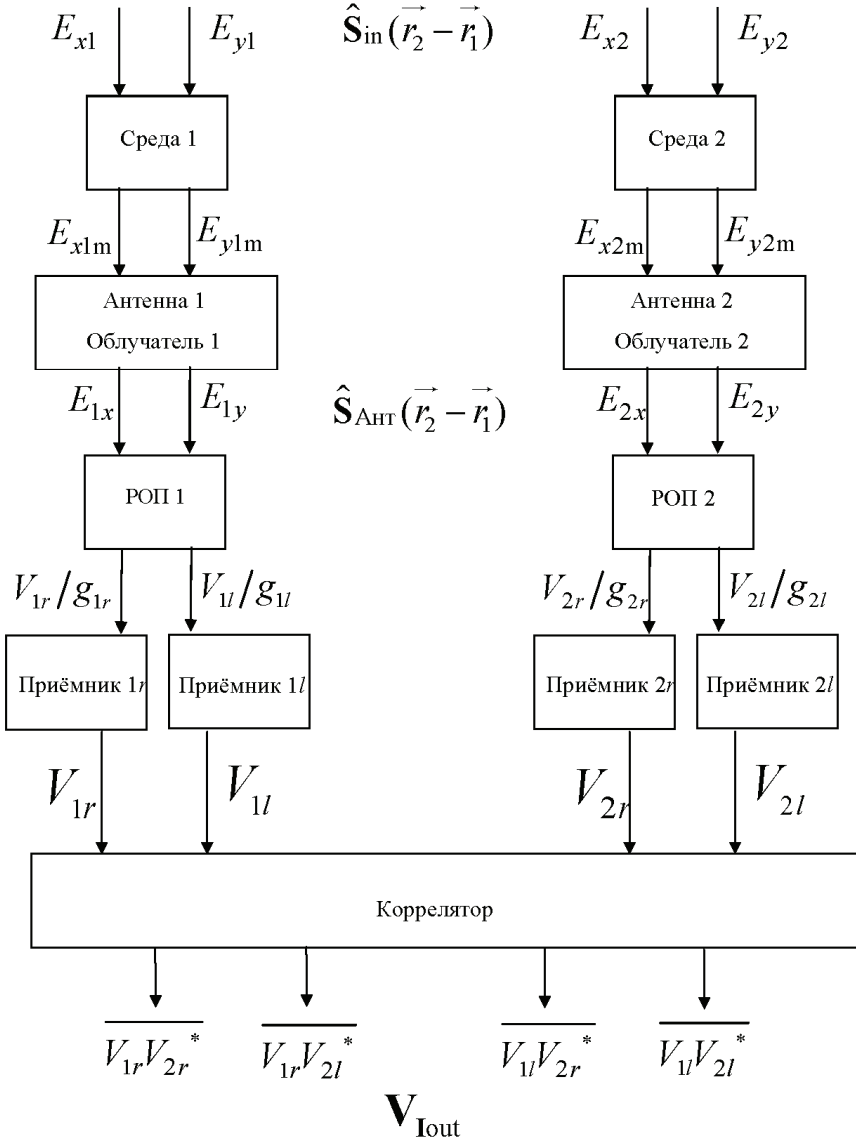


Рис.8. Блок-схема корреляционного интерферометра на круговых поляризациях

Выражая  $E_{1X_r}, E_{1Y_r}, E_{1X_l}, E_{1Y_l}, E_{2X_r}, E_{2Y_r}, E_{2X_l}, E_{2Y_l}$  в (221) через комплексные амплитуды  $E_{1x}, E_{1y}, E_{2x}, E_{2y}$  проекций по осям  $x, y$  вектора электрического поля принимаемой волны на входах РОП или выходах антенн (облучателей), составляющих корреляционный интерферометр (см. (38)),

$$\begin{aligned}
 E_{1X_r} &= E_{1x} \cos \chi_{1r} + E_{1y} \sin \chi_{1r}, & E_{1Y_r} &= -E_{1x} \sin \chi_{1r} + E_{1y} \cos \chi_{1r}, \\
 E_{1X_l} &= E_{1x} \cos \chi_{1l} + E_{1y} \sin \chi_{1l}, & E_{1Y_l} &= -E_{1x} \sin \chi_{1l} + E_{1y} \cos \chi_{1l}, \\
 E_{2X_r} &= E_{2x} \cos \chi_{2r} + E_{2y} \sin \chi_{2r}, & E_{2Y_r} &= -E_{2x} \sin \chi_{2r} + E_{2y} \cos \chi_{2r}, \\
 E_{2X_l} &= E_{2x} \cos \chi_{2l} + E_{2y} \sin \chi_{2l}, & E_{2Y_l} &= -E_{2x} \sin \chi_{2l} + E_{2y} \cos \chi_{2l}
 \end{aligned} \tag{222}$$

получим следующую связь между декартовым вектором Джонса сигнала на входах РОП  $i$ -ого радиотелескопа  $\begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix}$  и вектором Джонса  $\begin{pmatrix} V_{ir} \\ V_{il} \end{pmatrix}$ , составленным из сигналов на выходах приёмных каналов этого же  $i$ -ого радиотелескопа

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} V_{ir} \\ V_{il} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} g_{ir} & 0 \\ 0 & g_{il} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \sigma_{ir} \cos \chi_{ir} + i \sin \sigma_{ir} \sin \chi_{ir} & \cos \sigma_{ir} \sin \chi_{ir} - i \sin \sigma_{ir} \cos \chi_{ir} \\ \cos \sigma_{il} \cos \chi_{il} + i \sin \sigma_{il} \sin \chi_{il} & \cos \sigma_{il} \sin \chi_{il} - i \sin \sigma_{il} \cos \chi_{il} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix} = \\
 &= \mathbf{g}_i \mathbf{J}_{\text{РОП}_i}(\sigma_{ir}, \sigma_{il}, \chi_{ir}, \chi_{il}) \begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{223}^{65}$$

---

<sup>65</sup> Подставляя в (223)  $\chi_{ir} = \chi_{il} = \varphi$ ,  $\sigma_{ir} = -\pi/4$ ,  $\sigma_{il} = \pi/4$  получим матрицу  $\mathbf{T}_{\text{C}_D}(\varphi)$  в качестве второй матрицы в правой части (223), приняв  $\chi_{ir} = \varphi$ ,  $\chi_{il} = \varphi + \pi/2$ ,  $\sigma_{ir} = -\pi/4$ ,  $\sigma_{il} = \pi/4$  получим матрицу  $\mathbf{T}_{\text{C}_D}(\varphi)$ , если же принять  $\chi_{ir} = \varphi + \pi/2$ ,  $\chi_{il} = \varphi$ ,  $\sigma_{ir} = -\pi/4$ ,  $\sigma_{il} = \pi/4$ , то получим матрицу  $\mathbf{T}_{\text{C}_D}(\varphi)$ .

В (223)  $\mathbf{g}_i$  - матрица комплексных коэффициентов передачи  $r$  и  $l$  приёмных каналов  $i$ -ого радиотелескопа,  $\mathbf{J}_{\text{РОП}_i}$  - матрица Джонса РОП  $i$ -ого радиотелескопа (она же матрица  $\mathbf{T}_{G_i, D}$ , в общем случае неунитарная, перехода от декартового поляризационного базиса  $D$  к обобщённому базису  $G_i$ ).

Далее, используя связь между декартовыми векторами когерентности  $\mathbf{V}_{\text{IA}_1\text{A}_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  и видностей параметров Стокса  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{Ант}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  сигналов на выходах антенн (облучателей),

$$\mathbf{V}_{\text{IAнт}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{c}{4\pi} \overline{\begin{pmatrix} E_{1x} \\ E_{1y} \end{pmatrix}} \otimes \begin{pmatrix} E_{2x}^* \\ E_{2y}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{1x2x} \\ I_{1x2y} \\ I_{1y2x} \\ I_{1y2y} \end{pmatrix} = \mathbf{D}^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{\text{Ант}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad 66$$

можно получить из (223) искомое соотношение между вектором когерентности  $\mathbf{V}_{\text{Iout}}$ , составленным из интерферометрических сигналов на выходе коррелятора (корреляторов, в случае применения одновременно работающих 4-х корреляторов), и вектором  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{Ант}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\text{Iout}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \sigma_{1r}, \sigma_{1l}, \chi_{1r}, \chi_{1l}, \sigma_{2r}, \sigma_{2l}, \chi_{2r}, \chi_{2l}) &= \begin{pmatrix} V_{1r} \\ V_{1l} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} V_{2r}^* \\ V_{2l}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{V_{1r}V_{2r}^*} \\ \overline{V_{1r}V_{2l}^*} \\ \overline{V_{1l}V_{2r}^*} \\ \overline{V_{1l}V_{2l}^*} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{4\pi}{c} (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2^*) (\mathbf{J}_{\text{РОП}_1} \otimes \mathbf{J}_{\text{РОП}_2}^*) \mathbf{D}^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{\text{Ант}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \mathbf{G}^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{\text{Ант}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \end{aligned} \quad (224)$$

где

---

<sup>66</sup> См. вторую из формул (86).

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}^{-1}(\sigma_{1r}, \sigma_{1l}, \chi_{1r}, \chi_{1l}, \sigma_{2r}, \sigma_{2l}, \chi_{2r}, \chi_{2l}) &= \frac{4\pi}{c} \cdot \\
&\left( \begin{array}{l} \frac{g_{1r}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2r} - \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2r} - \chi_{1r}) - \\ -i \sin(\sigma_{2r} + \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2r} - \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1r}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2l} - \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2l} - \chi_{1r}) - \\ -i \sin(\sigma_{2l} + \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2l} - \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2r} - \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2r} - \chi_{1l}) - \\ -i \sin(\sigma_{2r} + \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2r} - \chi_{1l}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2l} - \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2l} - \chi_{1l}) - \\ -i \sin(\sigma_{2l} + \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2l} - \chi_{1l}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1r}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2r} + \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2r} + \chi_{1r}) - \\ -i \sin(\sigma_{2r} - \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2r} + \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1r}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2l} + \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2l} + \chi_{1r}) - \\ -i \sin(\sigma_{2l} - \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2l} + \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2r} + \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2r} + \chi_{1l}) - \\ -i \sin(\sigma_{2r} - \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2r} + \chi_{1l}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2l} + \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2l} + \chi_{1l}) - \\ -i \sin(\sigma_{2l} - \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2l} + \chi_{1l}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1r}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2r} + \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2r} + \chi_{1r}) + \\ +i \sin(\sigma_{2r} - \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2r} + \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1r}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2l} + \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2l} + \chi_{1r}) + \\ +i \sin(\sigma_{2l} - \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2l} + \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2r} + \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2r} + \chi_{1l}) + \\ +i \sin(\sigma_{2r} - \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2r} + \chi_{1l}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2l} + \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2l} + \chi_{1l}) + \\ +i \sin(\sigma_{2l} - \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2l} + \chi_{1l}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1r}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} -\sin(\sigma_{2r} + \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2r} - \chi_{1r}) + \\ +i \cos(\sigma_{2r} - \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2r} - \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1r}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} -\sin(\sigma_{2l} + \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2l} - \chi_{1r}) + \\ +i \cos(\sigma_{2l} - \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2l} - \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} -\sin(\sigma_{2r} + \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2r} - \chi_{1l}) + \\ +i \cos(\sigma_{2r} - \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2r} - \chi_{1l}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} -\sin(\sigma_{2l} + \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2l} - \chi_{1l}) + \\ +i \cos(\sigma_{2l} - \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2l} - \chi_{1l}) \end{array} \right) \end{array} \right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \left( \begin{array}{l} \frac{g_{1r}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2r} + \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2r} + \chi_{1r}) + \\ +i \sin(\sigma_{2r} - \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2r} + \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1r}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2l} + \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2l} + \chi_{1r}) + \\ +i \sin(\sigma_{2l} - \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2l} + \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2r} + \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2r} + \chi_{1l}) + \\ +i \sin(\sigma_{2r} - \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2r} + \chi_{1l}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} \cos(\sigma_{2l} + \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2l} + \chi_{1l}) + \\ +i \sin(\sigma_{2l} - \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2l} + \chi_{1l}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1r}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} -\sin(\sigma_{2r} + \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2r} - \chi_{1r}) + \\ +i \cos(\sigma_{2r} - \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2r} - \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1r}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} -\sin(\sigma_{2l} + \sigma_{1r}) \cos(\chi_{2l} - \chi_{1r}) + \\ +i \cos(\sigma_{2l} - \sigma_{1r}) \sin(\chi_{2l} - \chi_{1r}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2r}^*}{2} \left( \begin{array}{l} -\sin(\sigma_{2r} + \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2r} - \chi_{1l}) + \\ +i \cos(\sigma_{2r} - \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2r} - \chi_{1l}) \end{array} \right) \\ \frac{g_{1l}g_{2l}^*}{2} \left( \begin{array}{l} -\sin(\sigma_{2l} + \sigma_{1l}) \cos(\chi_{2l} - \chi_{1l}) + \\ +i \cos(\sigma_{2l} - \sigma_{1l}) \sin(\chi_{2l} - \chi_{1l}) \end{array} \right) \end{array} \right) \Rightarrow \\
\end{aligned} \tag{225}$$

Вектор видностей параметров Стокса радиоизлучения источника  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{in}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  связан с вектором  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{Ант}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  на выходе антенн соотношением

$$\hat{\mathbf{S}}_{\text{Ант}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \mathbf{M} \hat{\mathbf{S}}_{\text{in}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \tag{226}$$

где  $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{Ант1,2}} \mathbf{M}_{\text{m}} \mathbf{M}_{\text{s}}$  матрица, описывающая вращение небосвода  $\mathbf{M}_{\text{s}}$ , влияние среды между источником и антеннами  $\mathbf{M}_{\text{m}}$  и самих антенн  $\mathbf{M}_{\text{Ант1,2}}$ . Подставляя (226) в (224) получим

$$\hat{\mathbf{S}}_{\text{in}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{V}_{\text{out}}. \tag{227}$$

Согласно (227) можно определить вектор  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{in}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  видностей параметров Стокса для данного вектора базы интерферометра  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , проделав измерения с помощью корреляционного интерферометра в четырёх комбинациях круговых поляризаций  $rr, rl, lr$  и  $ll$ , то есть, измерив компоненты вектора  $\mathbf{V}_{\text{Iout}}$  последовательно получаемых откликов коррелятора (или откликов одновременно работающих четырёх корреляторов) и учтя свойства РОП (матрица  $\mathbf{G}$ ), антенн (матрица  $\mathbf{M}_{\text{Ант1,2}}$ ) и влияние среды (матрица  $\mathbf{M}_{\text{m}}$ ).<sup>67</sup>

Получим матрицу (225) в случае идеальных круговых поляризаций на обеих антеннах и одинаковых коэффициентах усиления  $g_{1r} = g_{1l} = g_{2r} = g_{2l} = g$  приёмных устройств. Подставляя в (225)  $\sigma_{1r} = \sigma_{2r} = -\pi/4$ ,  $\sigma_{1l} = \sigma_{2l} = \pi/4$ ;  $\chi_{1r} = \varphi_1$ ,  $\chi_{1l} = \chi_{1r} + \phi_1$ ,  $\chi_{2r} = \varphi_2$ ,  $\chi_{2l} = \chi_{2r} + \phi_2$  получим

$$\mathbf{G}^{-1}(-\pi/4, \pi/4, \varphi_1, \varphi_1 + \phi_1, -\pi/4, \pi/4, \varphi_2, \varphi_2 + \phi_2) =$$

$$= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} & 0 & 0 & e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ 0 & e^{-i(\varphi_2 + \phi_2 + \varphi_1)} & ie^{-i(\varphi_2 + \phi_2 + \varphi_1)} & 0 \\ 0 & e^{i(\varphi_2 + \varphi_1 + \phi_1)} & -ie^{i(\varphi_2 + \varphi_1 + \phi_1)} & 0 \\ e^{-i(\varphi_2 + \phi_2 - \varphi_1 - \phi_1)} & 0 & 0 & -e^{-i(\varphi_2 + \phi_2 - \varphi_1 - \phi_1)} \end{pmatrix}. \quad (228)$$

В частном случае  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  имеем из (228) и (224)

---

<sup>67</sup> В [45] изложен другой метод учёта несовершенств поляризации радиотелескопа, а именно через коэффициенты  $D$ , описывающие "просачивание" поляризации, ортогональной к номинальной.

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}^{-1}(-\pi/4, \pi/4, \varphi, \varphi, -\pi/4, \pi/4, \varphi, \varphi) &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & e^{-i2\varphi} & ie^{-i2\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i2\varphi} & -ie^{i2\varphi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c} |g|^2 \mathbf{C}'(\varphi)^+, \\
\overline{V_{1r'} V_{2r'}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (\hat{I}_{\text{Ант}} + \hat{V}_{\text{Ант}}), & \overline{V_{1r'} V_{2l'}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (\hat{Q}_{\text{Ант}} + i\hat{U}_{\text{Ант}}) e^{-i2\varphi}, \\
\overline{V_{1l'} V_{2r'}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (\hat{Q}_{\text{Ант}} - i\hat{U}_{\text{Ант}}) e^{i2\varphi}, & \overline{V_{1l'} V_{2l'}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (\hat{I}_{\text{Ант}} - \hat{V}_{\text{Ант}}).
\end{aligned} \tag{229}$$

Далее, полагая  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = \pi/2$ , вычислим с помощью (228) и (224) <sup>68</sup>

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}^{-1}(-\pi/4, \pi/4, \varphi, \varphi + \pi/2, -\pi/4, \pi/4, \varphi, \varphi + \pi/2) &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -ie^{-i2\varphi} & e^{-i2\varphi} & 0 \\ 0 & ie^{i2\varphi} & e^{i2\varphi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \mathbf{C}'_2(\varphi)^+, \\
\overline{V_{1r'_2} V_{2r'_2}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (\hat{I}_{\text{Ант}} + \hat{V}_{\text{Ант}}), & \overline{V_{1r'_2} V_{2l'_2}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (-i\hat{Q}_{\text{Ант}} + \hat{U}_{\text{Ант}}) e^{-i2\varphi}, \\
\overline{V_{1l'_2} V_{2r'_2}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (i\hat{Q}_{\text{Ант}} + \hat{U}_{\text{Ант}}) e^{i2\varphi}, & \overline{V_{1l'_2} V_{2l'_2}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (\hat{I}_{\text{Ант}} - \hat{V}_{\text{Ант}}).
\end{aligned} \tag{230}$$

Наконец, подставляя в (228)  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi + \pi/2$ ,  $\phi_1 = \phi_2 = -\pi/2$  получим, используя, также, (224)

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}^{-1}(-\pi/4, \pi/4, \varphi + \pi/2, \varphi, -\pi/4, \pi/4, \varphi + \pi/2, \varphi) &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -ie^{-i2\varphi} & e^{-i2\varphi} & 0 \\ 0 & ie^{i2\varphi} & e^{i2\varphi} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \mathbf{C}'_3(\varphi)^+ = \frac{4\pi}{c} |g|^2 \mathbf{C}'_2(\varphi)^+, \\
\overline{V_{1r'_3} V_{2r'_3}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (\hat{I}_{\text{Ант}} + \hat{V}_{\text{Ант}}), & \overline{V_{1r'_3} V_{2l'_3}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (-i\hat{Q}_{\text{Ант}} + \hat{U}_{\text{Ант}}) e^{-i2\varphi}, \\
\overline{V_{1l'_3} V_{2r'_3}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (i\hat{Q}_{\text{Ант}} + \hat{U}_{\text{Ант}}) e^{i2\varphi}, & \overline{V_{1l'_3} V_{2l'_3}^*} &= \frac{4\pi}{c} |g|^2 \frac{1}{2} (\hat{I}_{\text{Ант}} - \hat{V}_{\text{Ант}}).
\end{aligned} \tag{231}$$

<sup>68</sup> Именно этот частный случай рассмотрен в [45] на стр. 100 (формулы (4.35).

Все строки матрицы  $\mathbf{G}^{-1}$  имеет одинаковую структуру и с помощью любой из них и (224) можно вычислить отклик корреляционного двухантенного интерферометра на радиоизлучение с различающимися между собой произвольными эллиптическими поляризациями ( $\mathbf{E}_{\text{АНТ1}}$  на первой антенне и  $\mathbf{E}_{\text{АНТ2}}$  на второй антенне) через видности параметров Стокса в декартовом базисе и параметры эллипсов. Соответствующая формула имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{V_{E_1} V_{E_2}^*} &= \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2^*}{2} \cdot \left\{ \left[ \cos(\sigma_2 - \sigma_1) \cos(\chi_2 - \chi_1) - i \sin(\sigma_2 + \sigma_1) \sin(\chi_2 - \chi_1) \right] \hat{I}_{\text{АНТ}} + \right. \\ &+ \left[ \cos(\sigma_2 + \sigma_1) \cos(\chi_2 + \chi_1) - i \sin(\sigma_2 - \sigma_1) \sin(\chi_2 + \chi_1) \right] \hat{Q}_{\text{АНТ}} + \\ &+ \left[ \cos(\sigma_2 + \sigma_1) \sin(\chi_2 + \chi_1) + i \sin(\sigma_2 - \sigma_1) \cos(\chi_2 + \chi_1) \right] \hat{U}_{\text{АНТ}} + \\ &\left. + \left[ -\sin(\sigma_2 + \sigma_1) \cos(\chi_2 - \chi_1) + i \cos(\sigma_2 - \sigma_1) \sin(\chi_2 - \chi_1) \right] \hat{V}_{\text{АНТ}} \right\}. \end{aligned} \quad (232)$$

Эта формула была получена в [64]<sup>69</sup> и [59] (см. также [45], с. 97). С её помощью можно, в частности, получить формулы, приведённые в таблице 1 [60] для линейных поляризаций ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ). Например, полагая  $\chi_1 = 0$ ,  $\chi_2 = \pi/4$ , получим, с точностью до коэффициента  $\frac{4\pi}{c} \mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2^*$ , соответствующую формулу из [60] (четвёртая формула снизу в таблице 1).

Формула (232) справедлива и для одиночного радиотелескопа. В этом случае  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  в общем случае эллиптические поляризации, принимаемые радиотелескопом, а вместо видностей параметров Стокса в (232) будут сами параметры Стокса (действительные величины).

<sup>69</sup> В [64] знак параметра Стокса  $V$  противоположен знаку, принятому МАС (см. [60]).



### 13. Заключение

В данной работе рассмотрено математическое описание квазимонохроматического космического радиоизлучения, приходящего в бесконечно узком телесном угле (точечный источник), и воздействия на него различных систем и сред. Последние описываются матрицей Джонса, преобразующей вектор Джонса, матрицей  $\mathbf{K}$ , описывающей влияние на вектор когерентности и матрицей Мюллера  $\mathbf{M}$ , воздействующей на вектор Стокса. Рассмотрены некоторые свойства этих матриц. Поскольку  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  матрицы выражаются через матрицу Джонса  $\mathbf{J}$ , то их свойства и параметры зависят от свойств и параметров матрицы Джонса <sup>70</sup>.

Элементы матриц Джонса,  $\mathbf{K}$  матриц и матриц Мюллера зависят в общем случае от частоты. Если в пределах полосы частот сигнала  $\Delta\nu$  зависимость элементов матрицы Джонса,  $\mathbf{K}$ -матрицы и матрицы Мюллера от частоты существенна, то полосу следует разбить на бесконечно узкие интервалы  $d\nu$  и выполнить интегрирование правых частей выражений (53), (55) и (65) по частоте с учётом частотной зависимости элементов соответствующих матриц, формы спектра радиоизлучения и частотной характеристики аппаратуры (см. ,например, [46] в связи с рассмотрением деполяризации из-за частотной дисперсии среды распространения). Если источник радиоизлучения не точечный, а протяжённый, то правые части (53), (55) и (65) следует рассматривать не как произведения, а как интегралы антенного сглаживания по источнику. Наконец, если источник радиоизлучения распределён вдоль луча зрения и "перемешан" со средой, свойства которой как и излучательная способность в общем случае изменяются вдоль направления распространения, то необходимо выполнить соответствующее интегрирование правых частей (53), (55) и (65) вдоль оси  $z$  (примеры см. в [46]).

---

<sup>70</sup> В дополнение к уже рассмотренным зависимостям укажем, что  $\det\mathbf{K} = \det\mathbf{M} = |\det\mathbf{J}|^4$ ,  $\text{Sp}\mathbf{K} = \text{Sp}\mathbf{M} = |\text{Sp}\mathbf{J}|^2$ . Эти соотношения следуют из формул для детерминанта и следа прямого произведения матриц (см., например, [66]); их можно непосредственно проверить по выражениям (56) и (69) для матриц  $\mathbf{K}$  и  $\mathbf{M}$  через элементы матрицы  $\mathbf{J}$ .

## 14. Литература

60. Виняйкин Е.Н. *Математическое описание поляризации космического радиоизлучения. I. Декартовый поляризационный базис*. Препринт № 534 ФГНУ НИРФИ, Нижний Новгород, 2010.

61. Абрамов В.И. *Вопросы повышения точности измерений линейной поляризации радиоизлучения космических источников на радиотелескопе РАТАН-600*. Кандидатская диссертация, Горький, НИРФИ, 1984.

62. Гетманцев Г.Г., Токарев Ю.В. *К вопросу о деполаризации и корреляционном методе измерения поляризации космического радиоизлучения*. Известия вузов. Радиофизика, т.10, в.2, сс.170-174, 1967.

63. Conway R.G., Kronberg P.P. *Interferometric measurement of polarization distributions in radio sources*. Mon. Not. R. Astron. Soc., v.142, no.1, pp.11-32, 1969.

64. Morris D., Radhakrishnan V, Seielstad G.A. *On the measurement of polarization distributions over radio sources*. Astrophys. J., v.139, pp.551-559, 1964.

65. Есепкина Н.А., Корольков Д.В., Парийский Ю.Н. *Радиотелескопы и радиометры*. М.: "Наука", 1973, 415с.

66. Ланкастер П. *Теория матриц*. М.: Наука, 1973, 280 с.

## 15. Основные обозначения

$\mathbf{E}(t) = E(t)e^{i(2\pi\nu t - kz)}\mathbf{e}(t)$	вектор электрического поля
$E(t) = E_0(t)e^{i\psi(t)}$	комплексная амплитуда электрического поля
$E_0(t)$	модуль вектора электрического поля
$\psi(t)$	фаза
$\mathbf{e}(t)$	случайный комплексный единичный вектор
$\nu$	частота
$k$	волновое число
$E_x(t) = E_{0x}(t)e^{i\psi_x(t)}$	проекция вектора $\mathbf{E}(t)$ на ось $x$
	без множителя $e^{i(2\pi\nu t - kz)}$

$$E_y(t) = E_{0y}(t) e^{i\psi_y(t)}$$

$\sigma$

$\rho$

$\chi$

$\varphi$

$$\mathbf{E}_{x,y}(t) = \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$K_{x,y} = \frac{E_x}{E_y}$$

$r_{x,y}$

$I$

$I_p$

$I_L$

$P_E$

$P_L$

$P_C$

$I, Q, U, V$

$\hat{I}, \hat{Q}, \hat{U}, \hat{V}$

$\mathbf{I}_{x,y}, \mathbf{I}_D$

$\mathbf{V}_{ID}, \mathbf{V}_I$

$\mathbf{S}$

$\hat{\mathbf{S}}$

проекция вектора  $\mathbf{E}(t)$  на ось  $y$  без множителя  $e^{i(2\pi\nu t - kz)}$

угол эллиптичности (эллиптичность) отношение осей эллипса поляризации

позиционный угол большой оси эллипса поляризации (эллиптическая поляризация) или плоскости поляризации (линейная поляризация) угол поворота декартового базиса D декартовый вектор Джонса

базисные поляризационные векторы декартового базиса D

декартовый коэффициент поляризации

коэффициент взаимной корреляции декартовых компонент вектора электрического поля

интенсивность

интенсивность поляризованной компоненты излучения

интенсивность линейно-поляризованной компоненты

степень поляризации

степень линейной поляризации

степень круговой поляризации

параметры Стокса

видности параметров Стокса

матрица когерентности в декартовом базисе

вектор когерентности в декартовом базисе

вектор Стокса (в декартовом базисе)

видность вектора Стокса (в декартовом базисе)

$I_{xx}, I_{xy}, I_{yx}, I_{yy}$

**J**

$\mathbf{T}_{B_1 B_2}$

**K**

$\mathbf{K}_{B_1 B_2}$

**M**

$\mathbf{M}_{B_1 B_2}$

$$\mathbf{e}_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$E_r = E_{0r} e^{i\psi/r}, E_l = E_{0l} e^{i\psi/l}$$

$$\mathbf{e}_{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{l_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{r_2} = E_{0r_2} e^{i\psi/r_2}, E_{l_2} = E_{0l_2} e^{i\psi/l_2}$$

$$\mathbf{e}_{r_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_{l_3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$E_{r_3} = E_{0r_3} e^{i\psi/r_3}, E_{l_3} = E_{0l_3} e^{i\psi/l_3}$$

$$K_{r,l} = \frac{E_r}{E_l}$$

$$\mathbf{e}_{Er}(\sigma_0) = \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 \\ -i \sin \sigma_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_{El}(\sigma_0) = \begin{pmatrix} -i \sin \sigma_0 \\ \cos \sigma_0 \end{pmatrix}$$

элементы матрицы или вектора когерентности в декартовом базисе  
матрица Джонса

матрица преобразования компонент вектора Джонса при переходе от базиса  $B_2$  к базису  $B_1$

матрица преобразования вектора когерентности некоторым физическим устройством или средой

матрица преобразования компонент вектора когерентности при переходе от базиса  $B_2$  к базису  $B_1$

матрица Мюллера

матрица преобразования компонент вектора Стокса (обобщённого) при переходе от базиса  $B_2$  к базису  $B_1$

базисные поляризационные векторы кругового базиса  $C$

компоненты вектора Джонса в круговом базисе  $C$

базисные поляризационные векторы кругового базиса  $C_2$

компоненты вектора Джонса в круговом базисе  $C_2$

базисные поляризационные векторы кругового базиса  $C_3$

компоненты вектора Джонса в круговом базисе  $C_3$

круговой коэффициент поляризации

базисные поляризационные векторы эллиптического базиса  $E$

$$\mathbf{e}_{E_2r}(\sigma_0) = \begin{pmatrix} i \sin \sigma_0 \\ \cos \sigma_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_{E_2l}(\sigma_0) = \begin{pmatrix} \cos \sigma_0 \\ i \sin \sigma_0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{D}, \mathbf{D}', \mathbf{C}, \mathbf{C}', \mathbf{C}_2, \mathbf{C}'_2,$   
 $\mathbf{C}_3, \mathbf{C}'_3, \mathbf{E}, \mathbf{E}', \mathbf{E}_2, \mathbf{E}'_2$

$\mathbf{I}_B$

$\mathbf{V}_{IB}$

$\mathbf{S}_B$

базисные поляризационные векторы  
 эллиптического базиса  $\mathbf{E}_2$

матрицы, связывающие вектор Стокса (декартовый) и вектор когерентности, соответственно, в базисах  $\mathbf{D}, \mathbf{D}', \mathbf{C}, \mathbf{C}', \mathbf{C}_2, \mathbf{C}'_2,$

$\mathbf{C}_3, \mathbf{C}'_3, \mathbf{E}, \mathbf{E}', \mathbf{E}_2, \mathbf{E}'_2$  (общее обозначение  $\mathbf{B}$ )

матрица когерентности в базисе  $\mathbf{B}$

вектор когерентности в базисе  $\mathbf{B}$

обобщённый вектор Стокса  
 (в базисе  $\mathbf{B}$ )

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Круговые поляризационные базисы $C, C', C_2, C'_2, C_3, C'_3$ и вектор Джонса в них.....	3
2. Коэффициент поляризации, выраженный через компоненты вектора Джонса в круговом базисе $C$ .....	10
3. Круговая комплексная плоскость и сфера Пуанкаре .....	11
4. Эллиптические поляризационные базисы $E, E', E_2, E'_2$ и вектор Джонса в них.....	19
5. Произвольные (обобщённые) поляризационные базисы.....	29
6. Преобразование коэффициента поляризации при переходе от одного базиса к другому.....	31
7. Матрица и вектор когерентности в круговых и эллиптических базисах .....	32
8. Параметры Стокса, выраженные через элементы матрицы когерентности в круговых и эллиптических базисах .....	38
9. Степень поляризации и позиционный угол большой оси эллипса поляризации, выраженные через элементы матрицы когерентности в линейных $(D, D')$ , круговых $(C, C', C_2, C'_2, C_3, C'_3)$ и эллиптических $(E, E', E_2, E'_2)$ базисах .....	46
10. Параметры Стокса в круговых и эллиптических базисах.....	51
11. Преобразование матрицы Джонса, $\mathbf{K}$ - матрицы и матрицы Мюллера при переходе от одного базиса к другому.....	54
12. Интерферометрия на антеннах с круговой поляризацией .....	55
13. Заключение.....	65
14. Литература.....	66
15. Основные обозначения.....	66

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ  
КОСМИЧЕСКОГО РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ.  
II. КРУГОВЫЕ, ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ОБОБЩЁННЫЕ  
ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ БАЗИСЫ.

Виняйкин Евгений Николаевич

Оригинал-макет подготовлен  
в Отделе методов обработки научной информации ФГНУ НИРФИ

---

Подписано в печать 21.04.11. Формат 60x84/16  
Бумага писчая. Объем 2,7 усл.п.л.  
Тираж 50. Заказ 5604

---

Отпечатано в ФГНУ НИРФИ.  
603950 Н.Новгород, ул. Б.Печерская, 25/12а